Calcul différentiel et intégral.

4464. — Dans un domaine Δ du plan de deux variables réelles x, y, on donne trois familles F_1, F_2, F_3 de courbes analytiques telles que :

a) Par tout point de Δ il passe une courbe et une seule de chaque famille (ce qui n'exclut pas l'existence possible en dehors de Δ de points par où il en passe plusieurs);

b) Deux courbes appartenant à deux familles différentes ont au plus un point commun dans Δ.

I. — 1° Montrer qu'on peut toujours représenter les familles F_1, F_2, F_3 par des équations de la forme

$$f_1(x,\ y) = a_1, \qquad f_2(x,\ y) = a_2, \quad f_3(x,\ y) = a_3$$

et qu'on peut par une transformation analytique biunivoque substituer à Δ un domaine dans lequel F_1 et F_2 sont représentées par des segments parallèles aux axes de coordonnées. De quelle nature est l'équation de la transformée d'une courbe de F_3 ?

2° Soient C_1, C_2, C_3 trois courbes arbitraires de F_1, F_2, F_3 et A un point arbitraire de C_1; par A passe une courbe de F_2 dont on désigne par B le point de rencontre, s'il existe, avec C_3; par B passe une courbe de F_1 dont on désigne par C le point de rencontre, s'il existe, avec C_2; par C passe une courbe de F_3 dont on désigne par D le point de rencontre, s'il existe, avec C_1; par D passe une courbe de F_2 dont on désigne par E le point de rencontre, s'il existe, avec C_3; par E passe une courbe de F_1 dont on désigne par F le point de rencontre, s'il existe, avec C_2.

Nous dirons que les familles F_1, F_2, F_3 ont la propriété de « fermeture hexagonale » lorsque la courbe de F_3 qui passe par le point F passe également par le point initial A.

Montrer que, s'il existe des représentations de F_1, F_2, F_3 vérifiant dans tout le domaine Δ l'identité

$$f_1(x,\ y) + f_2(x,\ y) + f_3(x,\ y) \equiv 0,$$

la figure a la propriété de fermeture hexagonale.

Examiner le cas où, F_1 et F_2 étant transformées en les parallèles aux axes, les courbes de F_3 sont les intégrales d'une équation différentielle à variables séparées,

$$A(x)\,dx + B(y)\,dy = 0,$$

où $\dfrac{A}{B}$, supposé uniforme, a un signe constant dans le domaine Δ.

3° Étudier si la propriété de fermeture hexagonale est vérifiée dans les exemples suivants :

a) P, Q, R étant trois points non alignés, on prend comme domaine Δ l'intérieur du cercle circonscrit au triangle PQR et pour F_1, F_2, F_3 les faisceaux de cercles ayant pour points de bases respectifs P et Q, Q, et R, R et P;

b) On prend comme domaine Δ l'intérieur du triangle PQR et pour F_1, F_2 F_3 les faisceaux de cercles ayant pour points de Poncelet respectifs P et Q, Q et R, R et P;

c) Le plan étant rapporté à deux axes rectangulaires Ox, Oy, on désigne par γ le cercle de centre O et de rayon ρ et l'on prend comme domaine Δ le demi-plan $x > \rho$; F_1 est la famille des droites passant par O, F_2 est la famille des droites tangentes à γ en un point d'ordonnée positive, F_3 est la famille des droites tangentes à γ en un point d'ordonnée négative.

II. — $\varphi(x,\ y)$ étant une fonction analytique arbitraire des variables x et y, on associe à chacune des familles F_i ($i = 1$, 2 ou 3) une fonction $T_i(\varphi)$ définie par la relation

$$T_i(\varphi) = \lambda_i \frac{D(\varphi,\ f_i)}{D(x,\ y)} = \lambda_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right),$$

où λ_i désigne une fonction des variables x et y.

1° Montrer que l'on peut toujours choisir les multiplicateurs λ_i de sorte que les fonctions associées à trois familles arbitraires F_1, F_2, F_3 vérifient

$$T_1(\varphi) + T_2(\varphi) + T_3(\varphi) \equiv 0. \qquad (1)$$

Que deviennent alors les fonctions $T_i(\varphi)$ lorsqu'on effectue sur x, y une transformation analytique biunivoque?

2° Montrer que la fonction

$$T_1[T_2(\varphi)] - T_2[T_1(\varphi)]$$

est indépendante des dérivées secondes de φ et que l'on peut trouver des coefficients $h_1(x,\ y)$ et $h_2(x,\ y)$ tels que

$$T_1(T_2) - T_2(T_1) \equiv h_2 \cdot T_1 - h_1 \cdot T_2.$$

Que deviennent h_1 et h_2 lorsqu'on effectue sur x, y une transformation analytique biunivoque ?

3° Montrer que si F_1, F_2, F_3 sont transformables simultanément en trois faisceaux de droites parallèles, on peut choisir les variables et les multiplicateurs λ_i de façon que l'on ait, en même temps que (1), la relation

$$T_1(T_2) - T_2(T_1) = 0. \tag{2}$$

Si, réciproquement, les conditions (1) et (2) sont vérifiées, on a $h_1 = h_2 = 0$ et les deux systèmes différentiels

$$\begin{cases} T_1(\psi) = 1, \\ T_2(\psi) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} T_1(\omega) = 0, \\ T_2(\omega) = 1, \end{cases}$$

sont intégrables. En déduire que F_1, F_2, F_3 sont alors transformables en faisceaux de droites parallèles et ont la propriété de fermeture hexagonale.

Étudier par ce procédé l'exemple suivant :

$$\begin{array}{ll} F_1, & x = \text{constante} ; \\ F_2, & y = \text{constante} ; \\ F_3, & \dfrac{e^x . \mathrm{L}y}{e^x + \mathrm{L}y} = \text{constante}. \end{array}$$

I

1° Les hypothèses faites permettent, dans le domaine Δ, de représenter la famille F_1 par une équation $f_1(x, y) = a_1$, a_1 restant constant sur chaque courbe de F_1; en effet, un point (x, y) de Δ détermine, par hypothèse, une courbe et une seule de F_1, courbe qui peut être caractérisée par un certain paramètre a_1, fonction univoque de (x, y) dans Δ ; il en est de même pour chaque famille F_2 ou F_3, de sorte que nous avons, pour représenter les familles F_1, F_2, F_3, des équations de la forme

$$f_1(x, y) = a_1, \qquad f_2(x, y) = a_2, \qquad f_3(x, y) = a_3.$$

Le changement de variables défini par

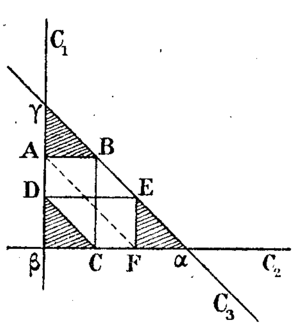
$$(1) \qquad f_1(x, y) = X, \qquad f_2(x, y) = Y$$

transforme les courbes F_1 en une série de segments parallèles à l'axe des Y, et de même les courbes F_2 et l'axe des X ; à un point de Δ correspond, par hypothèse, un seul système (X, Y) ; réciproquement, à un point (X, Y) prélevé dans le domaine transformé de Δ, correspond une seule courbe de F_1, une seule courbe de F_2 et ces deux courbes n'ont, par hypothèse, qu'un point commun dans Δ (si toutefois elles se coupent) : de la sorte, les formules (1) définissent une transformation analytique biunivoque substituant à Δ un certain domaine Δ' où F_1, F_2 sont représentées par des segments parallèles aux axes de coordonnées ; les courbes F_3 sont alors des courbes telles que par chaque point de Δ' ne passe qu'une courbe F_3 et que chaque courbe de F_3 n'est coupée qu'en un point au plus par une parallèle à l'un ou l'autre axe. On peut avoir des exemples simples : sur un cercle du plan XOY, prélevons un arc ne contenant aucune tangente horizontale ni verticale et imprimons à cet arc une translation continue de direction constante ; le domaine Δ' sera une bande indéfinie limitée par deux droites parallèles.

2° Les hypothèses faites sur les familles F_1, F_2, F_3 qui possèdent la propriété de fermeture hexagonale et les explications qui précèdent donnent le moyen de transformer la relation identique $f_1(x, y) + f_2(x, y) + f_3(x, y) \equiv 0$ en la relation

$$X + Y + (-X - Y) \equiv 0,$$

où F_1 est représentée par une équation $f_1(x, y) = a_1$ ou $X = a_1$, F_2 par une équation $f_2(x, y) = a_2$ ou $Y = a_2$ et F_3 par $f_3 = a_3$ ou $-(X + Y) = a_3$. Dans le domaine Δ', on a donc une famille de segments parallèles à OY, une autre de segments parallèles à OX, une troisième de segments parallèles à la seconde bissectrice. Il suffit de faire la figure pour constater la propriété de fermeture : le moyen indiqué par la figure consiste à remarquer que, α, β, γ étant les sommets du triangle formé par C_1, C_2, C_3, les trois triangles couverts de hachures, $AB\gamma$, $CD\beta$, $EF\alpha$, sont égaux, car, ayant leurs côtés respectivement parallèles, ils sont semblables et, d'autre part, $AB = \beta C$, $\beta D = EF$, de sorte qu'ils sont égaux ; donc $A\gamma = FE$ et AF est parallèle à $\alpha\gamma$.



Dans le cas où F_1, F_2 sont transformées en parallèles aux axes : $F_1(X = a_1)$, $F_2(X = a_2)$, nous avons à étudier le cas où les courbes de F_3 sont les intégrales d'une équation

$$A(x)\,dx + B(y)\,dy = 0,$$

où $\frac{A}{B}$, supposé uniforme, a un signe constant dans Δ ; ni A ni B ne s'annulent, $X = \int_{x_0}^{x} A(x)\,dx$, $Y = \int_{y_0}^{y} B(y)\,dy$ sont des fonctions uniformes et monotones de x ou y respectivement, de sorte que le remplacement des variables (x, y) par les variables X, Y satisfait aux conditions requises et permet de prendre pour équations de F_1, F_2, F_3 les équations

$$X = a_1, \qquad Y = a_2, \qquad -(X + Y) = a_3,$$

qui mettent en évidence la propriété de fermeture hexagonale.

3° *a)* Nous faisons une inversion de pôle Q et prenons pour axe Ox la droite $P'R'$, pour Oy la médiatrice de $P'R'$ (P', R' sont les transformées de P, R) ; les équations de F_1, F_2, F_3 sont alors

$$\frac{x + l}{y} = a_1, \qquad \frac{x - l}{y} = a_2, \qquad \frac{2ly}{x^2 + y^2 - l^2} = a_3,$$

où l désigne la distance $\overline{P'O} = \overline{OR'}$; le domaine Δ' est l'un des deux demi-plans limités par Ox. Si nous posons $\frac{x+l}{y} = X$, $\frac{x-l}{y} = Y$, on a

$$x^2 - l^2 + y^2 = y^2(XY + 1) \qquad \text{et} \qquad \frac{2l}{y} = X - Y;$$

les équations transformées sont

$$X = a_1, \qquad Y = a_2, \qquad \frac{X-Y}{XY+1} = a_3.$$

Si maintenant nous posons $X = \operatorname{tg} \xi$, $Y = \operatorname{tg} \eta$, les équations transformées sont

$$\xi = \alpha_1, \qquad \eta = \alpha_2, \qquad \xi - \eta = \alpha_3$$

et la variable ξ devra varier de 0 à $\frac{\pi}{2}$, η de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Les conditions de transformation biunivoque sont remplies; la propriété de fermeture hexagonale est mise en évidence.

b) La même inversion donne, dans le même domaine, les équations

$$(x+l)^2 + y^2 = 2a_1 l, \qquad (x-l)^2 + y^2 = 2a_2 l, \qquad \frac{x^2+y^2+l^2}{2lx} = a_3.$$

(L'énoncé limite le domaine primitif au domaine intérieur au triangle PQR; mais on peut encore prendre l'intérieur du cercle circonscrit au triangle PQR, comme cela résulte de l'inversion indiquée.)

Si l'on pose $(x+l)^2 + y^2 = 2lX$, $(x-l)^2 + y^2 = 2lY$, on a

$$x^2 + y^2 + l = l(X+Y), \qquad 2x = X - Y$$

et les équations de F_1, F_2, F_3 deviennent

$$X = a_1, \qquad Y = a_2, \qquad \frac{X+Y}{X-Y} = a_3.$$

Si l'on pose $X = e^{\xi}$, $Y = e^{-\eta}$, on a

$$\frac{X+Y}{X-Y} = \frac{e^{\xi+\eta}+1}{e^{\xi+\eta}-1},$$

de sorte que les équations de F_1, F_2, F_3 peuvent s'écrire

$$\xi = \log a_1 = \alpha_1, \qquad \eta = -\log a_2 = \alpha_2, \qquad \xi + \eta = \log \frac{a_3+1}{a_3-1} = \alpha_3$$

et la condition de fermeture est réalisée.

c) La famille F_1 est représentée par $\frac{y}{x} = a_1$; la famille F_2, par $x \cos a_2 + y \sin a_2 - \rho = 0$, avec $0 < a_2 < \pi$, et la famille F_3, par $x \cos a_3 + y \sin a_3 - \rho = 0$, avec $0 > a_3 > -\pi$. Posons $x = r \cos \omega$ $y = r \sin \omega$; les équations en jeu deviennent

$$\operatorname{tg} \omega = a_1, \qquad r \cos(\omega - a_2) = \rho, \qquad r \cos(\omega - a_3) = \rho.$$

La variable r surpasse ρ ; posons donc $r = \frac{\rho}{\cos V}$, avec $0 < V < \frac{\pi}{2}$; on a

$$\cos(\omega - a_2) = \cos V = \cos(\omega - a_3)$$

et par conséquent, utilisant les coordonnées polaires, les trois familles sont représentées par les équations

$$\omega = c^{te}, \qquad \omega - V = c^{te}, \qquad \omega + V = c^{te},$$

où les variables sont ω et V : la propriété de fermeture hexagonale est évidente en vertu de

$$(\omega - V) + (\omega + V) - 2\omega \equiv 0.$$

La définition du domaine et des familles montre que les hypothèses indiquées en introduction sont réalisées

II

1° Les multiplicateurs λ_i vérifient, par définition, les équations

$$(1)\quad \begin{cases} \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x} + \lambda_3 \dfrac{\partial f_3}{\partial x} = 0, \\ \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial y} + \lambda_3 \dfrac{\partial f_3}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

de façon que $T_1(\varphi) + T_2(\varphi) + T_3(\varphi)$ *soit identiquement nulle (on entend par là, quelle que soit la fonction* φ). Dans le domaine Δ, les trois déterminants fonctionnels sont différents de zéro, de sorte que les rapports $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ sont déterminés, uniformes et de signe constant; *de plus, aucune des fonctions* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *n'est nulle.*

Si l'on remplace (x, y) par les variables (X, Y), la substitution $(x, y; X, Y)$ étant biunivoque, on sait que

$$\frac{D(\varphi, f)}{D(X, Y)} = \frac{D(\varphi, f)}{D(x, y)} \cdot \frac{D(x, y)}{D(X, Y)};$$

il en résulte que les rapports mutuels $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ ne sont pas modifiés; on doit donc admettre ou que les $T_i(\varphi)$ sont restées les mêmes (ce qui arrive si l'on a remplacé les multiplicateurs λ_i primitifs par les nouveaux multiplicateurs $\lambda_i : D$, où D désigne $\left(\dfrac{D(x, y)}{D(X, Y)}\right)$, ou bien que les $T_i(\varphi)$ ont été multipliées par une même fonction qui, ou bien sera D si l'on a conservé les mêmes multiplicateurs λ_i (en les exprimant toutefois au moyen de X, Y), ou bien sera une fonction quelconque Δ si les multiplicateurs primitifs ont été eux-mêmes multipliés par une même fonction. Il n'y a qu'une question d'opportunité qui indiquera, pour chaque cas précis, comment on devra opérer; les parties 2° et 3° donneront, pour ce point précis, des indications complémentaires.

2° On a

$$T_1(\varphi) = \lambda_1 \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \quad T_2(\varphi) = \lambda_2 \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right).$$

Il est clair que $T_1(\varphi\psi) \equiv \varphi T_1(\psi) + \psi T_1(\varphi)$, $T_1(\varphi + \psi) = T_1(\varphi) + T_1(\psi)$, car $T_1(\varphi)$ contient les dérivées de φ sous forme linéaire et homogène. Désignons par D_1 le jacobien $\dfrac{D(\varphi, f_1)}{D(x, y)}$, D_2 le jacobien $\dfrac{D(\varphi, f_2)}{D(x, y)}$. On a alors $T_2 = \lambda_2 D_2$. (Il est bien entendu que $T_1(A + B)$ n'est pas le produit de T_1 par $A + B$, mais signifie l'opération T_1 effectuée sur $A + B$.)

$$T_1(T_2) = T_1(\lambda_2 D_2) = D_2 T_1(\lambda_2) + \lambda_2 T_1(D_2),$$

$$T_1(D_2) = T_1\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = T_1\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - T_1\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)$$

$$= \frac{\partial f_2}{\partial y} T_1\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} T_1\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right) - \frac{\partial f_2}{\partial x} T_1\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial y} T_1\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right).$$

Finalement, les seuls termes de $T_1[T_2(\varphi)] - T_2[T_1(\varphi)]$ qui contiennent les dérivées secondes de φ sont fournis par

$$\lambda_2 \left[\frac{\partial f_2}{\partial y} T_1\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) - \frac{\partial f_2}{\partial x} T_1\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \right] - \lambda_1 \left[\frac{\partial f_1}{\partial y} T_2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) - \frac{\partial f_1}{\partial x} T_2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \right].$$

Le produit $\lambda_1\lambda_2$ est en évidence; en le supprimant, cette expression se réduit à

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} \frac{D\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, f_1\right)}{D(x, y)} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{D\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}, f_1\right)}{D(x, y)} - \left[\frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{D\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, f_2\right)}{D(x, y)} - \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{D\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, f_2\right)}{D(x, y)} \right] \equiv 0$$

comme le simple développement des jacobiens le montre. Les termes qui restent sont, en remplaçant D_1 par $\frac{1}{\lambda_1}T_1(\varphi)$ et D_2 par $\frac{1}{\lambda_2}T_2(\varphi)$,

$$\frac{1}{\lambda_2}T_1(\lambda_2)T_2(\varphi)-\frac{1}{\lambda_1}T_2(\lambda_1)T_1(\varphi)+\lambda_2\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}T_1\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)-\frac{\partial\varphi}{\partial y}T_1\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)\right]-\lambda_1\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}T_2\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)-\frac{\partial\varphi}{\partial y}T_2\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)\right].$$

Pour trouver h_1 et h_2, il suffit d'écrire

$$h_2=-\frac{1}{\lambda_1}T_2(\lambda_1)+k_2,\qquad h_1=-\frac{1}{\lambda_2}T_1(\lambda_2)+k_1 \tag{2}$$

et alors l'expression

$$\left[\lambda_2T_1\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)-\lambda_1T_2\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\right]\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\left[\lambda_2T_1\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)-\lambda_1T_2\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)\right]\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

sera égale à

$$k_2\lambda_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)-k_1\lambda_2\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$$

quelle que soit la fonction φ si l'on a

$$\left\{\begin{aligned}&\lambda_2T_1\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)-\lambda_1T_2\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)=k_2\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}-k_1\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y},\\&\lambda_2T_1\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)-\lambda_1T_2\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)=k_2\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}-k_1\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x}\end{aligned}\right. \tag{3}$$

et ces deux équations déterminent k_1, k_2 puisque le déterminant $\frac{D(f_1,\ f_2)}{D(x,\ y)}$ est supposé non nul.

Supposons que l'on effectue une transformation analytique biunivoque $(x,\ y;\ X,\ Y)$ et appelons $T'_1(\varphi)$, $T'_2(\varphi)$ les nouvelles valeurs de $T_1(\varphi)$, $T_2(\varphi)$; nous savons que l'on a

$$T'_1(\varphi)\equiv\Delta T_1(\varphi),\qquad T'_2(\varphi)\equiv\Delta T_2(\varphi),$$

où Δ pourra, comme nous l'avons vu, être une fonction arbitraire. On peut aussi supposer que l'on a conservé les variables x, y et simplement multiplié T_i par Δ.

$$\begin{aligned}T'_1(T'_2)&=\Delta T_1[\Delta T_2]=\Delta[\Delta T_1(T_2)+T_2T_1(\Delta)],\\T'_1(T'_2)-T'_2(T'_1)&=\Delta^2[T_1(T_2)-T_2(T_1)]+[\Delta T_1(\Delta)]T_2-[\Delta T_2(\Delta)]T_1\\&=\Delta^2(h_2T_1-h_1T_2)+[\Delta T_1(\Delta)]T_2-[\Delta T_2(\Delta)]T_1\\&=\Delta(h_2T'_1-h_1T'_2)+T'_2T_1(\Delta)-T'_1T_2(\Delta).\end{aligned}$$

Par suite, si l'on pose

$$T'_1(T'_2)-T'_2(T'_1)\equiv h'_2T'_1-h'_1T'_2,$$

on a

$$h'_2=\Delta h_2-T_2(\Delta),\qquad h'_1=\Delta h_1-T_1(\Delta). \tag{4}$$

3° Supposons que F_1, F_2, F_3 soient transformables simultanément en trois faisceaux de droites parallèles ; on peut choisir les variables de telle sorte que

$$F_1\equiv X,\qquad F_2\equiv Y,\qquad F_3\equiv-(X+Y)\,;$$

avec les variables X, Y on a donc

$$T_1(\varphi)=-\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial Y},\qquad T_2(\varphi)=\lambda_2\frac{\partial\varphi}{\partial X},\qquad T_3=\lambda_3\left(\frac{\partial\varphi}{\partial Y}-\frac{\partial\varphi}{\partial X}\right)$$

et l'on doit avoir $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$; désignons par λ la valeur commune de λ_1, λ_2, λ_3 :

$$T_1\left(\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial X}\right)=-\lambda\left(\frac{\partial\lambda}{\partial Y}\frac{\partial\varphi}{\partial X}+\lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial X\partial Y}\right),$$

$$T_2\left(-\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial Y}\right)=-\lambda\left(\frac{\partial\lambda}{\partial X}\frac{\partial\varphi}{\partial Y}+\lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial X\partial Y}\right),$$

$$T_1(T_2)-T_2(T_1)=\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial X}\frac{\partial\varphi}{\partial Y}-\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial Y}\frac{\partial\varphi}{\partial X}=-\frac{\partial\lambda}{\partial X}T_1-\frac{\partial\lambda}{\partial Y}T_2,$$

de sorte que $$h_2 = -\frac{\partial \lambda}{\partial X}, \qquad h_1 = \frac{\partial \lambda}{\partial Y};$$

pour avoir $h_1 = h_2 = 0$, il suffit de prendre λ constant.

Réciproquement, supposons que l'on puisse avoir, avec un choix convenable de variables (X, Y) et de multiplicateurs, les relations

$$(5) \qquad \begin{cases} T_1(\varphi) + T_2(\varphi) + T_3(\varphi) \equiv 0, \\ T_1(T_2) - T_2(T_1) \equiv 0. \end{cases}$$

Nous avons expliqué qu'il est inutile de changer de variables : il suffit de multiplier $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ par un même facteur Δ en conservant les variables (x, y) primitives : on a, en effet,

$$T_1(T_2) - T_2(T_1) \equiv h_2 T_1 - h_1 T_2,$$

où $h_2(x, y)$, $h_1(x, y)$ sont des fonctions connues de x, y ; en remplaçant $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ par $\lambda_1' = \lambda_1 \Delta$, $\lambda_2' = \lambda_2 \Delta$, $\lambda_3' = \lambda_3 \Delta$, T_1, T_2, T_3 deviennent des fonctions T_1', T_2', T_3' et les nouvelles expressions h_1', h_2' sont données par les relations

$$h_2' = \Delta h_2 - T_2(\Delta), \qquad h_1' = \Delta h_1 - T_1(\Delta).$$

L'hypothèse est donc qu'il existe une fonction Δ vérifiant les deux équations

$$(6) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial x} \log \Delta\right) \dfrac{\partial f_1}{\partial y} - \left(\dfrac{\partial}{\partial y} \log \Delta\right) \dfrac{\partial f_1}{\partial x} - h_1 = 0, \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial x} \log \Delta\right) \dfrac{\partial f_2}{\partial y} - \left(\dfrac{\partial}{\partial y} \log \Delta\right) \dfrac{\partial f_2}{\partial x} - h_2 = 0. \end{cases}$$

On a ainsi Δ à un facteur près de proportionnalité. Remplaçons donc $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ par $\lambda_1' = \lambda_1 \Delta$, $\lambda_2' = \lambda_2 \Delta$, $\lambda_3' = \lambda_3 \Delta$ et pour ne pas multiplier les notations, supprimons les accents. Les relations (5) sont donc supposées vérifiées désormais avec les variables (x, y) et des multiplicateurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ qui ont été judicieusement choisis. Nous effectuons alors le changement de variables

$$X = f_1(x, y), \qquad Y = f_2(x, y).$$

Nous savons que, si nous écrivons, pour définir avec les variables X, Y les fonctions $T_1'(\varphi), T_2'(\varphi), T_3'(\varphi)$ au moyen des multiplicateurs L_1, L_2, L_3 définis par

$$(7) \qquad L_1 = \lambda_1 \frac{D(X, Y)}{D(x, y)}, \qquad L_2 = \lambda_2 \frac{D(X, Y)}{D(x, y)}, \qquad L_3 = \lambda_3 \frac{D(X, Y)}{D(x, y)},$$

on aura

$$(8) \qquad T_1'(\varphi) = \lambda_1 \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} \cdot \frac{D(\varphi, f_1)}{D(X, Y)} = \lambda_1 \frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)} = T_1(\varphi).$$

Il est clair alors que $T_1'[T_2'(\varphi)] = T_1'[T_2(\varphi)] = T_1[T_2(\varphi)]$ et alors $T_1[T_2'(\varphi)] - T_2'[T_1'(\varphi)]$ est nulle encore ; il sera inutile de conserver l'accent dans $T_i'(\varphi)$. Nous avons, puisque $f_1 = X$, $f_2 = Y$, en usant des variables X, Y,

$$(9) \qquad T_1(\varphi) = L_1 \frac{D(\varphi, X)}{D(X, Y)} = -L_1 \frac{\partial \varphi}{\partial Y}, \qquad T_2(\varphi) = L_2 \frac{D(\varphi, Y)}{D(X, Y)} = L_2 \frac{\partial \varphi}{\partial X}, \qquad T_3 = L_3 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X} \frac{\partial f_3}{\partial Y} - \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \frac{\partial f_3}{\partial X}\right).$$

On a

$$(10) \qquad L_1 + L_3 \frac{\partial f_3}{\partial X} = 0, \qquad L_2 + L_3 \frac{\partial f_3}{\partial Y} = 0,$$

$$(11) \qquad T_1(T_2) \equiv -L_1 \left[\frac{\partial L_2}{\partial Y} \frac{\partial \varphi}{\partial X} + L_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X \partial Y}\right], \qquad T_2(T_1) \equiv -L_2 \left[\frac{\partial L_1}{\partial X} \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + L_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X \partial Y}\right].$$

La différence $T_1(T_2) - T_2(T_1)$ étant identiquement nulle, on a

$$(12) \qquad \frac{\partial L_1}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial L_2}{\partial Y} = 0, \quad \text{ou} \quad L_3 \frac{\partial f_3}{\partial X} = \eta, \quad L_3 \frac{\partial f_3}{\partial Y} = \xi,$$

en appelant ξ une fonction de X seule, η une fonction de Y seule.

Par division on a $\xi \frac{\partial f_3}{\partial X} = \eta \frac{\partial f_3}{\partial Y}$, de sorte que si l'on pose $dX_1 = \frac{dX}{\xi}$, $dY_1 = \frac{dY}{\eta}$ on peut éc $\frac{\partial f_3}{\partial X_1} = \frac{\partial f_3}{\partial Y_1}$ et par suite f_3 est une fonction de $(X_1 + Y_1)$. Cela prouve que les trois familles peuvent définies par les équations

$$X_1 = \text{constante}, \quad Y_1 = \text{constante}, \quad X_1 + Y_1 = \text{constante}$$

et la condition de fermeture hexagonale est satisfaite.

Nous avons vu que nous pouvons, au cours de changements successifs de variables indépendantes, n arranger pour que les fonctions $T_1(\varphi)$, $T_2(\varphi)$, $T_3(\varphi)$ restent inaltérées ; or avec les variables X_1, Y_1 e fonctions

$$f_1 \equiv X_1 \qquad f_2 \equiv Y_1 \qquad f_3 \equiv -(X_1 + Y_1)$$

si l'on définit $T_1(\varphi)$, $T_2(\varphi)$, $T_3(\varphi)$ par

$$(13) \qquad \begin{cases} T_1(\varphi) = \dfrac{D(\varphi,\ X_1)}{D(X_1,\ Y_1)} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial Y_1} \qquad T_2(\varphi) = \dfrac{D(\varphi,\ Y_1)}{D(X_1,\ Y_1)} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial X_1}, \\ T_3(\varphi) = \dfrac{D(\varphi,\ -X_1 - Y_1)}{D(X_1,\ Y_1)} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial Y_1} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial X_1}, \end{cases}$$

on a $T_1(T_2) - T_2(T_1) = 0$ puis

$$T_1(X_1) = 0, \qquad T_2(X_1) = 1 \qquad \text{et} \qquad T_1(Y_1) = -1, \qquad T_2(Y_1) = 0,$$

de sorte que les fonctions ψ et ω de l'énoncé sont $-Y_1$ et X_1. On sait donc, *a priori*, que s'il ex des multiplicateurs λ_1, λ_2, λ_3 à choisir convenablement tels que l'expression $T_1[T_2(\varphi)] - T_2[T_1(\varphi)]$ identiquement nulle, on pourra trouver deux fonctions ψ et ω satisfaisant aux conditions

$$T_1(\psi) = 1, \qquad T_2(\psi) = 0 \qquad \text{et} \qquad T_1(\omega) = 0, \qquad T_2(\omega) = 1.$$

Ce calcul de ψ et ω peut être fait *a priori*, car s'il s'agit de ψ, on a $\psi = F(f_2)$ en vertu de $T_2(\psi) =$ puis

$$\lambda_1 \frac{D(\psi,\ f_1)}{D(x,\ y)} = 1, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{dF}{df_2} \cdot \lambda_1 \cdot \frac{D(f_2,\ f_1)}{D(x,\ y)} = 1.$$

La condition de compatibilité, sûrement réalisée, est que $\lambda_1 \frac{D(f_2,\ f_1)}{D(x,\ y)}$ soit une fonction de f_2 ; on a même pour ω,

$$\omega = G(f_1), \qquad \text{puis} \qquad \lambda_2 \frac{D(G,\ f_2)}{D(x,\ y)} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dG}{df_1} \cdot \lambda_2 \cdot \frac{D(f_1,\ f_2)}{D(x,\ y)} = 1\,;$$

il en résulte que l'expression $\lambda_2 \frac{D(f_1,\ f_2)}{D(x,\ y)}$ est une certaine fonction de f_1 : cette condition est sûrem réalisée, elle aussi ; les fonctions $G(f_1)$, $F(f_2)$ s'obtiennent par une quadrature.

Nous devons remarquer que nous avons fait jouer aux indices 1, 2 un rôle particulier ; les conditi

La différence $T_1(T_2) - T_2(T_1)$ étant identiquement nulle, on a

$$(12) \qquad \frac{\partial L_1}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial L_2}{\partial Y} = 0, \qquad \text{ou} \qquad L_3 \frac{\partial f_3}{\partial X} = \eta, \quad L_3 \frac{\partial f_3}{\partial Y} = \xi,$$

en appelant ξ une fonction de X seule, η une fonction de Y seule.

Par division on a $\xi \frac{\partial f_3}{\partial X} = \eta \frac{\partial f_3}{\partial Y}$, de sorte que si l'on pose $dX_1 = \frac{dX}{\xi}$, $dY_1 = \frac{dY}{\eta}$ on peut éc $\frac{\partial f_3}{\partial X_1} = \frac{\partial f_3}{\partial Y_1}$ et par suite f_3 est une fonction de $(X_1 + Y_1)$. Cela prouve que les trois familles peuvent définies par les équations

$$X_1 = \text{constante}, \qquad Y_1 = \text{constante}, \qquad X_1 + Y_1 = \text{constante}$$

et la condition de fermeture hexagonale est satisfaite.

Nous avons vu que nous pouvons, au cours de changements successifs de variables indépendantes, n arranger pour que les fonctions $T_1(\varphi)$, $T_2(\varphi)$, $T_3(\varphi)$ restent inaltérées ; or avec les variables X_1, Y_1 et fonctions

$$f_1 \equiv X_1 \qquad f_2 \equiv Y_1 \qquad f_3 \equiv -(X_1 + Y_1)$$

si l'on définit $T_1(\varphi)$, $T_2(\varphi)$, $T_3(\varphi)$ par

$$(13) \qquad \begin{cases} T_1(\varphi) = \dfrac{D(\varphi,\ X_1)}{D(X_1,\ Y_1)} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial Y_1} \qquad T_2(\varphi) = \dfrac{D(\varphi,\ Y_1)}{D(X_1,\ Y_1)} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial X_1}, \\ T_3(\varphi) = \dfrac{D(\varphi,\ -X_1 - Y_1)}{D(X_1,\ Y_1)} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial Y_1} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial X_1}, \end{cases}$$

on a $T_1(T_2) - T_2(T_1) = 0$ puis

$$T_1(X_1) = 0, \qquad T_2(X_1) = 1 \qquad \text{et} \qquad T_1(Y_1) = -1, \qquad T_2(Y_1) = 0,$$

de sorte que les fonctions ψ et ω de l'énoncé sont $-Y_1$ et X_1. On sait donc, *a priori*, que s'il ex des multiplicateurs λ_1, λ_2, λ_3 à choisir convenablement tels que l'expression $T_1[T_2(\varphi)] - T_2[T_1(\varphi)]$ identiquement nulle, on pourra trouver deux fonctions ψ et ω satisfaisant aux conditions

$$T_1(\psi) = 1, \qquad T_2(\psi) = 0 \qquad \text{et} \qquad T_1(\omega) = 0, \qquad T_2(\omega) = 1.$$

Ce calcul de ψ et ω peut être fait *a priori*, car s'il s'agit de ψ, on a $\psi = F(f_2)$ en vertu de $T_2(\psi) =$ puis

$$\lambda_1 \frac{D(\psi,\ f_1)}{D(x,\ y)} = 1, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{dF}{df_2} \cdot \lambda_1 \cdot \frac{D(f_2,\ f_1)}{D(x,\ y)} = 1.$$

La condition de compatibilité, sûrement réalisée, est que $\lambda_1 \frac{D(f_2,\ f_1)}{D(x,\ y)}$ soit une fonction de f_2 ; on a même pour ω,

$$\omega = G(f_1), \qquad \text{puis} \qquad \lambda_2 \frac{D(G,\ f_2)}{D(x,\ y)} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dG}{df_1} \cdot \lambda_2 \cdot \frac{D(f_1,\ f_2)}{D(x,\ y)} = 1\,;$$

il en résulte que l'expression $\lambda_2 \frac{D(f_1,\ f_2)}{D(x,\ y)}$ est une certaine fonction de f_1 : cette condition est sûrem réalisée, elle aussi ; les fonctions $G(f_1)$, $F(f_2)$ s'obtiennent par une quadrature.

Nous devons remarquer que nous avons fait jouer aux indices 1, 2 un rôle particulier ; les conditio trouvées doivent pouvoir s'obtenir aussi en faisant jouer aux indices 2, 3 ou 3, 1 le même rôle, ce qui revient à dire que les équations aux différentielles totales

$$(14)\qquad \begin{cases} T_1(u)=1, \\ T_2(u)=0, \\ T_3(u)=-1, \end{cases} \qquad \begin{cases} T_1(v)=0, \\ T_2(v)=1, \\ T_3(v)=-1, \end{cases} \qquad \begin{cases} T_1(w)=0, \\ T_2(w)=-1, \\ T_3(w)=1, \end{cases}$$

qui dans chaque groupe se réduisent à deux, forment trois systèmes complètement intégrables. Comme on a pour λ_1, λ_2, λ_3 les valeurs

$$\lambda_1=\Delta D_{23}, \qquad \lambda_2=\Delta D_{31}, \qquad \lambda_3=\Delta D_{12},$$

où $D_{ij}=\dfrac{D(f_i,\ f_j)}{D(x,\ y)}$ et où Δ est une fonction choisie de sorte que $T_1(T_2)-T_2(T_1)$ soit identiquement nulle, on voit que $\lambda_1 D_{12}$ est égale à $\Delta D_{12}D_{23}$, où les indices 1 et 3 jouent le même rôle; on a donc trois conditions seulement (qui d'ailleurs se réduisent à deux, puisqu'il suffit d'avoir u et v):

$$(15)\qquad \Delta D_{12}D_{31}=\Phi_1, \qquad \Delta D_{23}D_{12}=\Phi_2, \qquad \Delta D_{31}D_{23}=\Phi_3,$$

où Φ_1 est une fonction de $f_1(x,\ y)$, Φ_2 de $f_2(x,\ y)$, Φ_3 de $f_3(x,\ y)$. Ces deux conditions sont d'ailleurs équivalentes à $h_1=0$, $h_2=0$.

Il n'y a aucune peine à appliquer cela à l'exemple proposé:

$$(16)\qquad f_1\equiv x, \qquad f_2\equiv y, \qquad f_3\equiv\frac{e^x Ly}{e^x+Ly};$$

on a sans peine

$$(17)\qquad \begin{cases} T_1\equiv-\lambda_1\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad T_2\equiv\lambda_2\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad T_3\equiv\dfrac{\lambda_3 e^x}{(e^x+Ly)^2}\left[\dfrac{e^x}{y}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}-(Ly)^2\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right], \\ \lambda_1+\dfrac{e^x(Ly)^2}{(e^x+Ly)^2}\lambda_3=0, \qquad \lambda_2+\dfrac{e^{2x}}{y(e^x+Ly)^2}\lambda_3=0, \end{cases}$$

$$(18)\qquad T_1(T_2)-T_2(T_1)\equiv-\lambda_1\frac{\partial\lambda_2}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\lambda_2\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Pour obtenir $\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial\lambda_2}{\partial y}=0$, il suffit de prendre

$$\lambda_1=y(Ly)^2, \qquad \lambda_2=e^x, \qquad \lambda_3=-ye^{-x}(e^x+Ly)^2.$$

La fonction $\psi(y)$ est telle que $y(Ly)^2\dfrac{d\psi}{dy}=-1$, d'où $\psi=\dfrac{1}{Ly}$; la fonction $\omega(x)$ est telle que

$$e^x\frac{d\omega}{dx}=1, \qquad \text{d'où} \qquad \omega=-e^{-x};$$

on a donc

$$f_3=\frac{\dfrac{-1}{\omega\psi}}{\dfrac{1}{\psi}-\dfrac{1}{\omega}}=\frac{1}{\psi-\omega};$$

les équations des trois familles peuvent donc s'écrire

$$e^{-x}=a_1, \qquad \frac{1}{Ly}=a_2, \qquad e^{-x}-\frac{1}{Ly}=a_3,$$

ce qui met en évidence la propriété de fermeture hexagonale; il n'y a aucune peine à vérifier les relations (15).