

# Géométrie sur une strophoïde

(Zip 3 T<sub>E</sub>X strophq.tex) version 16 05 05 21h20

## Géométrie sur une strophoïde

Le but de cet article est de montrer qu'on peut avec des calculs très réduits obtenir de très belles propriétés géométriques, qu'il serait difficile d'obtenir par des arguments géométriques (alignement, cocycliques, bitangence). Le fait de se limiter à une courbe algébrique de degré 3, une strophoïde, ne réduit pas le principe de la méthode, car on peut démontrer qu'en fait ceci est généralisable, étant une conséquence du théorème intégral d'Abel appliqué aux courbes algébriques [1,2,3].

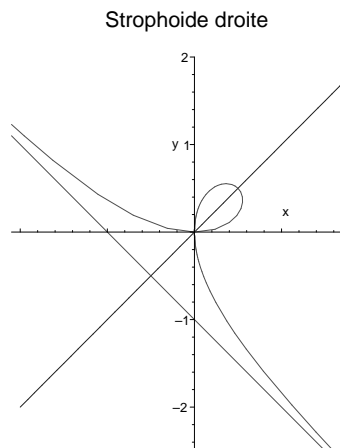
**La courbe : la strophoïde** On considère la courbe algébrique de degré 3, la cubique (C) d'équation dans un repère orthonormé :  $(x + y)(x^2 + y^2) - 2axy = 0$   $a$  étant un paramètre strictement positif. La symétrie du premier membre en  $x, y$  montre qu'elle admet la première bissectrice comme axe de symétrie. Cette symétrie correspond d'ailleurs au changement de paramètre  $t$  en  $\frac{1}{t}$ , ce qui permet de limiter l'étude à  $t \in ]-1, 1]$ , et de compléter la courbe en effectuant cette symétrie. Les termes de plus bas degré étant de degré 2, Taylor nous prouve que l'origine est un point double de cette courbe, et que les tangentes  $x = 0, y = 0$  y sont orthogonales. Le facteur  $(x^2 + y^2)$  dans le terme de plus haut degré, caractérise les cubiques circulaires. Pour ces raisons (cubique circulaire à tangente à l'origine orthogonales) la courbe (C) considérée est ce qu'on appelle une strophoïde droite (droite pour signaler que les tangentes en  $O$  sont orthogonales).

Une droite  $(D_t)$  quelconque, passant par l'origine,  $y = tx$  rencontre déjà (C) en deux points à l'origine : par décompte du degré il ne reste qu'un point. L'équation aux abscisses des rencontre de (C) et de  $(D_t)$  est  $x^3(1+t)(1+t^2) - 2atx^2 = 0$ , comme prévu on a la solution double  $x = 0$  et il reste  $x = \frac{2at}{(1+t)(1+t^2)}$  et  $y = tx = \frac{2at^2}{(1+t)(1+t^2)}$ . L'origine, point double correspond aux spécialisations  $t = 0, t = \infty$  et comme  $\frac{y-0}{x-0} = t$  les tangentes y sont  $Ox$  et  $Oy$ , attendue à cause de la symétrie par rapport à la première bissectrice.

(C) est admet une représentation paramétrique rationnelle (comme toute cubique ayant un point double) : on dit (c'est une définition) qu'elle est unicursale. Le point double correspond aux paramètres  $t = 0$  et  $t = \infty$ .

Une étude très simple, laissée au soin du lecteur avisé, donne sa forme et le fait qu'elle admet comme asymptote  $y + x + a = 0$ , qui se trouve en dessous de la courbe. Un graphe Maple confirme ce calcul. Nous le reproduisons ci-dessous.

L'hypothèse que le premier problème de ce type de géométrie, soit celui de Normale 1930 (corrigé dans la RMS de janvier 1931) demande à être confirmée.



## Les propriétés d'alignement

Cherchons les paramètres d'intersection de  $(C)$  avec une droite quelconque  $(D)$  d'équation  $ux + vy + h = 0$  ; ils vérifient  $2atu + 2at^2v + h(1 + t^2)(1 + t) = 0$ .

Soit en ordonnant en  $t$  :  $ht^3 + t^2(h + 2av) + t(h + 2au) + h = 0$ . Si  $h \neq 0$  (c'est à dire  $(D)$  ne passe pas par l'origine) cette équation est de degré 3 et a trois racines  $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{C}$ , et les relations entre coefficients et racines sont  $\sigma_1 = t_1 + t_2 + t_3 = -\frac{2av+h}{h}$ ,  $\sigma_2 = t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = \frac{2au+h}{h}$ ,  $\sigma_3 = t_1t_2t_3 = -\frac{h}{h} = -1$ .

a) **Condition nécessaire d'alignement**

On remarque que la relation  $t_1t_2t_3 = -1$  est indépendante de la droite. C'est donc une condition nécessaire d'alignement des trois points  $M_i(t_i)$ . Lorsque la droite passe par l'origine ( $h = 0$  une racine de l'équation en  $t$  est rejetée à l'infini), celle ci est comptée deux fois et est alignée avec n'importe quel troisième point ; Conventionnellement et par abus (forme indéterminée  $0 \times \infty$ ) tolérable ici, on convient pour expliquer ce fait que  $0 \times \infty \times t = -1 \forall t \in \mathbb{R}$ .

b) **Condition suffisante d'alignement**

Soient trois points  $M_i(t_i)$  dont les paramètres vérifient  $t_1t_2t_3 = -1$ . Sont-ils alignés ? appelons  $M'_3(t'_3)$  le troisième point de rencontre de la droite  $M_1M_2$  (si  $M_1 = M_2$  cette droite est par passage à la limite la tangente en  $M_1$  à la strophoïde).  $M_1M_2M'_3$  étant alignés vérifient la condition nécessaire d'alignement  $t_1t_2t'_3 = -1$  et par différence  $t_1t_2(t_3 - t'_3) = 0$  ; le cas où  $t_1$  ou  $t_2$  seraient nuls ne présentant aucun intérêt puisque donnant la situation d'indétermination, on en déduit  $t_3 = t'_3$  par conséquent  $M_3$  est bien alignés avec  $M_1M_2$  et avec la convention faite plus haut on a bien la condition nécessaire et suffisante d'alignement de trois points de la strophoïde :  $t_1t_2t_3 = -1$  (On comparera sans peine cette méthode avec celle qui consisterait à écrire que le déterminant des composantes des deux vecteurs  $\vec{M_1M_2}, \vec{M_1M_3}$ , est nul....)

c) **Équation de la droite d'alignement de trois points donnés**

Bien sûr, une méthode lourde, besogneuse (par tout non lecteur de Quadrature) serait d'écrire comme habituellement l'équation de la droite  $M_1M_2$  sous la forme du déterminant  $\begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$  en remplaçant  $x_i$  et  $y_i$  respectivement par  $x(t_i)$  et  $y(t_i)$  déduits de la représentation paramétrique obtenue plus haut, mais nous allons procéder de manière beaucoup plus astucieuse : les relations entre coefficients et racines de l'équation aux paramètres des points de rencontre de la strophoïde et de la droite  $ux + vy + h = 0$  nous ont donné  $\sigma_1 = t_1 + t_2 + t_3 = -\frac{2av+h}{h}$ ,  $\sigma_2 = t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = \frac{2au+h}{h}$ ,  $\sigma_3 = t_1t_2t_3 = -\frac{h}{h} = -1$ , soit  $\sigma_1 = -1 - 2a\frac{v}{h}$ ,  $\sigma_2 = 1 + 2a\frac{u}{h}$ , ou encore  $\frac{u}{h} = \frac{\sigma_2 - 1}{2a}$ ,  $\frac{v}{h} = \frac{-\sigma_1 - 1}{2a}$  et l'équation de la droite  $M_1M_2M_3$  lorsqu'on sait qu'ils sont alignés est  $(1 - \sigma_2)\mathbf{x} + (\sigma_1 + 1)\mathbf{y} - 2\mathbf{a} = \mathbf{0}$

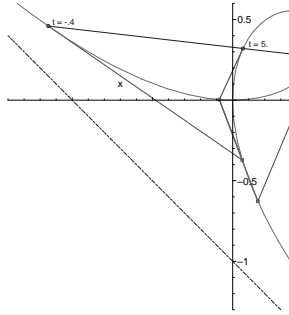
d) **Équation de la la tangente au point  $t$**

Une méthode lourde et besogneuse, utilisée par tout non lecteur de Quadrature serait d'écrire l'équation de la tangente au point de paramètre  $t$  sous la forme :  $\begin{vmatrix} x - x(t) & x'(t) \\ y - y(t) & y'(t) \end{vmatrix} = 0$  et de remplacer  $x(t), x'(t), y(t), y'(t)$  en utilisant la représentation paramétrique...., mais un lecteur de Quadrature, lui ! remarque que la tangente au point de paramètre  $t$  est la droite d'alignement des trois points  $t, t, t' = -\frac{1}{t^2}$ , et comme  $\sigma_1 = t + t + t' = 2t - \frac{1}{t^2}$  et  $\sigma_2 = t^2 + tt' + t't = t^2 - \frac{2}{t}$  l'équation de la tangente cherchée est  $(1 - t^2 + \frac{2}{t})\mathbf{x} + (1 + 2t - \frac{1}{t^2})\mathbf{y} - 2\mathbf{a} = \mathbf{0}$ .

Par exemple le point à l'infini réel étant de paramètre  $t = -1$  (voir le dénominateur de la représentation paramétrique), l'asymptote réelle de la strophoïde a comme équation  $2x + 2y - 2a = 0$  soit  $\mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{a} = \mathbf{0}$ .

e) **Les tangentes en trois points alignés recoupent la courbe en trois points alignés**

Soit trois points alignés de  $(C)$  (suivant l'isomorphisme habituel on utilise soit leur nom  $M_i$  soit leur paramètre  $t_i$  pour les désigner). La tangente en  $t_i$  recoupe la courbe en  $t'_i$  tel que  $t_i^2t'_i = -1$ , multipliant ces trois relations pour  $i = 1..3$  on a  $(t_1t_2t_3)^2t'_1t'_2t'_3 = (-1)^3 = -1$  les trois points  $t'_i$  sont eux mêmes alignés.



f) **Points d'inflexion** D'après le cours sur les arcs paramétrés de classe  $C^k$  où  $k \geq 3$  un point d'inflexion est un point de rencontre triple :  $ttt = t^3 = -1$ . Les seuls points d'inflexion sont  $t = -1, -j, -j^2$  ; seul le point réel nous intéresse, il se trouve que le point d'inflexion est ici le point à l'infini, mais avec d'autres courbes que celle utilisée ici on pourrait en déduire la tangente d'inflexion. De même on peut rechercher le point d'intersection  $t$  de l'asymptote avec la courbe : l'asymptote est tangente en  $t' = -1$  (point à l'infini) ; la condition d'alignement donne  $t'tt = -1$  donc  $t = -1$ , ce qui était prévisible (contact d'ordre 3 car l'asymptote est ici tangente d'inflexion) mais dans d'autres cas aurait pu donner un point à distance finie.

On peut même rechercher les points  $t$  de la courbe où la tangente est parallèle à l'asymptote :  $t, t$  et  $-1$  (le point à l'infini dans la direction de l'asymptote) sont alignés donc  $t^2(-1) = -1$  soit  $t^2 = 1$  ce qui donne  $t = -1$  (on s'y attendait, le point à l'infini a bien sa tangente parallèle à l'asymptote, puisqu'elle est l'asymptote elle même, et  $t = +1$  qui est le point  $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$  sur l'axe de symétrie. (voir la figure)

g) **Condition nécessaire et suffisante de cocyclicité de quatre points de la courbe**

Soit un cercle d'équation  $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$ . En utilisant les coordonnées homogènes  $(X, Y, T)$  (qui permettent de traiter le point à l'infini comme un point ordinaire) définies par  $x = \frac{X}{T}, y = \frac{Y}{T}$ , on voit que tout cercle et la strophoïde (rappelons le cubique "circulaire") contiennent les points cycliques  $(X = 1, Y = \pm i, T = 0)$ . Comme d'après Bezout la cubique (courbe de degré 3) et tout cercle (cas particulier de conique, courbe de degré 2) se rencontrent en  $3 \times 2 = 6$  points dont deux sont déjà connus, il reste quatre points à distance finie.

L'équation aux paramètres des points de rencontre de la courbe et du cercle est  $(\frac{2at}{(1+t)(1+t^2)})^2 + (\frac{2at^2}{(1+t)(1+t^2)})^2 - 2\alpha \frac{2at}{(1+t)(1+t^2)} - 2\beta \frac{2at^2}{(1+t)(1+t^2)} + \gamma = 0$ , soit  $\frac{4a^2t^2(1+t^2)}{(1+t)^2(1+t^2)^2} - 2\alpha \frac{2at}{(1+t)(1+t^2)} - 2\beta \frac{2at^2}{(1+t)(1+t^2)} + \gamma = 0$ .

La "simplification" par  $(1+t^2)$  dans le premier terme, camoufle en fait les points communs cycliques, et il reste  $4a^2t^2 - 4a\alpha t(1+t) - 4a\beta t^2(1+t) + \gamma(1+t)^2(1+t^2) = 0$ .

Nous développons et ordonnons :  $\gamma(t^4 + 2t^3 + 2t^2 + 2t + 1) - 4a\alpha(t^2 + t) - 4a\beta(t^3 + t^2) + 4a^2t^2 = 0$

Ou  $\gamma t^4 + t^3(2\gamma - 4a\beta) + t^2(2\gamma - 4a\alpha - 4a\beta + 4a^2) + t(2\gamma - 4a\alpha) + \gamma = 0$ .

Cette équation est du quatrième degré lorsque  $\gamma \neq 0$  ( $\gamma = 0$  correspond au cercle contenant le point double de  $(C)$ ), et les relations entre coefficients et racines d'une équation algébrique, donnent :  $\sigma_1 = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = -2 + 4a\frac{\beta}{\gamma}$ ,  $\sigma_2 = t_1t_2 + t_1t_3 + t_1t_4 + t_2t_3 + t_2t_4 + t_3t_4 = 2 - 4a\frac{\alpha}{\gamma} - 4a\frac{\beta}{\gamma} + 4a^2\frac{1}{\gamma}$ ,  $\sigma_3 = t_2t_3t_4 + t_1t_3t_4 + t_1t_2t_4 + t_1t_2t_3 = -2 + 4a\frac{\alpha}{\gamma}$ ,  $\sigma_4 = t_1t_2t_3t_4 = 1$ .

On remarque que cette dernière condition est indépendante du cercle choisi (c'est à dire de ses coefficients  $\alpha, \beta, \gamma$ ) elle est donc une condition nécessaire de cocyclicité de quatre points de paramètres  $t_i$ . Comme plus haut pour l'alignement, si  $\gamma = 0$ , le cercle passe par le point double et l'équation se réduit au degré 3 si le cercle n'est pas centré sur  $Ox$  (sinon au degré 2) il reste seulement au maximum 3 points différents, qui sont forcément cocycliques (éventuellement avec dégénérescence du cercle s'ils sont alignés). Dans ces cas la forme de la relation devient  $0 \times \infty t_3t_4$  à qui puisque indéterminée nous attribuons, par convention la valeur 1.

Cette condition nécessaire  $t_1t_2t_3t_4 = 1$  pour quatre points de la courbe strophoïde est moyennant cette convention également suffisante. En effet soit quatre point de  $(C)$  la vérifiant, il existe au moins trois d'entre eux qui ne sont pas alignés car sinon  $(t_1t_2t_3t_4)^3 = (t_1t_2t_3)(t_2t_3t_4)(t_3t_4t_1)(t_1t_2t_4) = (-1)^3$  donc  $t_1t_2t_3t_4 \in \{-1, -j, -j^2\} \neq \{1\}$ .

Le cercle circonscrit au vrai triangle formé par ces trois points  $(t_1, t_2, t_3$  à une permutation près), recoupe la courbe en un quatrième point  $t'_4$  tel que d'après la condition nécessaire de cocyclicité on ait  $t_1t_2t_3t'_4 = 1$ , et par différence avec la relation initiale  $t_1t_2t_3(t_4 - t'_4) = 0$  et par le même raisonnement que pour la condition suffisante d'alignement on a  $t_4 = t'_4$ . La condition nécessaire de cocyclicité est également suffisante.

h) **Équation du cercle circonscrit à quatre points cocycliques de la courbe**.

Bien sûr on pourrait écrire cette équation directement sous la forme d'un déterminant du quatrième ordre

traduisante le cercle circonscrit au triangle formé par trois d'entre eux :

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ remplacer } x_i$$

par  $x(t_i)$  et  $y_i$  par  $y(t_i)$  au moyen de la représentation paramétrique et développer ce déterminant par rapport à la première ligne, mais nous sommes des lecteurs de Quadrature, donc comme Plick et Plock nous "réfléchissons avant d'agir !" :

Avec les relations entre coefficients et racines obtenus plus haut, nous avons le moyen de calculer les coefficients  $\alpha, \beta, \gamma$  qui caractérisent l'équation du cercle circonscrit aux quatre points cocycliques.

$$\begin{cases} \sigma_1 = -2 + 4a\frac{\beta}{\gamma} \\ \sigma_2 = 2 - 4a\frac{\alpha}{\gamma} - 4a\frac{\beta}{\gamma} + 4a^2\frac{1}{\gamma} \\ \sigma_3 = -2 + 4a\frac{\alpha}{\gamma}, \end{cases}$$

Les deux équations extrêmes donnent les rapports  $\frac{\beta}{\gamma}$  et  $\frac{\alpha}{\gamma}$  et reportant dans l'équation centrale on a  $\frac{1}{\gamma}$  d'où  $\gamma$  puis  $\beta$  et  $\alpha$ .

Appliquons cette méthode

$$\begin{cases} \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\sigma_1 + 2}{4a} \\ \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\sigma_3 + 2}{4a} \\ 4a^2\frac{1}{\gamma} = \sigma_2 - 2 + \sigma_3 + 2 + \sigma_1 + 2 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + 2 \end{cases}$$

L'équation du cercle circonscrit en découle :

$$x^2 + y^2 - 2a\frac{\sigma_3 + 2}{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + 2}x - 2a\frac{\sigma_1 + 2}{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + 2}y + \frac{4a^2}{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + 2} = 0$$

Celle des cercles bitangents en  $t_1$  et  $t_2$  s'obtient en faisant  $t_3 = t_1$  et  $t_4 = t_2$ .

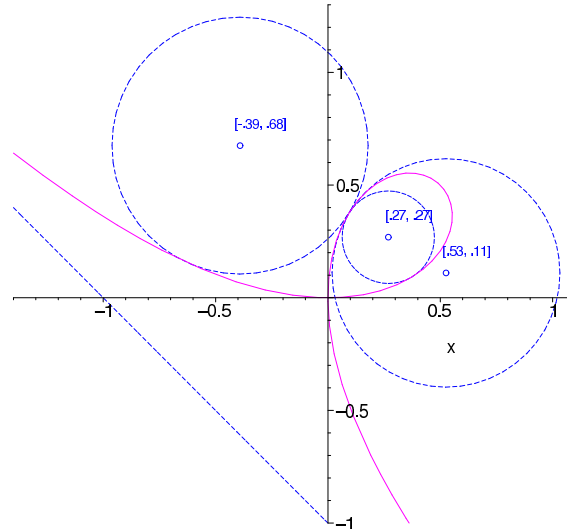
h) **Propriété des cercles bitangents à la strophoïde**

Un cercle bitangent (en  $t, t'$ ) est tel que les quatre points  $t, t, t', t'$  sont cocycliques, donc  $ttt't' = t^2t'^2 = 1$ .

Il y a deux familles  $F_\varepsilon$  de tels cercles  $tt' = \varepsilon$ . La corde de contact  $M(t)M'(t')$  recoupe la courbe en un troisième point donc le paramètre  $-\varepsilon$  vérifie la condition d'alignement  $tt'(-\varepsilon) = -1$ . Autrement la corde  $MM'$  passe par le point fixe  $A(-\varepsilon)$ .

- Pour la famille  $F_1$   $A(-1)$  est le point à l'infini de la courbe ( $C$ ) : la corde joignant les contacts des cercles bitangents reste parallèle à l'asymptote  $x + y = a$ .
- Pour la famille  $F_{-1}$   $A(1)$  est le point  $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$  de la courbe ( $C$ ) : la corde joignant les contacts des cercles bitangents passe par ce point fixe.

La figure ci-dessous représente un cercle de chaque famille et un cercle osculateur.



On peut enfin remarquer que tout cercle osculateur en  $M(t)$  recoupe la strophoïde en  $t'$  tel que  $t^3t' = 1$  (puisque un cercle osculateur en  $M$  a avec la courbe un contact au moins d'ordre 3), donc  $t' = \frac{1}{t^3}$  et enfin que pour que le cercle soit surosculateur en  $M(t)$  il faut que  $t^4 = 1$  donc  $t = 1$  qui correspond au point  $A$  sur l'axe de symétrie ou  $t = -1$  qui donne un cercle dégénéré en la droite asymptote.

On peut même préciser comment varient le centre et le rayon des cercles bi-tangents.

Dans ce cas  $t_1 = t_2 = t$  et  $t_3 = t_4 = t'$  avec  $tt' = \varepsilon$ . Donc

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2t + 2\frac{\varepsilon}{t} = \frac{2(t^2 + \varepsilon)}{t} \\ \sigma_3 = t^2 + 4tt' + t'^2 = t^2 + 4\varepsilon + \frac{1}{t^2} = \frac{t^4 + 4\varepsilon + 1}{t^2} \\ \sigma_3 = \frac{2}{t} + \frac{2}{t'} = \frac{2}{t} + 2\varepsilon t = \varepsilon\sigma_1 \end{cases}$$

Quant au dénominateur  $D = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + 2$  de  $\alpha, \beta, \gamma$  il est dans ce cas  $D = (1 + \varepsilon)\sigma_1 + \frac{t^4 + 4\varepsilon + 1}{t^2} + 2 =$

$$\begin{cases} \frac{(t+1)^4}{t^2} & \text{si } \varepsilon = +1 \\ \frac{(t^2-1)^2}{t^2} & \text{si } \varepsilon = -1 \end{cases}$$

**Si  $\varepsilon = +1$**

$\alpha = \frac{2at(t^2+t+1)}{tD} = \frac{2at(t^2+t+1)}{(t+1)^4} = \beta$  donc le centre des cercles de la famille  $F_1$  est sur la première bissectrice et comme  $\alpha'(t) = -2\frac{(t+1)(t^2+1)}{(t+1)^5} > 0$  sur  $] -1, 1]$   $\alpha$  varie de  $-\infty$  à  $\frac{3a}{8}$  lorsque  $t$  décrit cet intervalle. En outre comme  $R$  étant le rayon du cercle  $R^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma$  alors  $R = \frac{2a|t|\sqrt{t^4+1}}{(t+1)^4}$  il est facile de contrôler (tableau de variation et Maple qu'il décroît de plus l'infini à zéro quand  $t$  croît de  $-1$  à  $0$ , puis croît de zéro à  $\frac{a\sqrt{2}}{8}$  quand  $t$  varie de  $0$  à  $1$ . En tenant compte de  $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , on contrôle ainsi que le point le plus à droite du cercle bitangent associé à  $t = 1$  a pour abscisse  $\frac{3a}{8} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\frac{a}{8} = \frac{a}{2}$ , comme prévu  $t$  et  $t'$  symétriques par rapport à la première bissectrice viennent se confondre en  $1$ . Le sautillerment de l'animation au voisinage de ce point rend difficile cette visualisation.

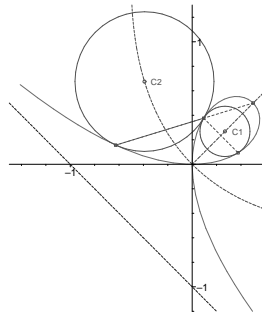
**Si  $\varepsilon = -1$**

Dans ce cas  $\alpha = 2at\frac{-t^2+t+1}{(t^2-1)^2}$  et  $\beta = 2at\frac{t^2+t-1}{(t^2-1)^2}$ , par suite  $\alpha + \beta = 4at^2\frac{1}{(t^2-1)^2}$  et  $\alpha - \beta = -4at\frac{1}{(t^2-1)}$ ; par conséquent  $(\alpha - \beta)^2 = 4a(\alpha + \beta)$  et le lieu des centres de la famille  $F_{-1}$  est une parabole d'axe  $y = x$  et dont il est facile de préciser paramètre et sommet (En prenant comme axes les deux bissectrices  $Y = \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}}$  et  $X = \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}}$ , la parabole a comme équation dans ce repère  $Y^2 = 2a\sqrt{2}X$ , son sommet est donc l'origine, elle est "bien tournée" et son paramètre est  $a\sqrt{2}$ ).

Comme  $\alpha = 2at\frac{-t^2+t+1}{(t^2-1)^2}$  alors  $\alpha'(t) = 2a\frac{(t^2+1)(t^2-2t-1)}{(t^2-1)^3}$  et ainsi  $\alpha$  décroît de plus l'infini à  $-\frac{a}{2}$  lorsque  $t$  varie de  $-1$  à  $1 - \sqrt{2}$  puis croît de  $-\frac{a}{2}$  à plus l'infini quand  $t$  croît de  $1 - \sqrt{2}$  à  $1$ . Cette abscisse correspond à celle du point à tangente verticale ( point tel que  $\alpha'(t) = 0$ ) de la parabole lieu des centres des cercles bitangents de la seconde famille ce qui nous rassure.

Ici un calcul rapide donne  $R^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma = \frac{4a^2t^2(1+t^4)}{(t^2-1)^4}$ . Une étude rapide montre qu'il décroît de plus l'infini à zéro quand  $t$  croît de  $-1$  à  $0$  en passant par la valeur  $R(1 - \sqrt{2}) = \frac{a^2}{4} \frac{18-12\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}$ , puis croît de zéro à plus l'infini pour  $t$  variant de  $0$  à  $1$ .

s cercles bitangents, cordes de bicontact, parabole |



### conclusion

Outre la très belle géométrie, obtenue par des arguments compacts, cette question d'alignement est très en pointe, car en prenant le symétrique de  $t_3$  par rapport à la première bissectrice, on peut définir une loi de groupe sur la cubique par  $t_1 * t_2 = -\frac{1}{t_3}$  et cette loi de groupe est fondamentale pour le nouveau codage dit par fonction elliptique.

### Illustration en Maple

Voici le beau programme, du à Alain Esculier, le concours ou le parallélisme des cordes de contact des cercles bi-tangents.

```

#Cercles bitangents > restart:
> with(plots):
> prlet:=proc(M,dx,dy,nom,couleur)
> pointplot(M,symbol=circle,color=couleur),
> textplot([op(expand(M+[dx,dy])),nom],color=couleur,font=[HELVETICA,10]):
> end:
> ps:= (U,V) -i add(U[i]*V[i],i=1..nops(U)):
> courbe:=display([plot(sin(2*t)/(sin(t)+cos(t)),t=-Pi/4*0.55..5*Pi/4*0.52,
> coords=polar,color=magenta,thickness=2),
> plot(-x-1,x=-1.5..0.6,color=blue,linestyle=3)]):
> cerclebis:=proc(T)
> local r1,r2,X,Y,t,pt1,eq1,eq2,rc,centre1,cerc1,centre2,cerc2,coul;
> rc:=4*(sin(t)+cos(t))/(1-sin(2*t)):
> #parabole (x - y)2 - 4 * (x + y) = 0;
> coul:=COLOR(RGB,0,0.5,0.1):
> X := 2 * t/(1 + t)/(1 + t2); Y := 2 * t2/(1 + t)/(1 + t2);
> pt1:=subs(t=T,[X,Y]):
> eq1:=subs(t=T,ps([x-X,y-Y],diff([X,Y],t)));
> eq2:=subs(t=-1/T,ps([x-X,y-Y],diff([X,Y],t)));
> centre1:=subs(op(solve(eq1,x-y,x,y)),[x,y]);
> centre2:=subs(op(solve(eq1,eq2,x,y)),[x,y]);
> r1:=sqrt(ps(expand(centre1-pt1),expand(centre1-pt1)));
> r2:=sqrt(ps(expand(centre2-pt1),expand(centre2-pt1)));
> cerc1:=expand(centre1+r1*[cos(u),sin(u)]:
> cerc2:=expand(centre2+r2*[cos(u),sin(u)]:
> display([
> plot([op(cerc1),u=0..2*Pi],[op(cerc2),u=0..2*Pi],linestyle=1,color=coul) ,prlet(centre1,0.1,0,"C1",coul)
> #convert(evalf(centre1,2),string)
> ,prlet(centre2,0.1,0,"C2",coul) # convert(evalf(centre2,2),string)
> ,plot([rc,t=Pi/2+0.2..3*Pi/4+0.5],coords=polar,color=red,linestyle=3)
> ,plot([t,t=0..1.5],color=red,linestyle=3,numpoints=30)
> ,plot([subs(t=T,[X,Y]),subs(t=-1/T,[X,Y]),subs(t=1,[X,Y])],color=red,linestyle=2)
> ,pointplot(subs(t=T,[X,Y]),subs(t=-1/T,[X,Y]),subs(t=1,[X,Y]),color=red,symbol=box)];
>
> end:
>
>
> #===== animation =====
> display([display([seq(cerclebis(2+i/3.),i=1..30)],insequence=true),courbe],
view=[-2..1.1,0.2..2],scaling=constrained,tickmarks=[4,4]);
> #===== image fixe =====
> display([cerclebis(4.),courbe],view=[-1.5..0.8,-1.2..1.3],scaling=constrained,tickmarks=[4,4]); plotset(inline):

```

---

### BIBLIOGRAPHIE sur les applications géométriques du théorème d'Abel

- [1] Paul Appel, Édouard Goursat : théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales (Gauthier Villars 1929) p 392-429, 488-522.
- [2] Jean Favard : cours d'analyse de l'école Polytechnique (Gauthier Villars 1960) p 528.
- [3] Georges Valiron : équations fonctionnelles applications (Masson 1950) pages 51-70.
-