L.G.Vidiani 64 rue de l'EUROPE 21121 FONTAINE LÈS DIJON TEL : 03 80 56 65 54
Adresse email Internet : *lg_vidiani@club − internet.fr*

Le problème des nombres gelés

(emtex TEXtrav zip defaillant geleqq.tex) version 2 12 06 18h15

Le problème "des nombres gelés" d'Antoine de Saint-Exupéry

Ce problème a une histoire, car dans un premier temps on l'a cru perdu :

Rappel du problème du Pharaon, de Saint-Exupéry

(Problème dont l'idée lui était venue lors d'un séjour au Caire en 1935, posé par Antoine de Saint-Exupéry, au mess de son escadrille 2/33 à BORGO en CORSE, peu de temps avant sa disparition en plein ciel, (sans doute abattu par la "chasse" allemande (deux Focke-Wulf 190), au large de Bastia), le 31 juillet 1944, aux commandes de son Ligthning P-38 numéro 223, durant sa neuvième mission, pour la région de GRENOBLE, ANNECY). Sa gourmette a été retrouvée le 7 9 98 par le chalut "l'horizon" dans la baie de Cassis.

Problème du PHARAON

Des égyptologues découvrent, sur le site du plateau de GIZA, à une dizaine de kilomètres du CAIRE, N tas de pierres, de forme cubique. Chaque tas contient exactement 348 960 150 cubes.

On sait que ces cubes de pierres étaient destinés à construire une stèle parallélépipèdique rectangle, lieu de sacrifices pour honorer le Dieu RÂ, dont la hauteur devait être égale, à la diagonale de la base. Pour des raisons Mystiques, le nombre N était PREMIER. Quelles sont les dimension de la stèle ?

BIBLIOGRAPHIE : *(péréalo ; Publié dans les humanités scientifiques (septembre et octobre de l'an de grâce 1968, l'année phare !) par Serge MINOIS (Professeur Agrégé au Lycée Saint-Louis mais pas IG à cause de son nom !) avec deux solutions de J-LEGRAND (Maître Assistant Agrégé à la Faculté des Sciences de Bordeaux père de Pierre* Legrand IG*) ; quadrature 4 mai 90 page 52 ; quadrature 7 page 51).*

Rappelons brièvement une solution du problème du Pharaon. A, B, C étant les dimensions de la stèle, l'unité de longueur étant égale à l'arête commune à toutes les pierres du tas, les résultats de l'annexe étant admis, le problème revient à déterminer d, p, q, N tels que

(R) $ABC = d^3 * p * q * |p-q|(p+q)(p^2+q^2) = 2*5^2*3^5*7*11*373*N = 348960150*N = S.$

On a les inégalités $\begin{cases} 1 \leq q \leq p < p+q < p^2-q^2 = p-q(p+q) < p^2+q^2 \\ p-q < p < p+q < p^2+q^2 \end{cases}$

Enfin d'après l'unicité de la décomposition en facteurs premiers, tout diviseur premier de d est au moins à la puissance 3 *dans le second membre donc* $d = 1$ *ou* $d = 3$.

Comme p et q sont de parités différentes, $p^2+q^2 \geq 5$. *De plus rapidement,* $p, q, p-q, p+q, p^2+q^2$ *sont premiers entre eux et le décompte des facteurs primaires de S fait qu'ils sont primaires et comme* p^2+q^2 *est le plus grand, nécéssairement* $p^2+q^2 = 373$.

On fait varier p de façon à ce que $373-p^2$ *soit un carré parfait. (p varie par valeurs entières de* 1 *à* $[\sqrt{373}] = [19.31...] = 19$. $[x]$ *désignant la partie entière de x).*

p	1	2	3	4	5	6	**7**	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	**18**	19
p^2	1	4	9	16	25	36	**49**	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	**324**	361
$373-p^2$	372	369	362	357	348	337	$\mathbf{324 = 18^2}$	309	292	173	252	229	204	177	148	117	84	$\mathbf{49 = 7^2}$	12

Par symétrie on peut supposer $q < p$ *donc* $q = 7$ *et* $p = 18 = 2.3^2$ *et dans (R) on est obligé de prendre* $d = 3$.

L'annexe nous donne **A=825 | B=756 | C=1119 | N=2** *et il y a* 697920300 *pierres de forme cubique.*

La traque pour retrouver le problème dit "des nombres gelés" d'Antoine de Saint-Exupéry

(Sans lien avec l'expérience de Philadelphie, illustrant la théorie des champs unifiés d'Einstein (*))

Alerté par Cuculière depuis le 4 août 2001, qui tenait son existence du fils même du général Chassin, je commençais mes recherches. Un décompte de ces essais, arriverait à une centaine de directions (téléphones, google, bases de données des BU, lettres, mail (Site officiel, famille de Saint-Exupéry, Monthly, K Guy,...., anciens professeurs ayant travaillé dans la région de Lyon, Inspecteur Généraux anciens,....) ; j'ai même eu en 2001 un contact téléphonique avec un Monsieur De la Roque, d'une politesse exquise, qui a connu Saint-Exupéry, mais qui a regretté de ne pouvoir m'aider, étant lui même surtout littéraire.

(*) gelé : froze en anglais, voir les sites donnés par la première page de la demande sous google "expérience de Philadelphie"

Ce problème n'était pourtant pas mythique : en effet il est annoncé page 85 lignes 11 et 12 de l'article "Voyage de l'universel" du Général Chassin (qui a connu Saint-Exupéry) dans le numéro spécial 12-14 de la revue Confluences 1947, numéro spécial qui est dans les BU de la Sorbonne (cote Sorbonne P 2617=8), de Poitiers et de LYON ; Il est également cité dans l'ouvrage à tirage limité, (qui est à la BNF : bibliothèque nationale de France) du général Chassin "Visage de l'Universel", mais hélas contrairement à ce qui est dit (page 85 ligne 11 le général Chassin écrit "...pour illustrer sa théorie des "nombres gelés" comme il les appelait et que JE LIVRE CI APRÈS. J'ai gardé aussi le brouillon de la solution à ce qu'il avait nommé le problème du Pharaon, qui montre à la fois la puissance et la diversité de son génie") il n'est pas reproduit en annexe pp 89-92, alors que le problème du Pharaon l'est. Les articles de Confluences sont partiellement reproduits (mais sans les annexes) dans "Saint-Exupéry en Procès" Belfond Paris 1967 par Tavernier.

Saint-Exupéry avait fait spéciales et avait été admissible au concours de Navale (malgré un sept sur 20....en Français !) mais avait échoué à l'Oral. Il avait donc fait des mathématiques et vu la finesse du problème du Pharaon, on ne pouvait que regretter que la génération antérieure par négligence ait laissé perdre ce problème qui ne peut être que bijou.

La Philosophie de la vie par Saint-Exupéry

Il faut relire Saint-Exupéry qui était scientifique et humaniste : Il faut relire Terre des hommes, Mozart assassiné (dans un train Mozart dormait qui montre le crime qu'est de laisser en friche un cerveau). Le petit Prince continue à arracher des larmes aux lecteurs de tous ages.

Un élève de Bourgogne (Antoine Coignad) a gagné en 2000 le prix du civisme avec une rédaction où il rappelait notamment : "Quand Saint-Exupéry rencontrait un infirme dans une ville étrangère; il se demandait ce que valait cet infirme aux yeux de la civilisation du pays. Selon la réponse, il estimait cette civilisation grande ou misérable...." A méditer (sans doute tiré de Terre des hommes), mais l'élève m'a répondu qu'il ne savait plus localiser sa citation. et mes recherches dans l'œuvre, sont restées infructueuses.

J'en étais là, lorsqu'en début Mars 2005, des recherches par Google avec des variantes telles que "Saint Exupery mathématicien", m'ont fait découvrir des livres récents, que j'ai immédiatement demandés au prêt inter-universitaire par la bibliothèque de Dijon.

Et le 9 mars l'ouvrage demandé arriva ! "3 ans et huit mois de traque !".

Dans l'ouvrage -très attachant et recélant des merveilles inédites en particulier sur les brevets d'invention- "Les plus beaux manuscrits de Saint-Exupéry" (Éditions de la Martinière septembre 2003 ISBN 2-7324-2994-5) par Nathalie Des Vallières (petite nièce d'Antoine de Saint-Exupéry) on lit pages 136-137 le problème célèbre du Pharaon dont l'idée lui était venu lors d'un séjour au Caire en 1935, mais aussi pages 146-147 un autre problème :

PROBLÈME DU PARALLÈLÉPIPÈDE

Ce problème a été posé le 15 juillet 1944 au colonel Max Gelée par Antoine de Saint-Exupéry. L'histoire ne dit pas si le pari a été tenu, mais on peut en douter puisque Saint-Exupéry disparut le 31 juillet suivant. Plus tard le général Max Gelée a relaté cet épisode d'une amitié qui ne s'était jamais démentie. Capitaine commandant d'escadrille au groupe 2/33, il avait fait la connaissance de l'écrivain aviateur lors de la campagne de France de 1940. " La dernière fois que j'ai vu Saint-Exupéry, ce fut le 15 juillet. Il était venu à Villacidro avec un P 38. Je ne sais pas pourquoi, mais ce jour là, nous avons consigné notre pari par écrit. Ce document avait à mes yeux quelque valeur ; c'est pourquoi j'en ai fait don à l'Ecole de l'air de Salon" (Icare numéro 96 p 85).

Voici ce que dit le manuscrit de Saint-Exupéry :

> **Un parallélépipède rectangle dont la hauteur est égale à la diagonale du rectangle de base est exactement constitué par des dés cubiques de 1 cm de coté. La surface du rectangle de base est égale au produit de 311850 par un nombre premier inconnu. Calculer la hauteur du parallélépipède.**

Et Antoine de Saint-Exupéry, poursuit dans son manuscrit :

Si le colonel Gelée, ancien élève de l'École Polytechnique, résout mon problème en moins de trois jours et de trois nuits blanches, je m'engage à lui faire cadeau d'un stylo Parker 51. S'il ne résout pas en trois jours, il me fera cadeau de six paquets de Philip Morris.

Villacidro, le 15 juillet 1944 Antoine de Saint-Exupéry

Pourquoi l'évocation par le Général Chassin du nom "du problème des nombres gelés" ?

Je pense que le Colonel Chassin avait été abusé par un racourci, un quiproquo oral, une taquinerie, une mystification, provocation, calembour du célèbre écrivain-aviateur, en relation avec le patronyme du partenaire du pari, et qu'en 1947 lorsqu'il s'est rendu compte, ou en a été informé, il a arrêté à temps la publication de l'énoncé dans l'annexe du chapitre "Visage de l'Universel" évoqué ci dessus. Il se peut aussi que la découpe du parallélépipède rectangle en cubes de un centimètre de coté, évoque les glaçons mis dans un réfrigérateur ?

Une solution :

Notons P le nombre premier invoqué. On commence par montrer que $P=2$.

D'après l'annexe $ab=2d^2pq|(p-q)(p+q)|=2*3^4*5^2*7*11*P$ Le 2 se simplifie et puisque un des deux nombres p ou q est pair, P est pair et $P=2$ seul nombre premier pair.

Pour fixer les idées, supposons que ce soit $p=2p'$ qui soit pair et $q=2q'+1$ qui soit impair. La condition $ab=2d^2pq|(p-q)(p+q)|=2.3^4.5^2.7.11P$, avec maintenant que nous savons que $P=2$, devient : $2d^2(2p')q|(p-q)(p+q)|=2^2*3^4*5^2*7*11$ soit $\boxed{\mathbf{d^2p'q|2p'-q|(2p'+q)=3^4*5^2*7*11=1925*81=155925 \quad | (1)}}$

$d=pgcd(a,b)$ doit diviser 3^2*5, seuls facteurs qui apparaissent au carré dans la décomposition en facteurs premiers du second membre.

Nous avons donc $d=\begin{cases}1\\3\\5\\9\\15\\45\end{cases}$. Nous allons envisager chacune de ces 6 possibilités.

Le 23 mars 2005 à 19h24, Michel Lafond, me fait remarquer la simplification suivante : "on remarque que si d était multiple de 9, on aurait $p'q|2p'-q|(2p'+q)$ divise $5^2.7.11$, ce qui est impossible puisque $p'q|2p'-q|(2p'+q)$ est toujours congru à 0 modulo 3 (hors des cas immédiats où p' ou q sont multiples de 3, envisager les 4 possibilités de congruence $p'=3r\pm1,\ q=3s\pm1$).

Monsieur Collet (de Croix dans le Nord), remarque de manière similaire que $pq(p^2-q^2)$ est toujours multiple de 6 (si p et q sont de même parité $(p-q)$ et $(p+q)$ sont pairs, sinon p ou q est pair. Si p ou q est un multiple de 3 c'est gagné, sinon p^2-q^2 est toujours un multiple de 3, puisque $2^2=4=1+3$).

Il n'y a donc que 4 cas à étudier au lieu de 6, à savoir : d appartient à $\{1,3,5,15\}$.

(J'ai tenu compte de la remarque de Monsieur Collet (que je remercie par ici même) qu'il n'était pas certain que les facteurs du premier membre étaient tous primaires, certains pouvant être égaux à 1, et d'autres produits de primaires, pour modifier la première solution d'avril 2005)

NB : dans chaque cas j'étudie d'abord systématiquement la possibilité pour l'un des facteurs $\mathbf{p', q, |2p'-q|}$ d'être égal à 1.

$2p'+q$ qui est le plus grand des facteurs du premier membre, n'est jamais égal à 1 (il est même ≥ 3).

$\boxed{\mathbf{d=1}}$ (1) est alors $p'q|2p'-q|(2p'+q)=3^4*5^2*7*11=155925=A$

$\boxed{p'=1}$ donnerait $f(q)=q(q^2-4)=155925=A$; comme $q^3>f(q)$, et que $\sqrt[3]{A}=53.82$ et que $f(54)>A$ (f est strictement croissante pour $q\geq 3$), on déduit que $p'=1$ ne convient pas. *(faire un dessin des graphes de q^3 et f pour comprendre cet argument, et ceux, analogues qui suivent)*

$\boxed{q=1}$ donnerait $g(p')=p'(4p'^2-1)=A$; comme $4p'^3>g(p')$ et que $\sqrt[3]{\frac{A}{4}}=33.905$ et que $g(34)>A$ (g est strictement croissante pour $p'\geq 1$), on déduit que $q=1$ ne convient pas.

$\boxed{2p'-q=1}$ donnerait $q=2p'-1$ et $h1(q)=q(q+1)(2q+1)$ et comme $\sqrt[3]{A}=53.823$ et $2q^3<h1(q)$ et $h1(53)<2A$, on déduit que $2p'-q=1$ ne convient pas.

$\boxed{2p'-q=-1}$ donnerait $q=2p'+1$ et $h2(q)=q(q-1)(2q-1)$ et comme $\sqrt[3]{A}=53.823$ et $2q^3>h2(q)$ et $h2(54)\neq 2A$, et $h2(55)>2A$, on déduit que $2p'-q=-1$ ne convient pas.

Ayant écarté les possibilités précédentes, et comme il y a exactement quatre facteurs primaires dans le second membre, et comme $p', q, (2p'-q), (2p'+q)$ sont premiers entre eux, aucun d'eux n'étant égal à 1, et d'après l'unicité de la décomposition en facteurs premiers et puisque $(2p'+q)$ est le plus grand de ces quatre facteurs, il est obligatoirement le plus grand facteur primaire. On a nécéssairement : $2p'+q=3^4=81$. Les seules possibilités (hormis $p'=1$ déja écarté) sont $p'=25,7,11$ qui ne conviennent pas parce qu'elles donnent pour $q=81-2p'=31,67,59$ une décomposition dont un des facteurs premiers n'est pas dans la liste $5,7,11$.

$\boxed{\mathbf{d=3}}$ (1) est alors $p'q|2p'-q|(2p'+q)=3^2*5^2*7*11=\frac{A}{9}=B=17325$.

$\boxed{p'=1}$ donnerait $f(q)=q(q^2-4)=B$; comme $q^3>f(q)$, et que $\sqrt[3]{B}=25.87$ et que $f(26)>B$, on déduit que $p'=1$ ne convient pas.

$\boxed{q=1}$ donnerait $g(p')=p'(4p'^2-1)=B$; comme $4p'^3>g(p')$ et que $\sqrt[3]{\frac{B}{4}}=16.30$ et que $g(17)>B$ (g est strictement croissante pour $p'\geq 1$), on déduit que $q=1$ ne convient pas.

$\boxed{2p'-q=1}$ donnerait $q=2p'-1$ et $h1(q)=q(q+1)(2q+1)$ et comme $\sqrt[3]{B}=25.87$ et $2q^3<h1(q)$ et $h1(25)<2B$, on déduit que $2p'-q=1$ ne convient pas.

$\boxed{2p'-q=-1}$ donnerait $q=2p'+1$ et $h2(q)=q(q-1)(2q-1)$ et que $\sqrt[3]{B}=25.87$ et $2q^3>h2(q)$ et $h2(26)\neq 2B$, et $h2(27)>2B$ on déduit que $2p'-q=-1$ ne convient pas.

Comme il y a quatre facteurs primaires (puissance d'un nombre premier) et qu'aucun des $p', q...$ n'est égal à 1 et $2p'+q$ le plus grand est égal à 25.

- $p'=9$ donne $q=25-18=7$ et comme $2p'-q=18-7=11$ le couple $\boxed{\mathbf{p=18,\ q=7}}$ convient et donne comme $d=3$ $\boxed{\mathbf{a=2dpq=756 \text{ et } b=d(p^2-q^2)=825}}$. Une vérification rapide nous conforte.
- $p'=7$ donne $q=25-14=11$, $2p'-q=14-11=3$, cette solution ne convient pas car il manque un facteur 3.
- $p'=11$ donne $q=25-22=3$ et $2p'-q=22-3=19$ facteur premier qui n'est pas dans la liste du second membre.

$\boxed{\mathbf{d=5}}$ (1) est alors $p'q|2p'-q|(2p'+q)=3^4*7*11=\frac{A}{25}=C=6237$.

$\boxed{p'=1}$ donnerait $f(q)=q(q^2-4)=C$; comme $q^3>f(q)$, et que $\sqrt[3]{C}=18.40$ et que $f(19)>C$, on déduit que $p'=1$ ne convient pas.

$\boxed{q=1}$ donnerait $g(p')=p'(4p'^2-1)=C$; comme $4p'^3>g(p')$ et que $\sqrt[3]{\frac{C}{4}}=11.59$ et que $g(12)>C$ (g est strictement croissante pour $p'\geq 1$), on déduit que $q=1$ ne convient pas.

$\boxed{2p'-q=1}$ donnerait $q=2p'-1$ et $h1(q)=q(q+1)(2q+1)$ et comme $\sqrt[3]{C}=18.40$ et $2q^3<h1(q)$ et $h1(18)\neq 2C$, et $h1(17)<2C$ on déduit que $2p'-q=1$ ne convient pas.

$\boxed{2p'-q=-1}$ donnerait $q=2p'+1$ et $h2(q)=q(q-1)(2q-1)$ et que $\sqrt[3]{C}=18.40$ et $2q^3>h2(q)$ et $h2(19)>2C$, on déduit que $2p'-q=-1$ ne convient pas.

Comme il y a quatre facteurs, premiers entre eux dans le premier membre, et que trois facteurs primaires dans le second, au moins un des facteurs du premier membre doit être égal à 1, ce que nous venons justement d'écarter.

$\boxed{\mathbf{d=15}}$ (1) est alors $p'q|2p'-q|(2p'+q)=3^2*7*11=\frac{A}{25*9}=F=693$.

$\boxed{p'=1}$ donnerait $f(q)=q(q^2-4)=F$; comme $q^3>f(q)$, et que $\sqrt[3]{F}=8.84$ il faut essayer $f(9)=F$, **surprise !** on déduit que $p'=1$ convient (avec $q=9$).

$\boxed{q=1}$ donnerait $g(p')=p'(4p'^2-1)=F$; comme $4p'^3>g(p')$ et que $\sqrt[3]{\frac{F}{4}}=5.57$ et que $g(6)>F$ et $g(7)>F$ (g est strictement croissante pour $p'\geq 1$), on déduit que $q=1$ ne convient pas.

$\boxed{2p'-q=1}$ donnerait $q=2p'-1$ et $h1(q)=q(q+1)(2q+1)$ et comme $\sqrt[3]{F}=8.84$ et $2q^3<h1(q)$ et $h1(8)<2F$, on déduit que $2p'-q=1$ ne convient pas.

$\boxed{2p'-q=-1}$ donnerait $q=2p'+1$ et $h2(q)=q(q-1)(2q-1)$ et que $\sqrt[3]{F}=8.84$ et $2q^3>h2(q)$ et $h2(9)\neq 2F$ et $h(10)>2F$, on déduit que $2p'-q=-1$ ne convient pas.

Comme le premier membre de (1) comporte 4 facteurs premiers entre eux, et le second seulement trois, on en déduit que nécessairement un des trois facteurs $p', q, |2p'-q|$ est égal à 1 et nous venons de voir que seul $p'=1$ convient et donne $q=9$, solution qui convient et donne $\boxed{\mathbf{p=2,\ q=9}}$ et comme $d=15$ $\boxed{\mathbf{a=2dpq=540 \text{ et } b=d(p^2-q^2)=1155}}$. Une vérification rapide nous conforte.

Conclusion

Le problème du parallélépipède proposé à Max Gelée n'a que deux solutions :

$\boxed{\mathbf{a=756 \text{ et } b=825 \text{ avec } c=h=1119}}$

et $\boxed{\mathbf{a=540 \text{ et } b=1155 \text{ avec } c=h=1275}}$.

L'histoire ne dit pas si l'existence de deux solutions, accroissait les chances de Saint-Exupéry de gagner son pari au cas où le challenger n'en découvrait qu'une ?

Monsieur Collet a remarqué que le problème des nombres gelés n'est qu'une variante du problème du Pharaon. Pour le Pharaon Saint-Exupéry donne le volume 348960150, pour les nombres gelés, il donne la surface de base 311850. En remarquant que pour le Pharaon, la hauteur est 1119, il ne reste qu'à constater que $348960150=1119\times 311850$.

L'avantage du problème des nombres gelés est qu'il a une autre solution, qui lui assurait de gagner son pari.

Mr Collet propose alors, le problème des "Nombres collés", qui peut faire l'objet d'un nouveau défi pour les lecteurs de Quadrature : **Le périmètre de base du parallélépipède rectangle (dont la hauteur est rappelons-le égale**

à la diagonale de la base, et est exactement formé par des dés cubiques de 1cm de coté), est égal (mesuré en cm) au produit de 1581 par un nombre premier inconnu. Déterminer la hauteur du parallélépipède.

Annexe : équation diophantienne $\mathbf{a^2+b^2=c^2}$: triplets pythagoriciens

$a^2+b^2=c^2$, pour c non nul on a : $(\frac{a}{c})^2+(\frac{b}{c})^2=1$, on pense à $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$, on pense à $t=\tan\frac{\theta}{2}$ et on pose $(x=\frac{a}{c}=\frac{1-t^2}{1+t^2}, y=\frac{b}{c}=\frac{2t}{1+t^2})$.

Pour t décrivant $\mathbb{R}$, x décrit $]-1,1]$, donc ou "oublie" la solution $(-1,0)$.

Si $t\in\mathbb{Q}$ alors $x,y\in\mathbb{Q}$. Réciproquement si $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\frac{2t}{1+t^2})$ sont rationnels, alors si $t=0$, $t\in\mathbb{Q}$; si $t\neq 0$, $\frac{2}{y}=t+\frac{1}{t}\in\mathbb{Q}$ et $\frac{2x}{y}=\frac{1}{t}-t\in\mathbb{Q}$ donc $t\in\mathbb{Q}$.

Les solutions rationnelles de $x^2+y^2=1$ sont donc $(-1,0)$ et $(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2})$ (pour $t\in\mathbb{Q}$).

On revient à $a^2+b^2=c^2$. À part la solution triviale $(0,0,0)$, on se ramène comme on l'a vu au début à $(\frac{a}{c})^2+(\frac{b}{c})^2=1$, donc à $x^2+y^2=1$ avec $x=\frac{a}{c}$ et $y=\frac{b}{c}$ et $pgcd(a,c)=pgcd(b,c)=1$, car si (a,b,c) est solution, alors (da,db,dc) est solution.

Excluons la solution triviale a ou b nul, on a alors à une permutation près de a et b :
$(\frac{a}{c},\frac{b}{c})=(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}))=(\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2},\frac{2pq}{p^2+q^2})$.
(Après avoir posé $t=\frac{p}{q}$ irréductible)

- Si p et q sont de parités différentes $pgcd(2pq,p^2+q^2)=1$ car 2 ne divise pas p^2+q^2 et si d, divisait p et p^2+q^2 (d premier) d diviserait q^2 donc d diviserait q or $(pgcd(p,q)=1$ donc $a=p^2-q^2,\ b=2pq,\ c=p^2+q^2$ et on a $pgcd(b,c)=1$ donc $pgcd(a,c)=1$.
- Si p et q sont de même parité (impairs) ce n'est plus le cas. On change le paramètre $t'=\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})=\frac{1-t}{1+t}=\frac{q-p}{q+p}=\frac{p'}{q'}$ et alors $(\frac{a}{c},\frac{b}{c})=(\frac{2p'q'}{p'^2+q'^2},\frac{p'^2-q'^2}{p'^2+q'^2})$ avec $pgcd(p',q')=2$

En effet si d divise $p+q$ et $q-p$ il divise $2p$ et $2q$ donc $2pgcd(p,q)=2$. Inversement p et q impairs donc $p+q$ et $q-p$ pairs. Soit $P=p'/2$ et $Q=q'/2$ on a $pgcd(P,Q)=1$ et P et Q ne sont pas tous deux impairs puisque $P+Q=q$ est impair.

Conclusion : les solutions entières de $a^2+b^2=c^2$ sont

$\mathbf{couple(a,b)=couple(\pm d(p^2-q^2),\pm 2dpq)\mid c=\pm d(p^2+q^2)}$ avec $\mathbf{d\in\mathbb{Z},\ p,q\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{pgcd(p,q)=1}$ et p et q de parités différentes et les solutions triviales avec a ou b=0

(Autre méthode : solution personnelle en Chiwrite, exos Capes, Itard Arithmétique et théorie des nombres Que sais je 1093 p 107 (PUF) ; Tétrel 271 ; Râmis III p 29 ; ROD 47 ; Partiel 8 ; Agreg 75 ; 70 + Ens (résolution par morphisme) ; Hardy et Wright p 190)

Illustration en Maple

Le problème étant en quelque sorte une question de vérification combinatoire, il serait intéressant de concevoir une programme de vérification de liste, et non numérique.
