L.G.Vidiani 64 rue de l'EUROPE 21121 FONTAINE LÈS DIJON TEL : 03 80 56 65 54
Adresse email Internet : *lg_vidiani@ipac.fr*

Loi de groupe sur une surface

(Zip 2 TEX loigq.tex) version 23 04 04 15h35

Le lecteur est habitué aux lois de groupe usuelles dans des ensembles algébriques, parfois géométriques plans sur une hyperbole ou une cubique (en liaison avec les critères d'alignement de trois points, succédanné des conséquences du théorème d'Abel, et utilisé maintenant en codage elliptique). Voici un exemple de loi de groupe sur une surface.

Cette loi a été proposée dans un problème de concours à l'École supérieure des Industries chimiques de Nancy en 1947 [4], dont l'énoncé est partiellement reproduit dans [2] dont l'auteur, Monsieur l'Inspecteur Général Ramis m'a communiqué, par "retour de courrier en juin 1990", sa source : il fait partie d'une dizaine de problèmes très originaux pour l'époque dont l'auteur était Jean Frédéric Auguste Delsatre [5], [6] (Promotion Ulm 1922) qui était alors le Doyen de la Faculté ds Sciences de Nancy (dédaignant l'attraction de Paris) [2], [3], (http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/∼history/Mathematicians/Delsarte.html)

Son thème est le point de départ périodiquement de nombreuses questions d'oral [1], [3], [4].

Quand est-ce que les auteurs de problèmes de concours actuels, constuirons des problèmes aussi intéréssants, au lieu de se contenter (comme trop souvent) de transformer en problème un thème d'un cours niveau $n+2$, proposé à des candidats de niveau n ?

Définition et propriétés de la surface utilisée

- Pour $M=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ muni d'une structure affine euclidienne, on pose $f(M)=f(x,y,z)=\begin{vmatrix} x & y & z\\ z & x & y\\ y & z & x\end{vmatrix}$ et

$\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|f(x,y,z)=1$.

- Le déterminant qui définit f est un déterminant circulant et les méthodes usuelle (Sarrus, addition à une colonne d'une combinaison linéaire des autres) permettent d'obtenir $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=(x+y+z)(x+jy+j^2z)(x+j^2y+jz)$ où $j^3=1$ et $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Comme $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=(x+y+z)\big(x^2+y^2+z^2-\frac{1}{2}([x+y+z]^2-x^2-y^2-z^2\big)=(x+y+z)\big(\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)-\frac{1}{2}(x+y+z)^2)\big)=P(\frac{3}{2}S-\frac{1}{2}P^2)$ où l'on a posé

$$\begin{cases} P=x+y+z & \text{premier membre de l'équation d'un plan}\\ S=x^2+y^2+z^2 & \text{premier membre de l'équation d'une sphère}\end{cases}$$

- Puisqu'une équation de Σ s'écrit sous la forme $0=\Phi(S,P)=P(\frac{3}{2}S-\frac{1}{2}P^2)-1$, (relation entre l'équation d'une sphère et d'un plan), il s'agit d'une surface de révolution, d'axe la droite menée du centre O de la sphère $x^2+y^2+z^2=\lambda$ orthogonale au plan d'équation $x+y+z=\mu$. Il s'agit donc de l'"axe ternaire", la droite d'équations $x=y=z=0$.
- Prenons comme nouveau repère (O,X,Y,Z), OZ étant porté par l'axe ternaire : $Z\sqrt{3}=P$ et $S=x^2+y^2+z^2=OM^2$ reste $X^2+Y^2+Z^2$ (invariance de la forme quadratique fondamentale). Dans ce nouveau repère Σ a donc comme nouvelle équation $1=\frac{Z}{2}(3X^2+3Y^2+3Z^2-3Z^2)\sqrt{3}$ soit $\boxed{\mathbf{3\sqrt{3}Z(X^2+Y^2)=2}}$, la courbe méridienne dans le plan $Y=0$ étant $3\sqrt{3}ZX^2=2$.

Définition d'une loi interne sur la surface précédente

À tout couple $(M,M')\in\Sigma^2$ on associe le point Ω noté $M*M'$ défini par : $\begin{cases} u=xx'+yz'+zy'\\ v=xy'+yx'+zz'\\ w=xz'+yy'+zx'\end{cases}$

où $(x,y,z),(x',y',z'),(u,v,w)$ sont les coordonnées respectives des trois points M,M',Ω.

Remarquez qu'il n'est pas évident que $\Omega\in\Sigma$ quand M,M' appartiennent à cette surface. Mais nous sommes très astucieux pour nous éviter des calculs (le vrai mathématicien se reconnaît dans ce reflexe).

En faisant le produit des déterminants ligne de gauche par colonne du déterminant à droite nous avons

$F(x,y,z).F(x',y',z')=F(u,v,w)$ en notant F la matrice associée au déterminant servant à la définition de f.

Ainsi $F(M).F(M')=F(\Omega)=F(M*M')$ et en constatant $det(F(M))=f(M)$, on a pour $M,M'\in\Sigma$, $f(M)=f(M')=1$ donc $f(\Omega)=1.1=1$ et la loi ainsi définie est bien interne sur Σ.

- De plus la formule $\boxed{\mathbf{f(M).f(M')=f(M*M')}}$ assurant un morphisme entre la loi . dans $\mathbb{R}$ et la loi $*$ sur Σ, on en déduit que Σ muni de la loi $*$ est un groupe. Il est abélien (le produit matriciel n'est pas commutatif en général mais ici les formules donnant les coordonnées de $M*M'$ sont symétriques en les lettres non accentuées et celles accentuées.

On peut remarquer aussi que l'associativité se déduit de celle du produit matriciel, que le point neutre est $(1,0,0)$ puisque $F(1,0,0)=I$ matrice unité.

Quant à l'existence d'un point inverse de M elle résulte du fait que pour M sur la surface $f(M) = 1$ donc le matrice $F(M)$ est inversible et $F(M)^{-1} = ^t com(F(M))$ et ainsi $M^{-1} = (x^2 - yz, z^2 - yz, y^2 - zx)$ (il n'y a pas de permutation circulaire).

On peut enfin remarquer que posant $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on établit une bijection ψ entre l'ensemble des points $M(x, y, z)$ et les matrices $\mathcal{M}(x, y, z) = xI + yJ + zJ^2$ de déterminant $+1$, dont l'ensemble forme un sous anneau de $M_3(\mathbb{R})$ et cette bijection se double d'un isomorphisme en constatant $\psi(M * M') = \psi(M).\psi(M')$.

Comment se traduit la loi dans un repère adapté à la surface ?

Prenons comme nouveau repère, le repère orthonormé obtenu en prenant comme axe OZ l'axe ternaire et OY de vecteur unitaire $J = \frac{j-k}{\sqrt{2}}$ et $I = K \wedge J$; les formules de changement de coordonnées s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Ce qui donne $\boxed{\mathbf{x + y + z = \sqrt{3}Z}}$ et $\boxed{\mathbf{x + yj + zj^2} = \sqrt{\mathbf{\frac{3}{2}}}\mathbf{(X + iY)}}$. On retrouve ainsi dans le langage des complexes, l'intervention citée plus haut de la matrice $xI + yJ + zJ^2$.

De plus la définition de la loi $*$ se traduit en identifiant les coefficients de I, J, J^2 par :

$\boxed{\mathbf{u + v + w = (x + y + z)(x' + y' + z')}}$

et $\boxed{\mathbf{u + vj + wj^2 = (x + yj + zj^2)(x' + y'j + z'j^2)}}$, ce qui s'écrit en utilisant les nouvelles coordonnées et en utilisant les coordonnées cylindriques (ρ, θ, Z) dans le nouveau repère (on désigne bien sûr par (U, V, W) les nouvelles coordonnées du point Ω, ainsi que par (r, φ, W) ses coordonnées cyclindriques dans le nouveau repère.

$\sqrt{3}W = (\sqrt{3}Z)(\sqrt{3}Z')$ et $\sqrt{\frac{3}{2}}re^{i\varphi} = \sqrt{\frac{3}{2}}\rho e^{i\theta}\sqrt{\frac{3}{2}}\rho' e^{i\theta'}$ ce qui donne

$\boxed{\mathbf{\sqrt{3}W = (\sqrt{3}Z)(\sqrt{3}Z')}}$ et $\boxed{\sqrt{\mathbf{\frac{3}{2}}}\mathbf{r} = \sqrt{\mathbf{\frac{3}{2}}}\rho\sqrt{\mathbf{\frac{3}{2}}}\rho'}$ et aussi $\boxed{\varphi = \theta + \theta' \ \mathbf{mod}\ (\mathbf{2}\pi)}$

- Comme l'appartenance à la surface Σ se traduit par $\boxed{\mathbf{3\sqrt{3}Z\rho^2 = 2}}$, la première relation est une conséquence de la seconde ;
- En repérant le point M sur la surface par les deux paramètres $P = \sqrt{\frac{3}{2}}\rho$ et θ on a R étant le paramètre analogue associé à $\Omega = M * M'$ $\boxed{\mathbf{R = PP'},\ \mid \varphi = \theta + \theta'}$ on peut noter symboliquement $(P, \theta) * (P', \theta') = (PP', \theta + \theta')$, ce qui met en évidence l'isomorphisme du groupe $(\Sigma, *)$ avec $(\mathbb{R}^*, \times) \times (S_1, +)$.

Quelques propriétés complémentaires

- Pour qu'une courbe de la surface Σ projetée sur XOY en la courbe d'équation polaire $\rho = g(\theta)$ (g étant supposée continue sur son intervalle de définition) soit stable pour la loi de groupe, il faut et il suffit que $g(\theta + \theta') = \sqrt{\frac{3}{2}}g(\theta)g(\theta')$ et en posant $g^*(\theta) = \sqrt{\frac{3}{2}}g(\theta)$ alors la condition précédente équivaut à $g^*(\theta + \theta') = g^*(\theta).g^*(\theta')$.

On sait que cette équation fonctionnelle a comme solution ou la fonction nulle ou $g^*(\theta) = e^{m\theta}$, donc les projections sur XOY des courbes stables sitées sur Σ sont les spirales logarithmiques $\boxed{\rho = \sqrt{\mathbf{\frac{2}{3}}}\mathbf{e^{m\theta}}}$

- Le point neutre $A(x = 1, y = 0, z = 0) = (\theta = 0, \rho = \sqrt{\frac{2}{3}}, Z = \frac{1}{\sqrt{3}}) = (X = \sqrt{\frac{2}{3}}, Y = 0, Z = \frac{1}{\sqrt{3}})$ est sur toutes les courbes précédentes : on pouvait le prévoir puisque l'élément neutre d'un sous groupe est confondu avec l'élément neutre du groupe.
- On peut démontrer que l'intégrale curviligne de la forme différentielle $\omega = [f(dx, dy, dz)]^{\frac{1}{3}}$ le long d'un arc d'une telle courbe est $\sqrt[3]{-2m(1 + m^2)}(\theta_1 - \theta_0)$.
- Sur une spirale logarithmique prorjection d'une courbe stable de Σ le projeté de $M * M'$ est le point d'angle polaire $\theta + \theta'$.
- On peut se poser la question de savoir quelles sont toutes les surfaces sur lesquelles on peut ainsi définir une loi de groupe ?

Illustration en Maple d'une loi de groupe sur une surface

Donner le composé par ses coordonnées et géométriquement montrer sur la surface comment il se déduit de M et M' ; illustrer un itéré de M. Faire une animation colorée, en particulier sur les courbes stables.

(Hélas le pic asymptote vertical de la surface, fait que le rendu est peu visible)

restart: $etoile := proc(P,Q)[sqrt(3/2)*P[1]*Q[1], P[2]+Q[2], sqrt(3)*P[3]*Q[3]]end : Z := sqrt(3)*2/9/r^2;$

$surf := plot3d([r,t,Z], r = 0.1..10, t = 0..2*Pi, grid = [100,100], coords = cylindrical,$

$scaling = constrained, style = wireframe) :$

$itere := proc(liste,k)localtamp, P, Q, n, i, tp : n := nops(liste) : tamp := op(liste) : P := liste[n-1] : Q := liste[n] : forifrom1tokdotp := etoile(P,Q) : tamp := tamp, tp : P := Q : Q := tp : od; [tamp]end :$

$res1 := itere([[0.5, 0, subs(r = 0.5, Z)], [1, 0, subs(r = 1, Z)]], 10) :$

$res2 := itere([[0.5, 0, subs(r = 0.5, Z)], [1, Pi/4, subs(r = 1, Z)]], 10) :$

$res3 := itere([[0.2, Pi/6, subs(r = 0.2, Z)], [1, Pi/3, subs(r = 1, Z)]], 10) :$

$tracesuite := proc(liste, coul)locali, pts, polyg, xyz :$

$xyz := map(u- > [u[1]*cos(u[2]), u[1]*sin(u[2]), u[3]], liste) :$

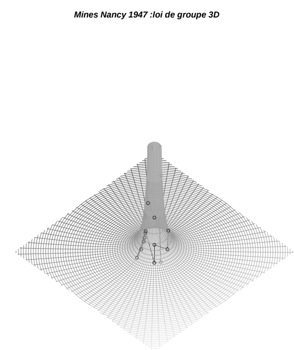
$pts := pointplot3d(xyz, color = coul, symbol = CIRCLE) :$

$polyg := spacecurve(xyz, color = coul) : pts, polygend :$

$with(plots) : a := 4 : b := 6 : plotsetup(inline);$

$display([surf, tracesuite(res1, red), tracesuite(res2, blue), tracesuite(res3, green)],$

$scaling = constrained, view = [-a..a, -a..a, -0.1..b], title = `MinesNancy1947 : loidegroupe3D`, titlefont = [HELVETICA, BOLDOBLIQUE, 10]);$



BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Lepez : Oral de Mathématiques 91-92 (Bréal 1993) p 81-82.

[2] E. Râmis : exercices de Géométrie (Masson 1969) p 205-208.

[3] E. Râmis, C. Deschamps, J. Odoux : Algèbre exercices avec solutions (Masson 1988) p 13-15.

[4] Revue de Mathématiques Spéciales : Septembre 1947 page 48, 49 ; Janvier 1990 p 279 question oral 1989 numéro 110.

[5] L. Schwartz : l'enseignement mathématique Avril-Juin 1972 p 113.

[6] A. Weil : l'œuvre mathématique de Delsatre, l'enseignement mathématique Avril-Juin 1972 p 115-140.