

Loi de groupe dans un triangle

(Zip 2+3 TeX loigtriq.tex) version 06 05 05 21h00

LOI DE GROUPE DANS UN TRIANGLE OUVERT

Introduction

Étant donné un triangle ABC on considère l'ensemble P^* des points de son plan privé des supports des cotés. P^* est donc l'ensemble des points du plan n'ayant aucune coordonnée barycentrique nulle. Soient deux points M et M' arbitraires de P^* de coordonnées barycentriques respectives (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$, on considère la loi de composition interne $*$ définie par $M * M' = (\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma')$.

Paradoxalement, s'il est immédiat de vérifier que cette loi $*$ vérifie les axiomes de groupes (interne dans P^* , associative, ayant un élément neutre $G = (1, 1, 1)$, tout élément admet un inverse $M^{-1} = (\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})$), par contre il n'est pas immédiat de l'interpréter géométriquement.

C'est ce que nous nous proposons de faire dans cet article.

Mais comme les lecteurs, même de quadrature, ne sont plus (vus les programmes actuels) forcément à l'aise (comme l'étaient tous les étudiants de classes préparatoires des années 1960) avec les coordonnées barycentriques, notion qui fut initiée par l'allemand Möbius, élève de Gauss, (1790-1868) parallèlement à Plücker et Feuerbach, nous allons commencer par rappeler en le justifiant, tout ce qui est indispensable de connaître pour atteindre ce but.

Je remercie Bernard Gibert de ses remarques, qui m'ont permis d'améliorer le plan de cet article, ainsi que de ses conseils techniques. Je suis resté volontairement dans une présentation élémentaire, mais les lecteurs désireux d'approfondir et d'avoir un point de vue plus synthétique dans l'espace projectif peuvent se rendre sur son site <http://perso.wanadoo.fr/bernard.gibert/> où le chapitre Downloads leur permettra de charger et d'imprimer un article de 93 pages.

Rappels sur les coordonnées barycentriques

Trois points du plan A_0, A_1, A_2 , affinement libres (c'est à dire formant un véritable triangle) étant donnés, ainsi que trois réels $m_i, i = 0..2$ de somme non nulle, on dira qu'un point M du plan est barycentre des points pondérés (A_i, m_i) si et seulement si $m_0 \overrightarrow{A_0M} + m_1 \overrightarrow{A_1M} + m_2 \overrightarrow{A_2M} = 0$.

Un repère $(O, \vec{I}_1, \vec{I}_2)$, étant choisi dans le plan, projetons sur les axes, la relation vectorielle précédente : on obtient un système de rang 2 (en effet les trois colonnes $\overrightarrow{A_0M}, \overrightarrow{A_1M}, \overrightarrow{A_2M}$, forment un système de même rang que $\overrightarrow{A_0A_0}, \overrightarrow{A_1A_0}, \overrightarrow{A_2A_0}$, de rang 2 puisque $\overrightarrow{A_0A_1}$ et $\overrightarrow{A_0A_2}$ sont indépendants, le triangle donné étant véritable, et que le rang ne peut excéder deux puisque ce sont trois vecteurs du plan.

Comme le système en m_i est homogène, de rang $3-1 = 2$, leurs valeurs s'obtiennent par la méthode des cofacteurs.

$$\begin{cases} m_0 = k \det(\overrightarrow{A_1M}, \overrightarrow{A_2M}) = k \det(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2M}) = 2k * \text{aire alg}(MA_1A_2) \\ m_1 = k \det(\overrightarrow{A_2M}, \overrightarrow{A_0M}) = k \det(\overrightarrow{A_2A_0}, \overrightarrow{A_0M}) = 2k * \text{aire alg}(MA_2A_0) \\ m_2 = k \det(\overrightarrow{A_0M}, \overrightarrow{A_1M}) = k \det(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_1M}) = 2k * \text{aire alg}(MA_0A_1) \end{cases}$$

k étant une constante réelle non nulle, arbitraire. D'après la somme de déterminants ayant un rangée identique, on a : $m_0 + m_1 + m_2 = k(\det(\overrightarrow{A_1M}, \overrightarrow{A_2M}) + \det(\overrightarrow{A_2M}, \overrightarrow{A_0M}) + \det(\overrightarrow{A_0M}, \overrightarrow{A_1M})) = k(\det(\overrightarrow{A_1M}, \overrightarrow{A_2M}) + \det(-\overrightarrow{A_0M}, \overrightarrow{A_2M}) + \det(\overrightarrow{A_0M}, \overrightarrow{A_1M})) = k(\det(\overrightarrow{A_1A_0}, \overrightarrow{A_2M}) + \det(\overrightarrow{A_0M}, \overrightarrow{A_1M})) = k(\det(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_1M} - \overrightarrow{A_2M})) = k \det(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_1A_2}) \neq 0$.

Les coefficients barycentriques sont donc proportionnels aux aires algébriques des triangles de sommet M : $MA_1A_2, MA_2A_0, MA_0A_1$. Cette remarque permet d'avoir rapidement les coefficients barycentriques de nombreux points (avec les notations habituelles et en donnant seulement la première, les autres s'en déduisant par permutation circulaire : O centre du cercle circonscrit $\sin 2A$; I centre du cercle inscrit $a : H$ orthocentre $\tan A$) ; Avec un peu d'habileté technique on peut même obtenir celles du point de Fermat : $\frac{a}{\sin(\frac{2\pi}{3}-A)}$.

On constate que $m_i = 0$ constitue une équation du coté $A_{i+1}A_{i+2}$ du triangle (avec la convention $A_j = A_{j-3}$ lorsque $j \geq 3$)

Connaissant les premiers membres $L_i^*(x_1, x_2) = \det(\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}, \overrightarrow{A_{i+2}M}) = a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + h^i$, $L_i^*(x_1, x_2) = 0$ constitue une équation de la droite $A_{i+1}A_{i+2}$. Si on connaît une autre équation $\ell_i^*(x_1, x_2) = 0$ de cette droite, comme deux équations d'une même droite sont proportionnelles, il existe une constante $k_i \neq 0$ telle que $L_i^* = k_i \ell_i^*$. M ayant pour coordonnées ordinaires (x_1, x_2) , on a :

$$\begin{cases} m_0(M) = k L_0^*(x_1, x_2) = k k_0 \ell_0^*(x_1, x_2) \\ m_1(M) = k L_1^*(x_1, x_2) = k k_1 \ell_1^*(x_1, x_2) \\ m_2(M) = k L_2^*(x_1, x_2) = k k_2 \ell_2^*(x_1, x_2) \end{cases}$$

On détermine les constantes k_i par le choix d'un point U comme point dit "unitaire". C'est à dire $m_i(U) = 1$. La connaissance des équations cartésiennes des cotés du triangle dans un repère quelconque de son plan, établit le

lien entre les composantes barycentriques (ou normales) et les coordonnées cartésiennes de M , ainsi que les relations inverses. C'est pour cette raison que je mets en annexe, tous les calculs particuliers métriques, permettant par exemple d'établir des programmes en Maple d'illustration graphique des phénomènes décrits par l'article qui suit.

Si $U = G$ centre de gravité du triangle (intersection des médianes), les m_i seront alors dites les coordonnées barycentriques de M et dans ce cas les aires algébriques des triangles GA_iA_{i+1} sont égales, ce qui n'est pas évident à priori. Si U est le centre du cercle inscrit au triangle on dit qu'on a les coordonnées projectives normales ou trilineaires normales, si U est un autre point on dit qu'on a les coordonnées projectives de M .

Je me limite au choix $U = G$, mais je tenais à faire cette remarque pour montrer l'intime lien entre les coordonnées barycentriques et les coordonnées projectives (remarquons que les unes comme les autres ne sont définies, bien sûr qu'à une constante multiplicative non nulle près, ce qui sera toujours sous entendu par la suite).

Comme \vec{u} étant un vecteur non nul, et \vec{v} un autre vecteur, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1v_2 - u_2v_1$, on constate que $\det(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = u_1(x_2 - a_2) - u_2(x_1 - a_1) = \frac{u_1(x_2 - a_2) - u_2(x_1 - a_1)}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \frac{u_1(x_2 - a_2) - u_2(x_1 - a_1)}{\|u\|} \|u\|$.

Appliquant ceci on a :

$$\begin{cases} m_0(M) = kL_0^*(x_1, x_2) = k \frac{L_0^*(x_1, x_2)}{\|A_1A_2\|} \|\overrightarrow{A_1A_2}\| \\ m_1(M) = kL_1^*(x_1, x_2) = k \frac{L_1^*(x_1, x_2)}{\|A_2A_0\|} \|\overrightarrow{A_2A_0}\| \\ m_2(M) = kL_2^*(x_1, x_2) = k \frac{L_2^*(x_1, x_2)}{\|A_0A_1\|} \|\overrightarrow{A_0A_1}\| \end{cases}$$

Comme on sait que la distance algébrique d'un point à une droite d'équation $L_i^*(x_1, x_2) = 0$ est justement $\frac{L_i^*(x_1, x_2)}{\|\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}\|}$, les coordonnées barycentriques m_i proportionnelles aux aires algébriques sont liées aux coordonnées

trilineaires normales T_i (proportionnelles aux distances algébriques de M aux cotés), on en déduit $\mathbf{m}_i = \mathbf{T}_i \|\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}\|$

Tout ceci est généralisable (c'est pour cela que j'ai utilisé des indices) en dimension supérieure, $n = 3$ pour un tétraèdre, et plus généralement pour ce qui généralise, triangle, tétraèdre aux dimensions supérieures, pour les simplexes.

Pour utiliser des notations classiques, les coordonnées barycentriques de M étant (α, β, γ) et les coordonnées projectives normales, notées par exemple (p, q, r) , a, b, c les longueurs des cotés du vrai triangle ABC on a

$$\alpha = \mathbf{p}\mathbf{a}, \beta = \mathbf{q}\mathbf{b}, \gamma = \mathbf{r}\mathbf{c} \quad \text{et inversement bien sûr} \quad \mathbf{p} = \frac{\alpha}{\mathbf{a}}, \mathbf{q} = \frac{\beta}{\mathbf{b}}, \mathbf{r} = \frac{\gamma}{\mathbf{c}}.$$

Tout ceci pour faire remarquer que tout ce qui suit, étant fait en utilisant les coordonnées barycentriques homogènes, pourrait tout aussi bien l'être avec des coordonnées projectives, par exemple normales.

Lien entre coordonnées ordinaires et barycentriques : cas affine

Écrivons que M a pour coordonnées ordinaires (x, y) dans le repère $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2})$: $\overrightarrow{A_0M} = x\overrightarrow{A_0A_1} + y\overrightarrow{A_0A_2}$ ce qui équivaut par Chasles à $\overrightarrow{A_0M} = x(\overrightarrow{A_0M} + \overrightarrow{MA_1}) + y(\overrightarrow{A_0M} + \overrightarrow{MA_2}) \iff (1 - x - y)\overrightarrow{A_0M} + x\overrightarrow{A_1M} + y\overrightarrow{A_2M} = 0 \iff M$ a pour coordonnées barycentriques normalisées (de somme 1) : $(1 - x - y, x, y)$ ce qui donne $\alpha = \mathbf{k}(1 - \mathbf{x} - \mathbf{y}), \beta = \mathbf{k}\mathbf{x}, \gamma = \mathbf{k}\mathbf{y}$ avec $k \neq 0$, et les formules inverses, comme $k = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma}$,

$$\mathbf{x} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}, \mathbf{y} = \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}$$

D'où les effets de changement de coordonnées barycentriques ou de changement de points pondérés de référence (triangle) par $\overrightarrow{OA_i} = \sum_{j=0}^2 x_i^j \overrightarrow{OA_j}$; ce qui entraîne immédiatement la conservation du degré des courbes algébriques, intéressant en particulier pour la recherche des intersections d'une telle courbe avec une droite.

On peut aussi plus courageusement accepter de faire une représentation de la loi en coordonnées ordinaires dans un repère orthonormé (ce que nous ferons en fin d'article).

Équation barycentrique d'une droite

L'équation d'une droite en coordonnées ordinaires est $ux + vy + h = 0$ avec $(u, v) \neq (0, 0)$, soit $ux + vy + h(1 - x - y) = 0$ ou encore $x(u + h) + y(v + h) + h(1 - x - y) = 0 \iff (u + h)\beta + (v + h)\gamma + h\alpha = 0$ avec $(u + h, v + h, h) \neq (h, h, h)$, ce qui revient à ajouter h aux trois composantes de la condition $(u, v, 0) \neq (0, 0, 0)$. donc $\mathbf{A}\alpha + \mathbf{B}\beta + \mathbf{C}\gamma = 0$ avec $(A, B, C) \neq k(1, 1, 1)$ avec $k \in \mathbb{R}^*$.

$\alpha + \beta + \gamma = 0$ ne représente aucune droite, sinon la droite dite de l'infini.

(À cause de la constante multiplicative non nulle, on peut toujours imposer aux coordonnées barycentriques d'être bornées, alors les relations $\alpha = k(1 - x - y), \beta = kx, \gamma = ky$, imposent comme au moins un des deux x ou y tend vers l'infini, à k de tendre vers 0 : donc en ajoutant $\alpha + \beta + \gamma = k$ tend vers 0 ; Par exemple si M s'éloigne à l'infini

dans la direction (a, b) $x = x_0 + \rho a$, $y = y_0 + \rho b$ et $\rho \rightarrow \infty$, donne que le point à l'infini dans cette direction a pour "coordonnées barycentriques" $(-a - b, a, b)$

Si une droite est donnée par son équation barycentrique $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$, les coordonnées barycentriques de son point à l'infini s'obtiennent en résolvant par la méthode des cofacteurs le système de rang 2 $\begin{cases} A\alpha + B\beta + C\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$

et l'on obtient par la méthode des cofacteur $\begin{cases} \alpha = B - C \\ \beta = C - A \\ \gamma = A - B \end{cases}$ et il est intéressant, culturel et facile de vérifier que son

conjugué isotomique alias le point de coordonnées barycentriques $(\frac{1}{\gamma}\alpha, \frac{1}{\beta}\beta, \frac{1}{\alpha}\gamma)$ est sur l'ellipse de Steiner circonscrite au triangle de référence qui a pour équation barycentrique $\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = 0$, tandis son carré de coordonnées barycentriques $(B - C)^2, (C - A)^2, (A - B)^2$ est sur l'ellipse de Steiner, inscrite au triangle, et qui a pour équation barycentrique $\alpha^2 - 2\beta\gamma\beta^2 - 2\gamma\alpha + \gamma^2 - 2\alpha\beta = 0$.

Équation barycentrique d'une droite D, contenant deux points donnés $M_i(x_i, y_i)$

de coordonnées barycentriques $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$.

L'équation de D en coordonnées ordinaires est $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, retranchons à la troisième colonne la somme des

deux autres, on obtient : $\begin{vmatrix} x & y & 1 - x - y \\ x_1 & y_1 & 1 - x_1 - y_1 \\ x_2 & y_2 & 1 - x_2 - y_2 \end{vmatrix} = 0$ ce qui équivaut à $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$.

Ce qui donne aussi la condition d'alignement de trois points en coordonnées barycentriques, le théorème de Ménélaüs (*) et avec les coordonnées barycentriques normalisées, le déterminant initial n'ayant pas été modifié, l'aire algébrique du triangle MM_1M_2 .

• **Exemple 1 : équation d'une droite telle que $A_1(0, 1, 0)A_2(0, 0, 1)$:** $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha = 0$. Mnémotechniquement

: "en face" de $A_0(\alpha = 1, 0, 0)$ l'équation du coté opposé est $\alpha = 0$.

• **Exemple 2 : équation d'une droite contenant A_0 et un point $M_0 = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$:** (Par définition on dira que A_0M_0 est la **cévienn**e(A_0M_0) (**)) pour bien marquer que c'est une droite passant par un sommet (ici A_0) du triangle.

$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 0 & 0 \\ \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \end{vmatrix} = \beta\gamma_0 - \gamma\beta_0 = \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta_0 & \gamma_0 \end{vmatrix} = 0$. **(Ce)** Résultat qui est sous une forme symétrique facile à retenir.

Mnémotechniquement "il n'y a pas de terme en α ". Dans l'équation d'une droite, la nullité du coefficient A implique que cette droite passe par le sommet A_0 du triangle.

L'intersection avec le coté opposé A_1A_2 est donc le point $(0, \beta, \beta\frac{\gamma_0}{\beta_0})$ soit en raison de l'homogénéité le point $(0, \beta_0, \gamma_0)$: Mnémotechniquement : la projection de sommet $A_0 = (1, 0, 0)$ du point $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ sur le coté opposé à

A_0 revient à remplacer α_0 par 0. **(Proj)**

• **Exemple 3 : équation de la médiane issue de A_0 ;** Appliquant ce qui précède au centre de gravité $G = (1, 1, 1)$ l'équation de la médiane A_0G est $\gamma - \beta = 0$ et son point d'intersection avec A_1A_2 est $(0, 1, 1)$ ce qui était prévisible (et nous rassure) puisque c'est le milieu, donc isobarycentre des deux points A_1, A_2 .

• **Exemple 4 : Théorème de Céva : CNS de concours de trois céviennes :** Considérons les trois

céviennes A_0M_0, A_1M_1, A_2M_2 , (avec des notations évidentes) $\begin{cases} 0 = \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta_0 & \gamma_0 \end{vmatrix} = \beta\gamma_0 - \gamma\beta_0 \\ 0 = \begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \gamma_1 & \alpha_1 \end{vmatrix} = \gamma\alpha_1 - \alpha\gamma_1 \\ 0 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha\beta_2 - \beta\alpha_2 \end{cases}$

Une condition nécessaire et suffisante pour que ces trois céviennes, soient concourantes, est que ce système admette une solution en (α, β, γ) "non banale", c'est à dire différente de $(0, 0, 0)$ (une solution éventuelle qui vérifierait $\alpha + \beta + \gamma = 0$ n'est pas gênante, elle signifierait que les trois céviennes sont parallèles, donc concourantes au point à l'infini de leur direction commune).

(*) Dit d'Alexandrie, premier siècle.

(**) En hommage au mathématicien italien Giovanni Céva (1648-1734).

Cela se traduit en disant que le système concerné n'est pas cramérien, donc a son déterminant nul

$$\begin{vmatrix} 0 & \gamma_0 & -\beta_0 \\ -\gamma_1 & 0 & \alpha_1 \\ \beta_2 & -\alpha_2 & 0 \end{vmatrix} =_{\text{par Sarrus}} -\alpha_2\beta_0\gamma_1 + \alpha_1\beta_2\gamma_0 = 0,$$

résultat connu sous le nom de théorème de Ceva **(Céva)**

(Le lecteur peut s'entraîner à écrire l'équation des bissectrices, des symétriques d'une droite par rapport à un coté, et à changer de triangle de référence, etc...)

• **Droite parallèle à A_1A_2 d'équation $\alpha = 0$** : d'après la théorie des faisceaux de droites parallèles le système $\begin{cases} A\alpha + B\beta + C\gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$ (la droite de l'infini) doit être compatible, donc d'après la théorie du déterminant

caractéristique $\begin{vmatrix} A & B & C \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = C - B = 0$, les deux derniers coefficients sont égaux : l'équation générale des droites

parallèles à A_1A_2 est $A\alpha + B(\beta + \gamma) = 0$: mnémotechniquement les coefficients autres de celui de α sont égaux ; La droite parallèle à A_1A_2 passant par $G = (1, 1, 1)$ devant avoir son équation vérifiée par les coordonnées barycentriques de G est telle que $A + 2B = 0$ son équation est donc $2\alpha - \beta - \gamma = 0$

Plus généralement la parallèle à A_1A_2 contenant un point donné $M_2 = (a_2, b_2, c_2)$ doit avoir ses coefficients qui vérifient $Aa_2 + B(b_2 + c_2) = 0$ donc l'équation de cette parallèle est $(b_2 + c_2)\alpha - a_2(\beta + \gamma) = 0$. Mnémotechniquement

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta + \gamma \\ a_2 & b_2 + c_2 \end{vmatrix} = 0. \text{ (la colonne des } \alpha \text{ est "seule"). } \quad \mathbf{(Par)}$$

• Dans le cas de deux droites $D_1 = A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma$ et $D_2 = A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma$ sécantes en un point S , le lecteur vérifiera (la théorie est connue en coordonnées ordinaires) que l'équation générale des droites contenant S est $D_1 + \lambda D_2 = 0$, D_1 correspondant à $\lambda = 0$ et D_2 , à cause de $\frac{1}{\lambda}D_1 + D_2 = 0$ à $\lambda = \infty$.

• **Symétrisation** Sur la droite A_1A_2 , considérons un point M de coordonnées barycentriques (β, γ) de somme non nulle, par rapport aux deux extrémités. Posons nous la question de trouver les coordonnées barycentriques du point M' symétrique de M par rapport au milieu de A_1A_2 : cela peut se traduire par $\overrightarrow{A_1M} = \overrightarrow{M'A_2}$.

On a $\vec{0} = \beta\overrightarrow{A_1M} + \gamma\overrightarrow{A_2M} = \beta\overrightarrow{M'A_2} + \gamma(\overrightarrow{A_2M'} + \overrightarrow{M'A_1} + \overrightarrow{A_1M}) = \beta\overrightarrow{M'A_2} + \gamma(\overrightarrow{A_2M'} + \overrightarrow{M'A_1} + \overrightarrow{M'A_2}) = \beta\overrightarrow{M'A_2} + \gamma(\overrightarrow{M'A_1})$. Les coordonnées barycentriques de M' sont donc (γ, β) , ou encore lorsque $\beta\gamma \neq 0$ c'est à dire lorsque M n'est ni en A_1 ni en A_2 , $(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})$. De manière mnémotechnique "on permute les coordonnées", ou ailleurs

qu'aux deux sommets A_1A_2 on "remplace les coordonnées barycentriques, par leur inverse" **(Sym)**.

Construction géométrique du composé $M_1 * M_2$

Pour la simplicité typographique, utilisons, uniquement dans ce paragraphe, les lettres romaines pour désigner les coefficients barycentriques des points considérés et soient $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$ deux points du plan privé des cotés du triangle ($x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ sont tous non nuls).

D'après **(Ce)** la céviennne $A_0(M_1 * M_2)$ coupe A_1A_2 en $X = (0, y_1y_2, z_1z_2)$ dont nous allons chercher la construction. En procédant de même pour les autres cotés, le point $M_1 * M_2$ sera l'intersection des céviennes analogues à A_0X dont nous vérifierons bien sûr le concours.

Soient $X_1 = (0, y_1, z_1)$ et $X_2 = (0, y_2, z_2)$ les pieds sur A_1A_2 des céviennes A_0M_1 et A_0M_2 .

Considérons les deux parallélogrammes ($i = 1..2$) $A_0T_iX_iS_i$ avec $T_i \in A_0A_1$ et $S_i \in A_0A_2$

A_0A_1 ayant pour équation $\gamma = 0$, d'après **(Par)** X_1S_1 qui lui est parallèle, a pour équation $\begin{vmatrix} \gamma & \alpha + \beta \\ z_1 & 0 + y_1 \end{vmatrix} = 0$.

S_1 est le point de cette droite avec $\beta = 0$: $\begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ z_1 & 0 + y_1 \end{vmatrix} = 0$. Donc $S_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et par changement d'indice

$$S_2 = \begin{pmatrix} y_2 \\ 0 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

De même T_1X_1 est parallèle à A_0A_2 et a pour équation d'après **(Par)** $\begin{vmatrix} \beta & \alpha + \gamma \\ y_1 & 0 + z_1 \end{vmatrix} = 0$; T_1 correspond

à $\gamma = 0$ ce qui donne $T_1 = \begin{pmatrix} z_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de même $T_2 = \begin{pmatrix} z_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La céviennne A_1S_1 a d'après **(Ce)** pour équation $\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0$ soit $\alpha z_1 = \gamma y_1$; de même la céviennne A_2T_2 a pour équation $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ z_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$ soit $\alpha y_2 = \beta z_2$; Ces deux droites se coupent en $U_1 = A_1S_1 \cap A_2T_2 = \begin{pmatrix} y_1 z_2 \\ y_1 y_2 \\ z_1 z_2 \end{pmatrix}$ qui a **même céviennne A_0U_1 de sommet A_0 que $M_1 * M_2$ (*)** et par permutation d'indice A_1S_2 et A_2T_1 se coupent en $U_0 = A_1S_2 \cap A_2T_1 = \begin{pmatrix} y_2 z_1 \\ y_1 y_2 \\ z_1 z_2 \end{pmatrix}$, qui a même céviennne A_1U_0 de sommet A_1 que $M_1 * M_2$.

Nous avons donc ainsi une "interprétation géométrique" de la loi de groupe. D'autres sont possibles par la théorie des faisceaux de coniques, mais nous ne les aborderons pas.

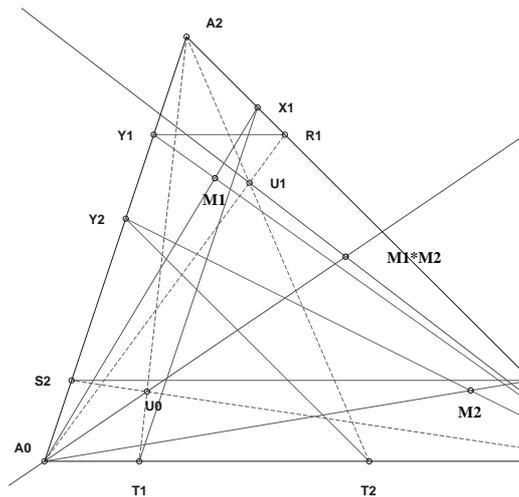
Résumons la construction de $M_1 * M_2$ (les indices sont mis pour faciliter le suivi de ce qui est relatif à chaque point M_1 ou M_2 dans la construction et remarquons encore que cette construction est valable lorsque $M_1 = M_2$, cas du carré $M_1^2 = M_1 * M_1$) :

<p>Les céviennes de sommet A_0, A_0M_1 et A_0M_2 coupent A_1A_2 en respectivement X_1 et X_2 La parallèle à A_0A_2 menée par X_1 coupe A_0A_1 en T_1 La parallèle à A_0A_1 menée par X_2 coupe A_0A_2 en S_2 A_1S_2 et A_2T_1 se coupent en U_0 dont la céviennne A_0U_0 contient $M_1 * M_2$.</p>
<p>On fait de même en remplaçant A_0 par A_1 et le coté opposé A_1A_2 par A_0A_2</p>
<p>Les céviennes de sommet A_1, A_1M_1 et A_1M_2 coupent A_0A_2 en respectivement Y_1 et Y_2 La parallèle à A_0A_1 menée par Y_1 coupe A_2A_1 en R_1 La parallèle à A_2A_1 menée par Y_2 coupe A_0A_1 en T_2 A_2T_2 et A_0R_1 se coupent en U_1 dont la céviennne A_1U_1 contient $M_1 * M_2$.</p>
<p>$M_1 * M_2$ est à l'intersection des deux céviennes toujours distinctes et sécantes A_0U_0 et A_1U_1.</p>

La figure ci-dessous obtenue grâce au programme Maple donné en annexe, illustre cette construction du composé de deux points.

(*) Cette remarque est fondamentale, et j'ai laissé le problème de coté pendant trois mois et 11 jours en faisant autre chose, car l'inconvénient habituel est qu'il fallait dissocier la constuction du composé, avec une méthode de principe différent, lorsque M_1 et M_2 sont confondus.

Construction du point $M_1 * M_2$



En prime, on a six céviennes (du type A_0U_0, A_1U_1) concourantes. en $M_1 * M_2$.

(Il existe une autre construction (*), utilisant l'involution échangeant sur un coté les sommets d'une part et les pieds des céviennes de M_1 et M_2 d'autre part : il y a trois involutions donnant 3 centres et donc la polaire trilinéaire du produit barycentrique)

Nous sommes en droit de nous poser des questions : si M_1 et M_2 décrivent une courbe de degré n , où se trouve leur composé ? Si le lieu commun est algébrique de degré n , quel est le degré du lieu du composé ; Que se passe-t-il si ce lieu est une droite, un cercle, une conique, une cubique ? y a-t-il des lieux (ensembles) stables ? c'est à dire que $M_1 * M_2$ décrive la courbe commune décrite (l'ensemble commun décrit) par les M_i ? Y a-t-il des zones en relation, c'est à dire M_i dans une zone et leur composé dans une autre ? (**). Tout ceci mérite certainement des beaux programmes Maple visualisant l'évolution des points par un animate.

Construction de l'inverse de $M(x, y, z)$, $xyz \neq 0$

On remarque immédiatement que G est son propre inverse, et que ses racines carrées (dont G) sont les seules à vérifier cette propriété ; en prime ce sont les seuls points doubles de la transformation $(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto (\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})$. (puisque $M = (\alpha, \beta, \gamma) = k(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})$ implique $M^2 = kG$).

La formule **(Sym)** nous inspire. Les céviennes de M coupent les cotés opposés en respectivement $A'_0 = (0, y, z)$ sur A_1A_2 , $A'_1 = (x, 0, z)$ sur A_0A_2 , $A'_2 = (x, y, 0)$ sur A_0A_1 .

Soient A''_i le symétrique de A'_i par rapport à l'isobarycentre des points $A_{i+1}A_{i+2}$. Alors d'après **(Sym)**

$$\begin{cases} A''_0 = (0, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}) \\ A''_1 = (\frac{1}{x}, 0, \frac{1}{z}) \\ A''_2 = (\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, 0) \end{cases}$$

Il est immédiat de vérifier (soit directement soit par Céva) que les céviennes $A_iA''_i$ se coupent toutes en $M' =$

(*) Voir page 5 du document de 93 pages <http://perso.wanadoo.fr/bernard.gibert/Resources/isocubics.pdf>

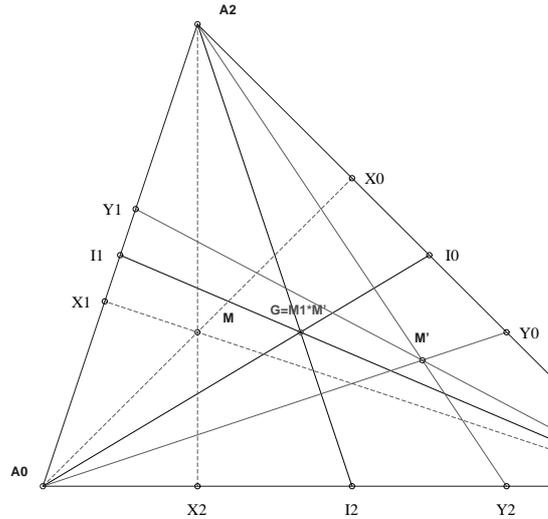
(**) Voir l'article de Steve Sigur qui a étudié le problème dans

<http://forumgeom.fau.edu/FG2005volume5/FG200501index.html> FG signifie Forum Geometricorum, journal de Paul Yiu.

$(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z})$, inverse de M pour la loi de groupe que nous avons défini au départ. Dans la nomenclature en vigueur on dit que M' est le conjugué isotomique de M ou plus brièvement isotomique de M .

La construction géométrique de l'inverse M' de M en découle, elle est illustrée dans la figure qui suit :

Construction de l'inverse M' de M



Des questions viennent naturellement à l'esprit et peuvent s'illustrer en Maple (avec une variante animation) : Si M décrit une courbe de degré n quel est le degré de son image isotomique ? quelle est l'image d'une droite ne passant pas par un sommet, puis passant par un sommet sans être un coté du triangle. Quelle est l'image d'un cercle (ne coupant pas un coté, ou coupant un coté, ou passant par un sommet) ; quelle est l'image d'une conique, d'une cubique (circulaire) ; y a-t-il des courbes invariantes et si oui lesquelles ?

On peut donner un embryon de réponse (on généralise même à l'isoconjugaison) : Si (C) est une courbe algébrique dont l'équation barycentrique homogène est de degré d'homogénéité n , et de degrés partiels m_1, m_2, m_3 maximal par rapport aux variables respectives α, β, γ , $\sum A_{i,j,k} \alpha^i \beta^j \gamma^k = f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, cherchons une condition nécessaire pour qu'elle soit invariante par la transformation (dite $\Omega(p, q, r)$ -isoconjugaison (*) définie par les formules : $\alpha' = \frac{p}{\alpha}$, $\beta' = \frac{q}{\beta}$, $\gamma' = \frac{r}{\gamma}$, où p, q, r sont des réels non nuls, en ce sens que la courbe $f(\alpha', \beta', \gamma') = 0$ soit confondue avec la courbe initiale : cela se traduit par $f(\alpha', \beta', \gamma') = f(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\beta}, \frac{r}{\gamma}) = \sum A_{i,j,k} p^i q^j r^k \frac{1}{\alpha^i \beta^j \gamma^k} = \sum A_{i,j,k} p^i q^j r^k \frac{\alpha^{m_1-i} \beta^{m_2-j} \gamma^{m_3-k}}{(\alpha^{m_1} \beta^{m_2} \gamma^{m_3})}$.

Pour que la courbe image soit identique à la courbe initiale, il est nécessaire que le degré du numérateur soit égal n , pour qu'il soit proportionnel à f .

Ceci donne $n = m_1 - i + m_2 - j + m_3 - k = m_1 + m_2 + m_3 - (i + j + k) = m_1 + m_2 + m_3 - n$, puisque par suite de l'homogénéité de f on a $i + j + k = n$. On a donc $\boxed{m_1 + m_2 + m_3 = 2n}$

Envisageons plusieurs cas :

(pour des notations plus commodes x, y, z représentent ici, pour les calculs qui suivent, les composantes barycentriques)

- **$n = 1$ La courbe cherchée est une droite.** On doit avoir $m_1 + m_2 + m_3 = 2$ avec $m_i \leq n = 1$. La seule possibilité, à une permutation près, est $m_1 = m_2 = 1, m_3 = 0$. La droite a une équation de la forme $ux + vy = 0$ et la condition d'invariance par Ω conjugaison est que $u \frac{p}{x} + v \frac{q}{y} = \frac{upy + vqx}{xy}$ ait son numérateur proportionnel au premier membre de l'équation de la droite ; ceci se traduit par $u = kvq, v = kup$ donc $u(1 - k^2pq) = 0 = v(1 - k^2pq)$. On

(*) Lorsque $\Omega = G = (1, 1, 1)$ on dit conjugaison isotomique, lorsque $\Omega = K = (a^2, b^2, c^2)$ point de Lemoine du triangle, on dit conjugaison isogonale.

doit avoir (pour avoir une vraie droite) $k^2pq = 1$; Les seules droites invariantes sont $x + \varepsilon k_0py = 0$ où k_0 est une racine (éventuellement complexe si $pq < 0$) de $\frac{1}{pq}$. Elles passent par A_2 , et on remarque immédiatement qu'elles se caractérisent parmi les droites du faisceau de A_2 par le fait qu'elle contienne exactement deux points doubles de la transformation, et donc un sommet du triangle. Le suivi du calcul prouve que la conjuguée d'une droite quelconque est une conique circonscrite au triangle. On peut même [1,2] préciser le type de la conique, suivant (dans le cas de l'isoconjugaison $p = q = 1$) que la droite initiale coupe ou non le cercle circonscrit au triangle en des points réels ou non. C'est une parabole si elle y est tangente, une hyperbole équilatère si elle en est un diamètre. (Dans le cas général il faut prendre au lieu du cercle circonscrit, la conique circonscrite de pecteur le pôle Ω , c'est à dire la conique conjuguée de la droite de l'infini, et la conique est dans ce cas général, une hyperbole équilatère si et seulement si la droite passe par l'isoconjugué de H).

Quand la droite passe par A_2 la conique est décomposée en deux droites dont l'une passe par A_2 et l'autre est A_0A_1 . La partie transformée passant par A_2 est confondue avec la droite initiale si et seulement si celle ci passe par un point double.

• **n = 2 La courbe cherchée est une conique.** On doit avoir $m_1 + m_2 + m_3 = 4$ avec $m_i \leq n = 2$. Les seules possibilités à une permutation près sont $m_1 = 2, m_2 = 2, m_3 = 0$ (pas de terme en z) ou $m_1 = 2, m_2 = 1, m_3 = 1$.

Dans le premier cas, la conique $Ax^2 + By^2 + 2Cxy = 0$ dont la transformée est $A\frac{p^2}{x^2} + B\frac{q^2}{y^2} + 2C\frac{pq}{xy} = \frac{1}{x^2y^2}(Ap^2y^2 + Bq^2x^2 + 2Cpqxy) = 0$, est invariante si et seulement si $kBq^2 = A$ et $kAp^2 = B$ et $kCpq = C$ qui impliquent $A(1 - k^2p^2q^2) = 0 = B(1 - kp^2q^2)$: en posant $k_0 = \varepsilon pq$, on a $B = k_0Ap^2$.

• Pour $\varepsilon = +1$ on trouve les coniques $Ax^2 + k_0Ap^2y^2 + 2Cxy = 0$, coniques décomposées en deux droites (éventuellement imaginaires) contenant A_2 .

• Pour $\varepsilon = -1$, alors $C = 0$ et on trouve les coniques les coniques $Ax^2 - k_0Ap^2y^2 = 0$. Une vérification rapide prouve que cette conique est décomposée en les deux droites invariantes passant par A_2 .

Dans le second cas, la conique $Ax^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fzx$ dont la transformée est $A\frac{p^2}{x^2} + 2D\frac{pq}{xy} + 2E\frac{qr}{yz} + 2F\frac{rp}{zx} = \frac{1}{x^2yz}(Ap^2yz + 2Dpqzx + 2Eqr x^2 + 2Fpqxy) = 0$ est invariante si et seulement si $A = k^2Eqr$, $D = kFpr$, $2E = kAp^2$, $F = kDpq$ ce qui implique $A(1 - k^2p^2qr) = 0 = D(1 - k^2p^2q)$. Pour que les coefficients de l'équation de la conique ne soient pas tous nuls on doit prendre k racine carrée de $\frac{1}{p^2qr}$ soit k_0 l'une d'elles, alors $A = \varepsilon 2Ek_0qr$, $D = \varepsilon k_0Fpr$ et les coniques invariantes sont $E(2yz + \varepsilon 2k_0qr x^2) + 2Fx(\varepsilon k_0pr y + z) = 0$. Cette conique contient deux sommets du triangle A_2 et A_1 . On peut chercher à vérifier si elle contient deux points doubles de la transformation.

Hors les cas obtenus par permutation, le suivi du calcul prouve que la transformée d'une conique serait une quartique (courbe algébrique de degré 4).

• **n = 3 La courbe cherchée est une cubique.** On s'attend bien sûr à trouver parmi les cubiques invariantes par conjugaison, les droites invariantes comptées trois fois, ou l'union d'une droite invariante et d'une conique invariante. On doit avoir $m_1 + m_2 + m_3 = 6$ avec $m_i \leq n = 3$. À une permutation près les possibilités se réduisent à

$$\begin{cases} m_1 = 3, m_2 = 3, m_3 = 0 & \text{cas (1)} \\ m_1 = 3, m_2 = 2, m_3 = 1 & \text{cas (2)} \\ m_1 = 2, m_2 = 2, m_3 = 2 & \text{cas (3)} \end{cases}$$

Dans le premier cas, la cubique d'équation $Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 = 0$ dont la transformée par Ω conjugaison a pour équation $A\frac{p^3}{x^3} + B\frac{p^2q}{x^2y} + C\frac{pq^2}{xy^2} + D\frac{q^3}{y^3} = \frac{1}{x^3y^3}(Ap^3y^3 + Bp^2qxy^2 + Cpq^2x^2y + Dq^3x^3) = 0$ sera invariante par

$$\text{cette transformation si et seulement si } \begin{cases} A = kDq^3 \\ B = kCpq^2 \\ C = kBp^2q \\ D = kAp^3 \end{cases} \iff \begin{cases} A(1 - k^2p^3q^3) = 0 \\ D = kAp^3 \\ B(1 - p^3q^3) = 0 \\ C = kBp^2q \end{cases} .$$

Pour que les coefficients ne soient pas tous nuls, il faut prendre $k^2p^3q^3 = 1$ et si k_0 est une racine carrée de $\frac{1}{p^3q^3}$, les cubiques invariantes du premier type ont pour équation : $A(x^3 + \varepsilon k_0p^3y^3) + Bxy(x + p^2q\varepsilon k_0y) = 0$ dans laquelle après avoir factorisé $(x + p^2q\varepsilon k_0y)$ nous reconnaissons l'union d'une droite invariante et d'une conique invariante (rappelons le, décomposée en deux droites passant par un sommet du triangle).

Dans le deuxième cas, la cubique d'équation $Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dx^2z + Ey^2z + Fxyz = 0$ dont la transformée par Ω conjugaison a pour équation $A\frac{p^3}{x^3} + B\frac{p^2q}{x^2y} + C\frac{pq^2}{xy^2} + D\frac{p^2r}{x^2z} + E\frac{q^2r}{y^2z} + F\frac{pqr}{xyz} = \frac{1}{x^3y^2z}(Ap^3y^2z + Bp^2qxyz + Cpq^2x^2z +$

$$Dp^2rxy^2 + Eq^2rx^3 + Fpqr x^2y) = 0, \text{ sera invariante par cette transformation si et seulement si } \begin{cases} A = kEq^2r \\ B = kFpqr \\ C = kDp^2r \\ D = kCpq^2 \\ E = kAp^3 \\ F = kBp^2q \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} A(1 - k^2 p^3 q^2 r) = 0 \\ E = kAp^3 \\ B(1 - k^2 p^3 q^2 r) = 0 \\ F = kBp^2 q \\ C(1 - k^2 p^3 q^2 r) = 0 \\ D = kCpq^2 \end{cases}, \text{ et pour que les coefficients ne soient pas tous nuls, on doit avoir } k^2 p^3 q^2 r = 1. \text{ On pose } k_0 \text{ l'une}$$

des racines carrées de $\frac{1}{p^3 q^2 r}$. Alors les cubiques invariantes du second type sont celles dont l'équation est de la forme : $A(x^3 + \varepsilon k_0 p^3 y^2 z) + B(x^2 y + \varepsilon k_0 p^2 q x y z) + C(x y^2 + \varepsilon k_0 p q^2 x^2 z) = 0$.

Dans le troisième cas, le plus intéressant, la cubique d'équation $Ax^2 y + Bx^2 z + Cy^2 x + Dy^2 z + Ez^2 x + Fz^2 y + Gxyz = 0$ dont la transformée par Ω conjugaison a pour équation $A\frac{p^2 q}{x^2 y} + B\frac{p^2 r}{x^2 z} + C\frac{q^2 p}{y^2 x} + D\frac{q^2 r}{y^2 z} + E\frac{r^2 p}{z^2 x} + F\frac{r^2 q}{z^2 y} + G\frac{pqr}{xyz} = \frac{1}{x^2 y^2 z^2} (Ap^2 qyz^2 + Bp^2 rzy^2 + Cq^2 pxz^2 + Dq^2 rx^2 z + Er^2 pxy^2 + Fr^2 qx^2 y + Gpqrxyz) = 0$, sera invariante par cette

transformation si et seulement si $\begin{cases} A = kFr^2 q \\ B = kDq^2 r \\ C = kEr^2 p \\ D = kBp^2 r \\ E = kCq^2 p \\ F = kAp^2 q \\ G = Gkpqr \end{cases} \iff \begin{cases} A(1 - k^2 p^2 q^2 r^2) = 0 \\ F = kAp^2 q \\ B(1 - k^2 p^2 q^2 r^2) = 0 \\ D = kBp^2 r \\ C(1 - k^2 p^2 q^2 r^2) = 0 \\ E = kCq^2 p \\ G(1 - kpqr) = 0 \end{cases}$, et pour que les coefficients ne soient pas

tous nuls, on doit avoir $k^2 p^2 q^2 r^2 = 1$. Posons $k_0 = \frac{1}{pqr}$.

Alors les cubiques invariantes du troisième type ont pour équation:

$$A(x^2 y + \varepsilon k_0 p^2 q z^2 y) + B(x^2 z + \varepsilon k_0 q^2 r x^2 z) + C(y^2 x + \varepsilon k_0 q^2 p z^2 x) + G\frac{(1+\varepsilon)}{2} = 0$$

$$\text{Soit } A(x^2 y + \varepsilon \frac{p}{r} z^2 y) + B(x^2 z + \varepsilon \frac{q}{r} y^2 z) + C(y^2 x + \varepsilon \frac{q}{r} z^2 x) + G\frac{(1+\varepsilon)}{2} = 0 \iff \frac{A}{r} y(rx^2 + \varepsilon pz^2) + \frac{B}{q} z(qx^2 + \varepsilon py^2) + \frac{C}{r} x(ry^2 + \varepsilon qz^2) + G\frac{(1+\varepsilon)}{2} = 0$$

Pour lui donner un aspect plus symétrique nous posons

$$u = \frac{C}{r}, v = \varepsilon \frac{A}{r}, w = \frac{B}{q} \text{ et l'équation des cubiques du troisième type est}$$

$$\boxed{\mathbf{ux(ry^2 + \varepsilon qz^2) + vy(pz^2 + \varepsilon rx^2) + wz(qx^2 + \varepsilon py^2) + G\frac{(1+\varepsilon)}{2} = 0}}$$

Dans le cas $p = q = r$ ces cubiques ont été découvertes en octobre 1883, par le mathématicien allemand Max Greiner [4]. /footnote(*) *On connaît peu d'éléments sur ce mathématicien ; Mr Knobloch directeur des Archives de Berlin-Brandenburg, me signale deux rubriques dans les éditions 1898 et 1904 du dictionnaire Poggendorff.*

- Dans le cas $\varepsilon = -1$ leur équation s'écrit

$$\boxed{\mathbf{ux(ry^2 - qz^2) + vy(pz^2 - rx^2) + wz(qx^2 - py^2) = 0}}$$

$$\text{ou encore } \begin{vmatrix} u & x & \frac{p}{x} \\ v & y & \frac{q}{y} \\ w & z & \frac{r}{z} \end{vmatrix} = 0$$

les points $P(u, v, w)$ appelé pivot de la cubique de ce type, M et M' son Ω -isoconjugué sont alignés : c'est pour cela que dans la nomenclature de Bernard Gibert cette catégorie de cubiques est désignée sous le sigle pK "pivotal cubique".

- Dans le cas $\varepsilon = +1$ leur équation s'écrit

$$\boxed{\mathbf{ux(ry^2 + qz^2) + vy(pz^2 + rx^2) + wz(qx^2 + py^2) + Gxyz = 0}}$$

On les désigne sous le vocable nK ("Non(pivotal)cubiques"). Leur interprétation est moins transparente, mais Bernard Gibert, dans son article de 93 pages déjà évoqué, montre (à partir de la page 10), en appelant $P(u, v, w)$ la "racine" de la cubique, et G son paramètre, qu'une nK est le lieu des points M tels que M et son Ω -isoconjugué M' sont conjugués par rapport à un cercle fixe.

Pour voir de magnifiques cubiques de Greiner, aller sur le splendide site de Bernard Gibert, déjà cité (*), Les cubiques de Greiner sur les cubiques nK et pK .

Le cas nK avec $p = q = r = u = v = w = 1$ est historique [1 tome 3 p 84]. Outre le fait qu'elle admet comme asymptotes d'inflexion $B'C', C'A', A'B'$ qui joignent pieds des médianes du triangle ABC , elle a trois branches (c'est une cubique tripartite) et Gergonne en 1826 environ, mit en doute l'affirmation de Poncelet que la classe d'une courbe algébrique, non singulière, de degré n était $n(n-1)$, parce qu'il ne voyait pas de cubique à laquelle on puisse mener six tangentes. Elle répond au doute de Gergonne. Désignée par cubique de Tucker-Poncelet, elle est sur le site de Bernard Gibert et pour la voir cliquer sur catalogue et choisir $K327$. Nous conseillons également aux lecteurs d'aller voir la mise à jour récente sur les cubiques de Tucker (catalogue K011...016 et Download Tucker cubics document de 9 pages en pdf).

Un programme Maple serait non seulement de tracer une cubique de Greiner mais l'animation du mouvement combiné de M et M' la décrivant.

(*) <http://perso.wanadoo.fr/bernard.gibert/> : cliquer sur classes of cubics ou sur tables

Racine carrée de $M(\alpha, \beta, \gamma)$

On se pose le problème de l'existence et la recherche de racine carrée du point $M(\alpha, \beta, \gamma)$, c'est à dire d'un point $P(u, v, w)$ avec $u + v + w \neq 0$ tel que $P * P = (u^2, v^2, w^2) = M(\alpha, \beta, \gamma)$. Ceci impose $\alpha = u^2, \beta = v^2, \gamma = w^2$, par conséquent M doit être à l'intérieur du triangle de référence. (*un prolongement intéressant serait de définir des coordonnées barycentriques "complexes"*)

$P = (\pm\sqrt{\alpha}, \pm\sqrt{\beta}, \pm\sqrt{\gamma})$, ce qui donne en théorie 8 points, mais comme $-P = P$ puisque on ne modifie pas le barycentre en multipliant ses paramètres par un scalaire non nul, il y a 4 racines carrées, sauf sur les cotés où il n'y en a que deux (car $\pm\sqrt{0}$) et aux sommets qui n'ont qu'une racine carrée : la racine d'un sommet est ce sommet.

Comme dans le corps des complexes, il est immédiat que la racine carrée d'un point à l'intérieur du triangle (frontière comprise) est le produit de l'une d'entre elles par les racines carrées du point neutre G .

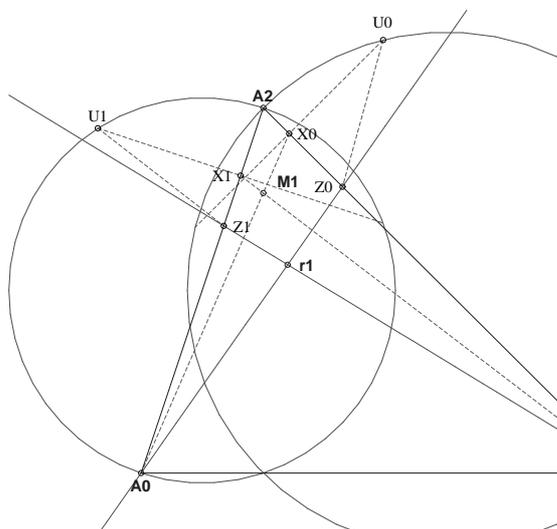
Celles-ci sont donc importantes et d'ailleurs immédiates : $G = (1, 1, 1)$, $A'_0 = (-1, 1, 1)$, $A'_1 = (1, -1, 1)$, $A'_2 = (-1, 1, 1)$, symétriques des sommets par rapport au milieu du côté opposé. Nous avons déjà remarqué plus haut que ces quatre points étant leurs propres inverses barycentriques sont également les points doubles de la transformation qui à M associe son inverse-barycentrique.

On peut démontrer (*) que X_0, X_1, X_2 étant les pieds des céviennes de M , on trace les cercles de diamètres $[A_1A_2], [A_2A_0], [A_0A_1]$, qui coupent les perpendiculaires aux cotés aux points U_0, U_1, U_2 .

Les bissectrices (en envisageant aussi bien les bissectrices extérieures qu'intérieures, on peut avoir la construction des racines carrées de M sans passer par les racines de G) des angles droits $(A_1U_0A_2), (A_2U_1A_0)$ et $(A_0U_2A_1)$ coupent les cotés $(A_1A_2), (A_2A_0)$ et (A_0A_1) en Z_0, Z_1, Z_2 respectivement. Les céviennes A_0Z_0, A_1Z_1 et A_2Z_2 se coupent en r_1 racine carrée du point M initial.

La figure ci dessous, illustre le principe de cette construction d'une racine (celle r_1 intérieure au triangle) d'un point donné M .

Construction de la racine carrée r_1 de M_1 , interne



Il serait intéressant de visualiser outre les racines de G , celles de l'orthocentre du triangle dont les coordonnées barycentriques sont (par la méthode des aires) $(\tan A_0, \tan A_1, \tan A_2)$ et même celles du point de Fermat F , point qui rend minimale la somme $MA_0 + MA_1 + MA_2$ (**)

(*) Voir par exemple page 5 de l'article de 8 pages en français de Paul Yiu en

<http://www.math.fau.edu/yiu/BarycentricFrench.doc>

(**) Pour le construire, on construit trois triangles équilatéraux extérieurs au triangle initial, tels que $A'_0A_1A_2$, les droites $A_0A'_0$ etc se coupent en F

et qui a pour composantes barycentriques $(\frac{a_0}{\sin(2\pi/3-A_0)}, \frac{a_1}{\sin(2\pi/3-A_1)}, \frac{a_2}{\sin(2\pi/3-A_2)})$.

Le lecteur de quadrature, pourra snober, mystifier, impressionner, écraser de sa science, figer, tétaniser, méduser, statuer, neutraliser son interlocuteur en lui faisant connaître le site de Kimberling (*) où en 712 pages sont répertoriés, avec leurs liens mutuels et leurs coordonnées trilineaires, 2676 points “remarquables” et répertoriés du triangle.

Pour les petits curieux ETC signifie Encyclopédia of Triangle Centers.

Tout ceci peut bien sûr se généraliser pour un tétraèdre dans l'espace à trois dimension et même un simplexe dans l'espace à n dimension.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Henri Brocard, Timoléon Lemoine : Courbes géométriques remarquables Tome 1 (Albert Blanchard 1967) page 37-38 pour l'arguésienne et les cubiques de Greiner invariantes par inversion-barycentrique : Tome 3 p 80-86 pour les cubiques anallagmatiques dont celles de Greiner.

[2] Robert Deltheil, Daniel Caire : compléments de géométrie (Baillière 1951) exercices 191 et 193.

[3] Bernard Gibert et Jean Pierre Ehrmann : spécial isocubics in the triangle plane 93 pages :

<http://perso.wanadoo.fr/bernard.gibert/downloads.html>

[4] Max Greiner : Archives de Grunert (Archiv der Mathematik und Physik) série 2, tome 1 (1884) p 130-147 (Article écrit à Regensburg october 1883).

Annexe II : Illustration en Maple

Un animateur jouant sur les déplacements des deux points initiaux est souhaité. Pour plus de symétries, on peut préalablement supposer au prix de deux affinités, le triangle initial équilatéral. Le package geometry qui permet le tracé des droites passant par un point et de parallèles, semble particulièrement adapté. Le choix de couleurs suivant le numéro des points initiaux, d'épaisseur ou de style suivant les étapes de la construction, devrait rendre le rendu du composé particulièrement clair. De même le suivi simultané et animé d'un point décrivant une courbe (droite, cercle, conique, cubique,...) du plan et de son inverse peut permettre de prévoir des résultats intéressants.

Alain Esculier(**), dont la dextérité en Maple est bien connue, a fait le programme ci-dessous, illustrant la construction du composé $M1 * M2$, en suivant les principes énumérés dans la théorie ci-dessus. (D'autres programmes du même auteur, bien plus complets, mais trop longs pour être reproduits ici, pourront être envoyés à tout lecteur en faisant la demande par mail ; ces programmes calculent les lois (produit, inverse, carré, racine carrée ...), donnent les transformés et leur construction, dessinent et animent les transformés d'un ensemble de points.

```
# =====la figure de construction =====
# ===== tracés avec A0, A1, A2 fixés ci-dessous
a0:=0:b0:=0:a1:=4:b1:=0: a2:= 1: b2:=3:
with(geometry):with(plots):
prlet:=proc(M,dx,dy,nom,couleur,polis)
pointplot(coordinates(M),symbol=circle,color=couleur),
textplot([op(coordinates(M))+[dx,dy]],nom,color=couleur,font=polis):
end:
x:=1.2;y:=2: u:=3:v:=0.5:
point(A0g,a0,b0): point(A1g,a1,b1): point(A2g,a2,b2):
line( A01 ,[A0g,A1g]): line( A12 ,[A2g,A1g]): line( A02 ,[A0g,A2g]):
point( M1 ,x,y): point( M2 ,u,v):
triangle(A012,[A0g,A1g,A2g]):
# ----- A0 -----
line(M1A0,[A0g,M1]): line(M2A0,[A0g,M2]):
intersection(X10,A12,M1A0): segment(A0X10,A0g,X10):
intersection(X20,A12,M2A0): segment(A0X20,A0g,X20):
# **
ParallelLine(X10p,X10,A02): ParallelLine(X20p,X20,A01):
intersection(H10,A01,X10p): intersection(K20,A02,X20p):
segment(X10H10,X10,H10): segment(X20K20,X20,K20):
line(LA2H10,[A2g,H10]):line(LA1K20,[A1g,K20]):
```

(*) <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>

(**) Je le remercie une fois encore, car sans lui les belles illustrations (composé, inverse, racines,...) n'auraient pas pu exister !

```

segment(A2H10,[A2g,H10]): segment(A1K20,[A1g,K20]):
intersection(U0,LA2H10,LA1K20):
line(lieu0,[A0g,U0]):
# ----- A1 -----
line(M1A1,[A1g,M1]): line(M2A1,[A1g,M2]):
intersection(X11,A02,M1A1): segment(A1X11,A1g,X11):
intersection(X21,A02,M2A1): segment(A1X21,A1g,X21):
# **
ParallelLine(X11p,X11,A01):intersection(H11,A12,X11p):
ParallelLine(X21p,X21,A12):intersection(K21,A01,X21p):
segment(X11H11,X11,H11): segment(X21H21,X21,K21):
segment(A2K21,[A2g,K21]): segment(A0H11,[A0g,H11]):
line(LA2K21,[A2g,K21]): line(LA0H11,[A0g,H11]):
intersection(U1,LA2K21,LA0H11): line(lieu1,[A1g,U1]):
# -----
intersection(Comp1,lieu0,lieu1):
# -----
Comp:=loi_cart([x,y],[u,v]):
pol:=[HELVETICA,BOLD,9]:vert:=COLOR(RGB,0,0,6,0):
graf:=display([draw(A012,color=blue),
draw(X10H10,X20K20,A0X20,A0X10,color=vert),
draw(X10,X20,A2H10,A1K20,color=vert,linestyle=3),
prlet(A0g,-0.15,0.1,"A0",blue,pol),
prlet(A1g,0,-0.1,"A1",blue,pol),
prlet(A2g,0.2,0.1,"A2",blue,pol),
prlet(M1,0,-0.15,"M1",COLOR(RGB,0.1,0,0),[TIMES,BOLD,11]),
prlet(M2,0,-0.15,"M2",COLOR(RGB,0.1,0,0),[TIMES,BOLD,11]),
prlet(X10,0.2,0,"X1",blue,pol),
prlet(X20,0.2,0,"X2",blue,pol),
prlet(H10,0,-0.2,"T1",blue,pol),
prlet(K20,-0.2,0,"S2",blue,pol),
prlet(U0,0.05,-0.1,"U0",blue,pol),
draw(lieu0,color=red,thickness=2),
draw(X11H11,X21H21,A1X21,A1X11,color=magenta),
draw(X11,X21,A0H11,A2K21,color=magenta,linestyle=3),
prlet(X11,-0.2,0,"Y1",blue,pol),
prlet(X21,-0.2,0,"Y2",blue,pol),
prlet(H11,0.2,0,"R1",blue,pol),
prlet(K21,0,-0.2,"T2",blue,pol),
prlet(U1,0.2,0,"U1",blue,pol),
prlet(Comp1,0.5,0,"M1*M2",COLOR(RGB,0.1,0,0),[TIMES,BOLD,11]),
draw(lieu1,color=red,thickness=2)
],scaling=constrained,axes=none,view=[-0.25..4.2,-0.5..3.2],title='Construction du composé M1*M2'):
graf;

```

Annexe II : relations entre les coordonnées cartésiennes et les composantes barycentriques

Lien entre coordonnées ordinaires et barycentriques : cas métrique

Nous choisissons un repère orthonormé (A_0, \vec{T}, \vec{J}) ; l'axe A_0x porté par A_0A_1 et de même sens que lui. L'axe A_0y étant orthogonal à \hat{A}_0A_1 et du même côté que A_2 .

Dans ce repère on a donc (le triangle ayant pour longueur de cotés $a = \|\vec{A_1A_2}\|$, $b = \|\vec{A_0A_2}\|$, $c = \|\vec{A_0A_1}\|$)

$$\begin{cases} \vec{A_0A_1} = c\vec{T} \\ \vec{A_0A_2} = b\cos A_0\vec{T} + b\sin A_0\vec{J} \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{T} = \frac{\vec{A_0A_1}}{c} \\ \vec{J} = \frac{\vec{A_0A_2}}{b\sin A_0} - \frac{\cos A_0}{\sin A_0} \frac{\vec{A_0A_1}}{c} \end{cases}$$

Et ainsi, $M(x, y)$ étant un point quelconque du plan : $\vec{A_0M} = x\vec{T} + y\vec{J} = x\frac{\vec{A_0A_1}}{c} + y\left(\frac{\vec{A_0A_2}}{b\sin A_0} - \frac{\cos A_0}{\sin A_0} \frac{\vec{A_0A_1}}{c}\right) =$
 $\left(\frac{x}{c} - \frac{y\cos A_0}{c\sin A_0}\right) \frac{\vec{A_0A_1}}{\underbrace{\vec{A_0M} + \vec{MA_1}}_{\vec{A_0M} + \vec{MA_1}}} + \frac{y}{b\sin A_0} \frac{\vec{A_0A_2}}{\underbrace{\vec{A_0M} + \vec{MA_2}}_{\vec{A_0M} + \vec{MA_2}}}$, soit en regroupant : $\vec{A_0M}\left(1 - \frac{x}{c} + \frac{y\cos A_0}{c\sin A_0} - \frac{y}{b\sin A_0}\right) + \vec{A_1M}\left(\frac{x}{c} - \frac{y\cos A_0}{c\sin A_0}\right) + \vec{A_2M}\left(\frac{y}{b\sin A_0}\right)$

$\frac{y \cos A_0}{c \sin A_0}) + \overrightarrow{A_2 M} \frac{y}{b \sin A_0}$ ce qui permet de déduire le lien entre les coordonnées barycentriques (relativement au triangle de référence $A_0 A_1 A_2$) et les coordonnées ordinaires dans le repère orthonormé (A_0, \vec{I}, \vec{J}) défini plus haut :

$$\begin{cases} \alpha = k \left(1 - \frac{x}{c} + \frac{y \cos A_0}{c \sin A_0} - \frac{y}{b \sin A_0} \right) & \alpha = 0 \text{ est l'équation du coté } A_1 A_2 \\ \beta = k \left(\frac{x}{c} - \frac{y \cos A_0}{c \sin A_0} \right) & \beta = 0 \text{ est l'équation du coté } A_0 A_1 \\ \gamma = k \frac{y}{b \sin A_0} & \gamma = 0 \text{ est l'équation du coté } A_0 A_1 \end{cases}$$

Ces formules contiennent celles du cas affine en faisant $b = c = 1$ et $A_0 = \frac{\pi}{2}$.

En éliminant $k = \alpha + \beta + \gamma$ on a les formules inverses : $\begin{cases} \frac{\beta}{k} = \frac{x}{c} - \frac{y \cos A_0}{c \sin A_0} \\ \frac{\gamma}{k} = \frac{y}{b \sin A_0} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} \mathbf{x} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \mathbf{c} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \mathbf{b} \cos A_0 \\ \mathbf{y} = \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \mathbf{b} \sin A_0 \end{cases}$

Ces formules nous permettront plus loin d'exprimer la loi de groupe sous forme analytique en coordonnées cartésiennes, ce qui permet une visualisation des points composés ou de l'inverse en Maple, ainsi que le suivi du lieu du composé $M * M'$, lorsque les points M, M' décrivent une droite, une courbe, une conique, ainsi que dans les mêmes conditions de l'inverse d'un point M non situé sur les cotés. Des animations peuvent rendre la visualisation plus percutante.

Formules analytiques de la loi de groupe en coordonnées cartésiennes

Nous avons vu plus haut que $\begin{cases} \mathbf{x} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \mathbf{c} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \mathbf{b} \cos A_0 \\ \mathbf{y} = \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \mathbf{b} \sin A_0 \end{cases}$

Avec des notations tellement évidentes que je ne vous ferais pas l'injure de vous les détailler, on a :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(M * M') = \frac{\beta \beta'}{\alpha \alpha' + \beta \beta' + \gamma \gamma'} \mathbf{c} + \frac{\gamma \gamma'}{\alpha \alpha' + \beta \beta' + \gamma \gamma'} \mathbf{b} \cos A_0 \\ \mathbf{y}(M * M') = \frac{\gamma \gamma'}{\alpha \alpha' + \beta \beta' + \gamma \gamma'} \mathbf{b} \sin A_0 \end{cases}$$

Il "suffit" alors de remplacer α, β, γ en fonction de x, y, z ainsi que α', β', γ' en fonction de x', y', z' , pour avoir l'expression de la loi $*$ en coordonnées cartésiennes.

(Nous rappelons, pour éviter au lecteur de prendre un torticolis en se reportant plusieurs pages plus haut, que :

$$\begin{cases} \alpha = k \left(1 - \frac{x}{c} + \frac{y \cos A_0}{c \sin A_0} - \frac{y}{b \sin A_0} \right) \\ \beta = k \left(\frac{x}{c} - \frac{y \cos A_0}{c \sin A_0} \right) \\ \gamma = k \frac{y}{b \sin A_0} \end{cases}$$

Ce rappel permet aussi de remarquer qu'on peut tracer une courbe dont on con-

nait une équation barycentrique, $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, puisque ces formules permettent d'obtenir une équation cartésienne.)

Ce qui est immédiat puisque : $\alpha \alpha' = k k' \left(1 - \frac{x}{c} + \frac{y \cos A_0}{c \sin A_0} - \frac{y}{b \sin A_0} \right) \left(1 - \frac{x'}{c} + \frac{y' \cos A_0}{c \sin A_0} - \frac{y'}{b \sin A_0} \right)$

$\beta \beta' = k k' \left(\frac{x}{c} - \frac{y \cos A_0}{c \sin A_0} \right) \left(\frac{x'}{c} - \frac{y' \cos A_0}{c \sin A_0} \right)$ et $\gamma \gamma' = k k' \left(\frac{y}{b \sin A_0} \right) \left(\frac{y'}{b \sin A_0} \right)$

et donc

$$\alpha \alpha' + \beta \beta' + \gamma \gamma' = k k' \left(\left(1 - \frac{x}{c} + \frac{y \cos A_0}{c \sin A_0} - \frac{y}{b \sin A_0} \right) \left(1 - \frac{x'}{c} + \frac{y' \cos A_0}{c \sin A_0} - \frac{y'}{b \sin A_0} \right) + \left(\frac{x}{c} - \frac{y \cos A_0}{c \sin A_0} \right) \left(\frac{x'}{c} - \frac{y' \cos A_0}{c \sin A_0} \right) + \left(\frac{y}{b \sin A_0} \right) \left(\frac{y'}{b \sin A_0} \right) \right)$$

Ainsi en posant

Formules analytiques en cartésiennes de la loi de groupe

$$D = \left(1 - \frac{x}{c} + \frac{y \cos A_0}{c \sin A_0} - \frac{y}{b \sin A_0} \right) \left(1 - \frac{x'}{c} + \frac{y' \cos A_0}{c \sin A_0} - \frac{y'}{b \sin A_0} \right) + \left(\frac{x}{c} - \frac{y \cos A_0}{c \sin A_0} \right) \left(\frac{x'}{c} - \frac{y' \cos A_0}{c \sin A_0} \right) + \left(\frac{y}{b \sin A_0} \right) \left(\frac{y'}{b \sin A_0} \right)$$

$$\mathbf{x}(M * M') = \frac{(x/c - y \cos A_0 / c \sin A_0)(x'/c - y' \cos A_0 / c \sin A_0)}{D} \mathbf{c} + \frac{(y/b \sin A_0)(y'/b \sin A_0)}{D} \mathbf{b} \cos A_0$$

$$\mathbf{y}(M * M') = \frac{(y/b \sin A_0)(y'/b \sin A_0)}{D} \mathbf{b} \sin A_0$$

Il ne reste plus qu'à utiliser cette formule en Maple, après avoir choisi les éléments d'un triangle, c'est à dire b, c, A_0 .

Formules analytiques de l'inverse, en coordonnées cartésiennes

En utilisant tout ce qui précède, on sait que M^{-1} a pour coordonnées barycentriques $(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})$.

On rappelle $\begin{cases} \alpha = k \left(1 - \frac{x}{c} + \frac{y \cos A_0}{c \sin A_0} - \frac{y}{b \sin A_0} \right) \\ \beta = k \left(\frac{x}{c} - \frac{y \cos A_0}{c \sin A_0} \right) \\ \gamma = k \frac{y}{b \sin A_0} \end{cases}$

Comme $\begin{cases} \mathbf{x} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \mathbf{c} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \mathbf{b} \cos A_0 \\ \mathbf{y} = \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \mathbf{b} \sin A_0 \end{cases}$

on a

$$\begin{cases} x(\mathbf{M}^{-1}) = \frac{1/\beta}{1/\alpha + 1/\beta + 1/\gamma} \mathbf{c} + \frac{1/\gamma}{1/\alpha + 1/\beta + 1/\gamma} \mathbf{b} \cos \mathbf{A}_0 \\ y(\mathbf{M}^{-1}) = \frac{1/\gamma}{1/\alpha + 1/\beta + 1/\gamma} \mathbf{b} \sin \mathbf{A}_0 \end{cases}$$

On pose $D1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$ et alors comme $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{(1-x/c+y \cos A_0/c \sin A_0 - y/b \sin A_0)}$ $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{(x/c - y \cos A_0/c \sin A_0)}$ et $\frac{1}{\gamma} =$

Formules analytiques en cartésiennes de l'inverse

$$D1 = \frac{1}{(1-x/c+y \cos A_0/c \sin A_0 - y/b \sin A_0)} + \left(\frac{x}{c} - \frac{y \cos A_0}{c \sin A_0} \right) + \frac{1}{\gamma} + \frac{b \sin A_0}{y}$$

$$x(\mathbf{M}^{-1}) = \mathbf{c} \frac{1}{D1(x/c - y \cos A_0/c \sin A_0)} + \frac{b \sin A_0}{D1 y} \mathbf{b} \cos \mathbf{A}_0$$

$$\frac{b \sin A_0}{y}, \text{ on a } y(\mathbf{M}^{-1}) = \frac{b \sin A_0}{D1 y} \mathbf{b} \sin \mathbf{A}_0$$