L.G.Vidiani 64 rue de l'EUROPE 21121 FONTAINE LÈS DIJON TEL : 03 80 56 65 54
Adresse email Internet : *lg_vidiani@ipac.fr*

Racine carre d'une fonction

(zip2 TEX agre49q.tex) version Zip II : 7 01 2005 10h00

Racine carrée fonctionnelle d'une fonction

Introduction

Un problème ancien et très intéressant (dont l'énoncé est donné en annexe) (*) limitant les hypothèses au cas où f est strictement croissante et de classe C^2, et d'ailleurs corrigé dans [2] et [6], m'a initié pour la première fois à la notion de racine carrée fonctionnelle d'une fonction f donnée, c'est à dire à la recherche de fonctions g telles que $g^2(x) = g(g(x)) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Le but de cet article est de faire connaître aux lecteurs de Quadrature, les résultats beaucoup plus généraux sur les racines n-ième fonctionnelles d'une fonction f, en les illustrant par un exemple et un programme Maple et de terminer en montrant la modernité et la richesse de cette question qui intervient dans de multiples domaines d'actualité et en pointe.

Le plan suivi est le suivant :

- **Survol historique**
- **Les formules dans le cas général et application à un exemple**
- **Exemples généraux et applications**
- **Pour en savoir plus**
- **Bibliographie**
- **Un programme Maple**
- **Annexe : énoncé du problème d'Agrégation Calcul Différentiel et Intégral 1949**

Survol historique

C'est Charles Babbage, le père de l'informatique moderne, qui dans des articles de 1815, 1816 et 1820, eut l'idée le premier de recherche les racines carrées fonctionnelles de l'identité : trouver les fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que $g^2(x) = g(g(x)) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Abel en 1826 donna une méthode de linéarisation, par l'intermédiaire de l'équation fonctionnelle dite d'Abel $f(F(x)) = f(x + c)$. Hardy montra en 1924 que $exp(x)$ avait une infinité de racines carrées fonctionnelles. Les recherches par google citées ci-dessous permettront aux lecteurs de trouver le foisonnement des idées et méthodes sur les équations fonctionnelles.

Les formules générales et un exemple

Les formules générales que nous donnons ci-dessous sont extraites du livre [4], ouvrage passionnant auquel nous invitons les lecteurs de Quadrature à se reporter, en particulier pour les démonstrations.

Je me contente de donner les résultats et de montrer comment l'appliquer dans l'exemple particulier $g(g(x)) = -x$, tiré de [1], où une solution particulière est donnée en utilisant la théorie des graphes.

Rappelons les notations : E est un ensemble, f une fonction donnée telle que $f(E) = E$ (en anglais on dit que E est un "modulus set"), et n étant un entier strictement positif, on cherche une racine $n-$ième fonctionnelle g, fonction inconnue de E dans E, telle que $g^n(x) = f(x),\ \forall x \in E$.

(Dans l'exemple $n = 2$ et $E = \mathbb{R}$).

On définit d'abord une relation d'équivalence sur E : On dira de $x, y \in E$ sont équivalents si et seulement si il existe des entiers naturels m, n, tels que $f^n(x) = f^m(y)$. On note $C_f(x)$ l'orbite de x. *(Dans l'exemple $f(x) = -x$ et l'orbite de x est l'ensemble des y tels que $y = (-1)^{m+n}x$, et est donc l'ensemble $\{x, -x\}$). (Par contre si $f(x) = \frac{x}{2}$ par exemple, l'orbite de x est plus compliquée car y doit vérifier $(\frac{x}{2})^n = (\frac{y}{2})^m$ et il faut discuter suivant le signe de x et de y et la parité de m, n)*

On définit ensuite l'ensemble $\mathfrak{E}_k[f]$ avec $k \in \mathbb{N}$, ensemble des $x \in E$ pour lesquels il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $f^{j+k}(x) = f^j(x)$ (j peut dépendre de x et on note $J_k(x)$, le plus petit qui convient) .

(Dans l'exemple avec $f(x) = -x$, la condition d'appartenance à $\mathfrak{E}_k[f]$ est $(-1)^j[(-1)^k - 1]x = 0$ et ainsi $\mathfrak{E}_{2p}[f] = \mathbb{R}$ tandis que $\mathfrak{E}_{2p+1}[f] = \{0\}$).

On commence par l'exemple de Babbage (1815) $\Phi^n(x) = x$ ($f = id_E$), car celui-ci intervient dans la solution générale de $g^n(x) = f(x)$.

(*) *Qui m'avait servi de problème d'entraînement supplémentaire au début des années 60 lorsque je préparais le concours d'Agrégation Mathématique, ayant trouvé que je n'avais pas assez de sujets entre Vanves et l'Université !*

Soit $1 = n_0 < ... < n_r = n$ les diviseurs de n. et soit $E = \bigcup_{i=0}^{r} \bigcup_{j=1}^{n_i} U_j^i$ une partition de E telle que les ensembles $U_1^i, ..., U_{n_i}^i$ soient équipotents (alias de même cardinal).

Soit $\varphi_{i,j}$, appelé germe, une fonction bijective arbitrairement choisie de U_j^i vers U_{j+1}^i pour $1 \le i \le r$ et $1 \le j \le n_i - 1$, alors la solution générale de l'équation de Babbage $\Phi^n(x) = x$, est définie par ([4] p 289) :

$$\boxed{\mathbf{\Phi(x)} = \begin{cases} \mathbf{x} & \textbf{pour } x \in U_1^0 \\ \varphi_{\mathbf{i,j}}(\mathbf{x}) & \textbf{pour } x \in U_j^i\mathbf{,}\ j = 1, ..., n_i - 1,\ \ge 1 \\ \varphi_{\mathbf{i,1}}^{\mathbf{-1}}(...(\varphi_{\mathbf{i,n_i-1}}^{\mathbf{-1}}(\mathbf{x}))...) & \textbf{pour } x \in U_{n_i}^i,\ i \ge 1 \end{cases}}$$

Dans le cas $n = 2$, $E = \mathbb{R}$, on a $n_0 = 1$, $n_1 = 2$, $r = 1$ et alors $E = U_1^0 \bigcup U_1^1 \bigcup U_2^1$ et la solution générale de l'équation de Babbage, $\Phi^2(x) = x$, est dans ce cas : $\boxed{\mathbf{\Phi(x)} = \begin{cases} \mathbf{x} & \textbf{pour } x \in U_1^0 \\ \varphi_{\mathbf{1,1}}(\mathbf{x}) & \textbf{pour } x \in U_1^1 \\ \varphi_{\mathbf{1,1}}^{\mathbf{-1}}(\mathbf{x}) & \textbf{pour } x \in U_2^1 \end{cases}}$, *(le choix de $U_1^0 = \{0\}$ et de $\varphi_{1,1}(x) = x + 1$ avec $U_1^1 = \bigcup_{p=0}^{+\infty}]2p, 2p+1]$, donne l'exemple de l'équation de Babbage qui est associée à [1])*. Ce mode de construction est d'ailleurs utilisé dans l'exemple référencié ci dessous dans les exemples généraux (Monthly octobre 1968 p 915).

Passons maintenant à l'équation générale $g^n(x) = f(x)$, [4] p 293-294 donne alors :

On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $E = \mathfrak{C}_k[f]$ *(dans l'exemple $g^2(x) = -x$, $k = 0$ convient)*.

On appelle Q l'ensemble des orbites sous f (*) *(dans l'exemple $g^2(x) = -x$ on peut prendre $Q = \mathbb{R}^+$)*, alors [4] p 293-295, prouve qu'on peut construire une décomposition de Q sous la forme $Q = \begin{cases} \bigcup_{\mathbf{i=0}}^{\mathbf{s}} \bigcup \mathbf{V_j^i} & \text{pour } k \ge 1 \\ \bigcup_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{V_j^0} & \text{pour } k = 0 \end{cases}$, avec $m_i = \frac{n}{n_i^*}$ et $1 = n_0^* < .... < n_s^*$ les diviseurs de n qui sont premiers avec k. Si $k \ge 1$, alors il existe d'après Bezout, un couple unique d'entiers positifs p_i, q_i tels que $p_i n_i^* - q_i k = 1$. Si $k = 0$ on prend $p_0 = 1$; enfin les V_j^i sont égaux aux U_j^i non vides associés à une solution (arbitraire) de l'équation de Babbage $\Phi^n(x) = x$ sur Q, et enfin équipotents à i fixé.

(pour notre exemple $g^2(x) = -x$, on a $n = 2$, $k = 0$, $p_0 = 1$ et $Q = V_1^0 \bigcup V_0^0$)

Soit A un ensemble arbitraire, contenant exactement un élément de chaque orbite pour la relation d'équivalence relative à g. *(pour l'exemple on peut prendre $A = \mathbb{R}^+$ mais on pourrait concevoir des ensembles plus compliqués par exemple $A = (R^+ - \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}^-$ ou des unions d'intervalles comme $A = [0,1] \cup]-1,-2[\cup [2,3] \cup ...$)*.

Enfin $\mu = \mu(x)$ est choisi tel que $f^\mu(A \cap C_g(x)) = x$. *(Dans l'exemple $f(x) = -x$, et on peut choisir $\mu = 0$)*.

Alors la solution générale de $g^n(x) = f(x)$ est donnée par la formule :

$$\boxed{\mathbf{g(x)} = \begin{cases} \mathbf{f^\mu(A \cap \Phi[C_f(x)])} & \textbf{chaque fois que } C_f(x) \in V_j^i,\ j = 1, ..., m_i - 1 \\ \mathbf{f^{\mu+p_i}(A \cap \Phi[C_f(x)])} & \textbf{chaque fois que } C_f(x) \in V_{m_i}^i \end{cases}}$$

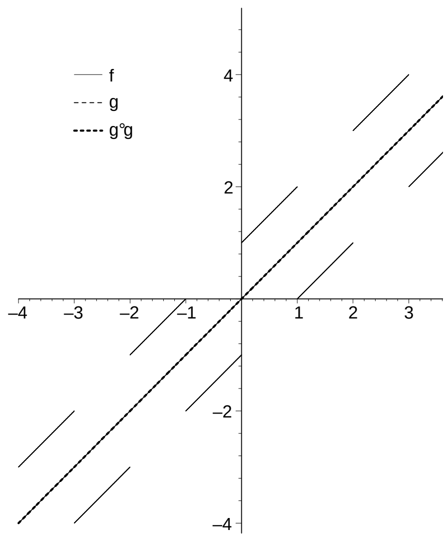
Dans l'exemple $m_0 = 2$ et la solution générale associée au choix de A comme il a été imposé, est donnée par $g(x) = \begin{cases} \Phi(x) & \text{pour } x \in V_1^0 \\ -\Phi(x) & \text{pour } x \in V_2^0 \end{cases}$. On prenant pour Φ l'exemple mis en évidence dans l'équation de Babbage, on retrouve l'exemple donné dans [1].

Ci-dessous voici quelques graphes illustrant les propos précédents. Évidemment en vous rendant sur le site d'Alain Esculier (**) vous aurez d'une part plus d'exemples variés et d'autre part la couleur en plus ! et enfin les programmes variés et complets.

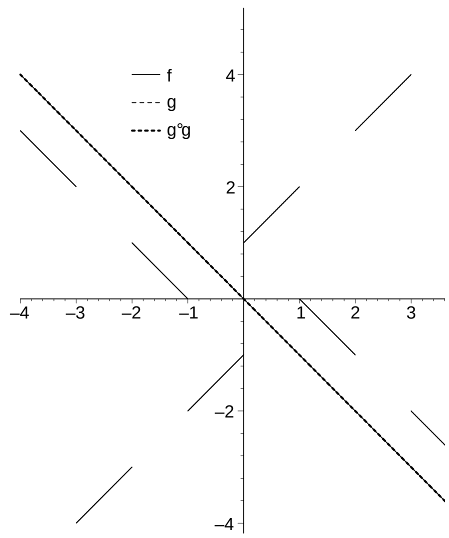
(*) *J'utilise les notations de [4] : il faut comprendre sous ensemble de E comprenant un et un seul représentant de chaque orbite;*

(**) *À l'adresse http : //aesculier.chez.tiscali.fr/ cliquer sur "Maple", puis sur "racine de f". En profiter pour explorer ce site très riche, dans ses autres rubriques !*

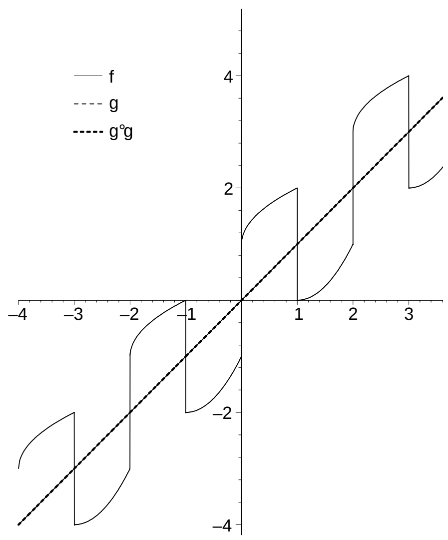
Babbage, f=id, germe x+1



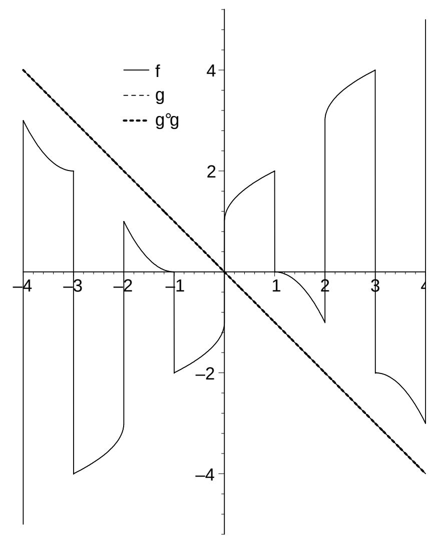
"l'exemple", f=-id, germe=x+1



Babbage, f=id, germe=sqrt()



"l'exemple", f=-id, germe=sqrt()



Il faut lire ces graphes avec continuité à droite pour $x > 0$, à gauche pour $x < 0$ et $g(0) = 0$. Dans le cas où le germe est en racine carrée, nous avons laissé, pour un meilleur rendu, les lignes de rappel des points de discontinuité de g.

Exemples généraux et applications

On généralise sans peine la définition de racine carrée fonctionnelle de f, fonction g vérifiant $g \circ g = f$. Si $k \in \mathbb{N}^*$ toute fonction g vérifiant $g^k = \underbrace{g \circ g \circ ... \circ g}_{k} = f$ s'appelle une racine itérée d'ordre k de f et on la note $f^{1/k}$. Si $(p, q) \in \mathbb{N} \times N^*$ et si $g^{p/q} = (g^{1/q})^p = f$ alors g est appelée itérée fractionnaire de f. (on peut aussi la définir par $g^q = f^p$).

Comme on a le morphisme évident $f^a \circ f^b = f^{a+b}$ on peut, si f est inversible définir le groupe d'itération de f, ensemble des f^n avec $n \in \mathbb{Z}$, si f n'est pas inversible on a seulement une structure de semi-groupe (ou monoïde additif unifère, c'est à dire magma associatif, additif et unifère) et $n \in \mathbb{N}$.

En théorie des jeux [1] et des graphes Rufus Isaac a donné l'exemple de l'équation $g(g(x)) = ax + b$ dont Menger donna la solution si $a > 0$ $g(x) = x\sqrt{a} + \frac{b}{1+\sqrt{a}}$. Si $a < 0$ le problème est beaucoup plus difficille et le lecteur pourra s'entraîner à trouver des solutions non continues avec plusieurs composantes connexes, par exemple avec $a=-1, b=0$ ou $a=-\frac{1}{2},\ b=0$. (*)

Une solution évidente de $g(g(x))=x$ dans l'intervalle $[0,1]$ est l'identité, mais on peut aussi prouver qu'il y a une infinité de solutions continues décroissantes (l'une évidente étant $g(x)=1-x$, d'autres pouvant être définies par un germe arbitraire dans l'intervalle $[0,a]$ où $0<a<1$ est choisi.). (**)

S'il n'y a pas toujours unicité, il peut aussi ne pas il y avoir existence. Par exemple $g(g(z))=az^2+bz+c$ avec $a\neq 0$ n'a aucune racine carrée fonctionnelle recherchée dans $\mathcal{F}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ [8]. Par exemple l'équation $g(g(z))=z^2-2$, n' a pas de solution g.

Par contre si on se limite aux fonctions réelles on a par exemple $f(x)=x^2,\ g(x)=f^{1/2}(x)=|x|^{\sqrt{2}}$.

Un critère facile, permettant de démontrer que f n'est le carré d'aucune fonction est par exemple le suivant : a,b,c étant des points d'un ensemble E, avec $f(a)=f(b)=a,\ f(c)=b$ et a le seul point fixe et enfin pour tout x différent de a,b on suppose $f(x)\neq a$. (voir [5] ou le bulletin APMEP 415).

Dans certains cas on peut calculer exactement la racine itérée fonctionnelle : par exemple en théorie de la chute libre d'un corps pesant de masse m, si la vitesse v_0 est connue à l'altitude (l'axe des z est orienté positivement vers le bas) $z_0=0$ et mesurée v_1 à l'altitude $1=z_1=z_0+\Delta z<z_0$, avec l'accélération g, la conservation de l'énergie donne $\frac{1}{2}mv_0^2+mg\Delta z=\frac{1}{2}mv_1^2$, donc $v_1=f(v_0)=\sqrt{v_0^2+2g}$. Posant $v(z)=\sqrt{v_0^2+2gz}$, il est alors immédiat de vérifier que la vitesse $v(z)$ au point d'altitude z est donnée par $v(z)=f^z(v_0)=\sqrt{v_0^2+2gz}$. Formule que l'on peut vérifier pour $z=0,\ z=1,\ z=\frac{1}{2}$ (à demi-chute) [3].

Voici quelques cas classiques où l'on peut facilement expliciter des racines itérées d'ordre $k\in\mathbb{N}*$ $(g^k(x)=f(x))$: $f(x)=ax,\ g(x)=f^{1/k}(x)=\sqrt[k]{a}x$; La solution trouvée est même C_∞. Pour une méthode très particulière dans le cas $n=2$ voir [2].

$f(x)=x+b,\ g(x)=f^{1/k}(x)=x+\frac{x}{b}$.

Si $f(x)=\sqrt{x+1}-1$, et $n=2$, le lecteur pourra vérifier que $g(x)=(x+1)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}-1$ est une solution de $g^2=f$ de classe infinie sur $\mathbb{R}^+$.

Le lecteur pourra, en additif à [2], constater que la seule racine carrée C_2 est la transmuée, par la fonction I (voir dans l'annexe, énoncé du problème, notation II-(1)) de la fonction constante $k=\sqrt{f'(0)}$.

La théorie des rotations planes, nous permet même d'obtenir une racine $k-$ième d'une matrice de rotation dans $\mathbb{R}^2$ euclidien : $f=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ alors $f^{\frac{1}{k}}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{k} & -\sin\frac{\theta}{k}\\ \sin\frac{\theta}{k} & \cos\frac{\theta}{k}\end{bmatrix}$.

Par contre il y a des exemples (par exemple $f(x)=x^2+1$) où il semble impossible d'expliciter une racine fonctionnelle ; par contre la méthode numérique du perceptron (voir ci-dessous) permet d'en obtenir une évaluation numérique discrète.

Problème de la direction asymptotique

Si f n'a pas de direction asymptotique, g ne peut en avoir : en effet $\frac{f(x)}{x}=\frac{g(g(x))}{g(x)}\frac{g(x)}{x}$, et si g avait une direction asymptotique de pente A,alors f en aurait une de pente A^2.

On peut alors construire un exemple de fonction f croissante, satisfaisant aux hypothèses du problème d'Agrégation 1949, et sans direction asymptotique $f(x)=Ax+B(x+1)\sin(ln(x+1))$ avec $A=k^2-\ell$ et $B=\ell$ et $k^2=\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $0<\ell<\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\approx 0.29$; il suffit de prendre $\ell=\frac{e}{10}$ ou $\ell=\frac{1}{\pi^2}$ ou encore $\ell=\frac{1}{e^2}$.

Nous mettons le lecteur futé de Quadrature, au défi de trouver un exemple de fonction f croissante, avec direction asymptotique, telle qu'il existe une de ses racines carrées fonctionnelles, sans direction asymptotique.

Contrairement à ce que pourrait laisser penser l'ancienneté du sujet, les applications des racines fonctionnelles sont non seulement nombreuses, mais d'actualité. La liste ci-dessous n'est pas exhaustive :

En théorie du Chaos, la notion de racine fonctionnelle intervient pour la recherche des périodes. (voir le théorème de Li et Yorke).

En analyse boursière, en marketing, économie (par exemple indice des prix), les résultats connus au bout d'une semaine ou d'un mois sont analysés pour prévoir ce qu'il faudrait envisager pour les jours ou les semaines intermédiaires.

Dans l'industrie (filetage, laminage, alambic, distillerie,...), on ne connait que le résultat à obtenir (diamètre du fil, épaisseur des plaques de métal, après passage dans les presses, taux d'alcool,...), et le problème est de savoir combien de machines faisant le même effet, faut-il placer pour obtenir le diamètre, l'épaisseur, le taux désirés. [3]

En théorie de l'intelligence artificielle (science au carrefour de la physique, des mathématiques, de la logique, de l'informatique et de la biologie), le MLP : perceptron multicouches (en anglais MultiLayer Percetron), objet

(*) *Par exemple si* x *a pour développement en base* 10 $x=[x]+0,a_1a_2a_3a_4....$ *on peut prendre si* $[x]=b_0+10b_1+....,$ $g(x)=-\frac{b_1}{\sqrt{2}}+10b_0+....-\frac{a2}{2*10}+\frac{a_1}{10^2}+.....$ *; pour une solution générale voir [4], [5].*

(**) *The American Mathematical Monthly octobre 1968 p 915* mathématique simulant le fonctionnement des neurones, permet au moyen de plusieurs cycles d'apprentissages qui, par ajustement progressif, déterminent les poids, de trouver une approximation numérique d'une solution de certaines équations fonctionnelles (par exemple $g(g(x)) = f(x)$, une racine carrée fonctionnelle de f donnée, g inconnue) [3]. a et b étant deux fonctions simulées par deux perceptrons multicouches joints, on contraint, par apprentissage (qui peut comprendre plusieurs centaines voire milliers de cycles et durer plusieurs heures), les poids de ces deux perceptrons à être égaux (ce qui donne la condition $a = b$) et on effectue un apprentissage avec pour cible de l'architecture globale des images $f(x_i)$. L'apprentissage recherche alors les poids optimaux qui minimisent la somme $\sum_{i=1}^{N}[f(x_i) - a(b(x_i))]^2$. Au final $a = b = g$ avec $g^2 = f$. Ceci étant bien sûr généralisable à la recherche de racines fonctionnelles d'ordre supérieur à 2 de f. Comme dans l'article de Douady et Hubbart dans la revue "pour la science" de juillet 1990 page 6 et 7 à propos du chaos, une question, pas si anodine qu'il apparaît en premier abord est "comment choisit-on les a et b initiaux ?

Pourquoi un lecteur maîtrisant très bien Maple, ne pourrait-il pas faire un programme simulant le perceptron pour la résolution de $f(f(x)) = x^2 + 1$ comme dans [3] ? J'avais il y a quelques années fait un programme Maple simulant les lois de Kirchoff et la circulation du courant dans un réseau aléatoire, alors pour un informaticien plus averti, cela devrait être possible ? Je suis intéréssé bien sûr par toute réalisation concrète !

Plus on découvre d'exemples et d'applications, plus on est obligé de convenir que la question des racines fonctionnelles, sont vraiment au croisement de plusieurs sciences, c'est un domaine "multi-strates" comme l'enfer de Dante et sans notation péjorative aucune, une véritable usine à gaz, boite de Pandore, boite de "Gracieuse et Percinet" des contes de Marie Catherine Le Jumel de Barneville, Comtesse d'Aulnoy 1698.

Par exemple en 1982 [9] le physicien John Joseph Hopfield, de l'Université de Princeton, met en avant l'isomorphisme de son modèle de neurones artificiels avec le modèle d'Ising (modèle des verres de spins et de l'aimantation). (*)

Dans [10] il est montré comment utiliser les réseaux de neurones pour le problème géographique de prédiction de l'occupation du sol en milieu montagnard méditerranéen.

Pour en savoir plus

Un réflexe d'un lecteur curieux et réactif (**) (vous l'êtes puisque vous lisez Quadrature, alors activez vous !) est d'avoir automatiquement le réflexe de rechercher les mots significatifs, les noms propres de cet article, dans un index de livre, dans des dictionnaires et par google.

Voici une liste de mots clefs, qui mis en arguments de recherche sous google permettra au lecteur de trouver (généralement en tête des résultats) des sites et des articles qui lui permettront d'approfondir tous les points précédemment évoqués et que je n'ai fait que survoler. Bien sûr les noms propres évoqués dans cet article complèteront cette liste, ainsi que les titres des articles accessibles sur le web, dont je donne les noms dans la bibliographie. De plus il ne faut pas oublier la consultation dans les bibliothèques universitaires.

Iterative roots, functional equation, iterative roots and fractional iteration, generates the multinomial (pour l'équation $g(g(x)) = e^x$), computing iterative roots with neural networks, addition to backpropagation for computing functional roots, physics without laws, Interpolation of fractional Iteration, difference and functional equations, Marek Kukzma, Karol Baron.

Bibliographie

[1] C. Berge, graphes et hypergraphes (Dunod 1970) p 37-38.
[2] A. Delachet, calcul différentiel et intégral (PUF 1956) p 53-61 et 117-126.
[3] Lars Kindermann : computing iterative roots with neural networks. (1998)
An addition to back propagation for computing functional roots. (1998)
A framework for solving functional equations with neural networks (2001)
Finding the optimal continuous model for discret data by neural network interpolation of fractional iteration. (2002) (avec un historique très intéréssant)
Physics without Laws - Making exact predictions with data based methods.
(L'aspect affine par morceaux d'une solution dans le graphe de la figure 2 me laisse songeur)
A comparison of different Neural methos for solving iterative roots. (2000)
Computing iterative roots with second order training methods. (2001)

(*) *Images de la Physique du CNRS 1988 p 22-28, où le lien est fait avec le bruit en $\frac{1}{f}$, donc avec la dérivation fractionnaire, les multicouches dans le numéro de 2000 p 74-80, pour la science février 2001 p 86-91, où la renormalisation (élimination des infinis) chère à Feynmann et Fermi est même évoquée quant à la connexion avec la théorie cinétique des gaz (équation de Boltzmann) et les transitions de phases elle est faite dans Math appli, revue mensuelle de la SMAI, janvier 2001 p 29-39.*

(**) *Donc non apathique comme une larve au métabolisme underground !*

Tous ces articles très illustrés, sont accessibles sur le web, par google dès qu'on connait leur titre ; mais le lien (adresse mail de l'auteur) semble ancien.

[4] Marek Kukzma : Functional equations in a single variable (Warszawa 1968) p 288-307.

[5] Marek Kuczma, Bogdan Choczewski, Roman Ger : Iterative functional equations (Cambridge university press 1990) p 421-471.

[6] J. Lelong-Ferrand, F. Combes, D. Leborgne, M. Viallard, problèmes d'analyse maîtrises et mathématiques (Dunod 1967) p 72-74.

[7] Problème de Concours général 1983.

[8] R. Rice, B. Schweizee, A. Sklar : American Mathematical Monthly, avril 1980 p 252-263.

[9] Claude Touzet : les réseaux de neurones artificiels, introduction au connexionisme, *http : //saturn.epm.prnl.gov/ ∼ touzetc/Book/Bouquin.htm.*

[10] Nathalie Vialaneix : réseaux de Neurones, mémoire de DEA juin 2002, Université Paul Sabatier Toulouse.

[11] L. G. Vidiani, CNS $f^2 = g$, Revue de mathématiques spéciales avril 1984.

Programme Maple

Voici grace à Alain Esculier une simulation Maple :

(Pour éviter au lecteur de recopier ce programme, celui-ci peut être envoyé par mail, ainsi que des simulations plus élaborées, à tout lecteur en faisant la demande)

```
> restart :
> f := x-> ln(x+1)/2;# x/4;#
> f_moins_1:= unapply(solve(f(y)-x,y),x);
> # —— [u, v] intervalle de déf. de g ———
> u := 1; v := 2;
> # u:=evalf((v+f(v))/2):
> # ainsi on est sûr d'assurer la condition "entre v et f(v)"
> g := x-> f(v)+(x-u)*(u-f(v))/(v-u);
> printf("La condition : u = %a entre f(v) = %a et v = %a est-elle vérifiée ?", u, evalf(f(v),5), v);
#——- procédure calculant g en un point x à eps près ——-
> calculg := proc(x,eps)
> local pas, gt, t, k, k0, i, tamp, n0, t0, t1, t2;
> global u,v,f,g,f_moins_1:
> pas := (v-u)/10. :
> if evalf(x-v) > 0 then # ——— à droite de v ——-
> t1 := u : t2 := v :
> for k from 1 while evalf(t1-x) < 0 do
> tamp := f_moins_1(t1) : t1 := t2 : t2 := tamp : od;
> k0 := k-2 :
> t0 := u : gt := g(u) : t := t0 :
> for i from 1 to 500 while evalf(abs(t-x)) > eps do
> if evalf(x-t) < 0 then t0 := t0-pas : pas := pas/10 : fi;
> t0 := t0+pas : t := t0 : gt := g(t) :
> for k from 1 to k0 do
> tamp := t : t := f_moins_1(gt) : gt := tamp :
> od :
> od;
> elifevalf(x-u) >= 0 then
> tamp := g(x) # ——— sur [u,v] ——-
> else # ——— à gauche de u ——-
> t1 := u : t2 := v :
> for k from 1 while evalf(t1-x) > 0 do
> tamp := f(t2) : t2 := t1 : t1 := tamp : od;
> k0 := k-1 :
> t0 := v : gt := f(v) : tamp := t0 : t := t0 :
> for i from 1 to 500 while evalf(abs(tamp-x)) > eps do
> if evalf(t-x) < 0 then t0 := t0+pas : pas := pas/10 : fi;
> t0 := t0-pas : gt := g(t0) : t := t0 :
> for k from 1 to k0 do
> tamp := gt : gt := f(t) : t := tamp : tamp := gt :
> od :
```

```
> od;
> fi;
> tamp;
> end :
> # —— vérification g@g =f en quelques points ———
> eps := 10^(-10);
> pas := 0.5;
> tt := time() :
> evalf([seq([calculg(0.02+i*pas, eps), calculg(calculg(0.02+i*pas, eps), eps) - f(0.02+i*pas)], i = 0..20)]);
> time() - tt;
> # ——— TRACÉ DU GRAPHE DE g ——————
> eps := 10^(-4);
> with(plots) :
> display([pointplot([[u, g(u)], [v, g(v)]], symbol = circle, color = black),
> plot(g, u..v, color = cyan, thickness = 2),
> plot([f, x-> calculg(x, eps)], 0..6, color = [red, blue])
> ], scaling = constrained);
>
```

Dans un de ses programmes Maple plus récents, Alain Esculier a remarqué qu'il pouvait facilement déduire d'une solution g de $g^2 = f$, une solution g_1 racine carrée fonctionnelle de $-f$:

Si I_n sont les intervalles associés (comme les U_i^j, voir ci-après) à la construction de g, tels que $g(I_{n+1}) = I_n$. On remarque que $f(I_{n+2}) = g(g(I_{n+2})) \subseteq I_n$. Alors g_1 impaire et $g_1(x) = \begin{cases} g(x) & \text{sur } I_{2n} \\ -g(x) & \text{sur } I_{2n+1} \end{cases}$. On vérifie facilement que $g_1(g_1(x)) = -g(g(x)) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Annexe : énoncé du problème d'Agrégation Masculine 1949, Calcul Différentiel et Intégral

(Dans la RMS septembre 1949 il est numéroté 4609, mais n'est pas corrigé dans les numéros suivants)

La fonction $f(x)$ est une fonction donnée une fois pour toutes, définie pour $x \geq a$; croissante non bornée, à dérivées des deux premiers ordres continues, satisfaisant de plus aux conditions :

$$f(a) = a,\ 0 < f'(x) < 1,\ \text{pour } x \geq a$$

On posera $f'(a) = k^2,\ f"(a) = \ell$.

On se propose d'étudier les fonctions $g(x)$ définie pour $x \geq a$, continues, croissantes, telles que

$$g(g(x)) = f(x)$$

.

On conseille de faire usage de représentations graphiques. On comparera, en particulier, les valeurs correspondantes de $x,\ f(x),\ g(x)$; on montrera qu'on ne restreind pas la généralité en prenant $a = 0$.

Bien que les parties I, II, III soient indépendantes, on conseille de les traiter dans l'ordre.

I- (1) Montrer que si $g(x)$ n'est soumis à aucune autre condition, il existe des intervalles (u, v) tels que

a) la donnée de $g(x)$ pour $u \leq x \leq v$ détermine complétement $g(x)$ pour $x \geq a$;

b) $g(x)$ n'est soumis sur l'intervalle $u \leq x \leq v$ qu'à des conditions aux limites que l'on écrira.

(2) Indiquer comment on obtiendrait $g(x)$ si l'on exigeait, en plus, l'existence de dérivées continues des deux premiers ordres en tout point $a < x$. Écrire les conditions aux limites qui doivent être remplies.

(3) Lorsque g(x) a une dérivée pour $x = a$, quelle est la valeur de cette dérivée ? Montrer sur un exemple simple, que les fonctions $g(x)$ n'ont pas, en général de dérivée pour $x = a$.

II - Dans la suite, on posera $a = 0$.

Soit b une valeur fixe, u une valeur quelconque :

On posera $b > 0,\ u \geq 0,\ b_1 = f(b),\ b_n = f(b_{n-1}),\ u_1 = f(u),\ u_n = f(u_{n-1}$.

(1) La fonction $I(u) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{b_n}$ est définie pour $u \geq 0$ et continue.

(2) Montrer que $I(u)$ a des dérivées des deux premiers ordres continues pour $u \geq 0$. La dérivée première n'est jamais nulle. $I(u)$ prend une fois et une seule toute valeur positive ou nulle.

(3) Il existe une fonction $g(x)$ et une seule telle que $g'(0)$ existe. Cette fonction possède des dérivées des deux premiers ordres continues pour $x \geq 0$.

Est-il nécéssaire, pour caractériser cette unique fonction possèdant une dérivée pour $x = 0$, d'utiliser toutes les hypothèses faites sur $g(x)$ dans l'introduction ?

(4) Montrer sur un exemple simple que cette fontion ne possède pas, en général, de direction asymptotique.

III - (1) En généralisant le procédé utilisé pour la construction de la fonction $g(x)$, il est possible de définir dans la région E $(x \geq 0,\ y \geq 0)$, une famille à un paramètre de courbes C_m d'équation $y = \varphi(x, m)$ $m \geq 0$ telle que

(a) il passe une courbe de la famille et une seule par chaque point de la région E où $x > 0$; toutes les courbes passent par l'origine ;

(b) $\varphi(x, m)$ est une fonction continue de l'ensemble des deux variables x et m, croissante par rapport à chacune d'elles ;

(c) $\varphi[\varphi(x, m), m'] = \varphi(x, mm')$;

(d) $\varphi(x, k^2) = f(x)$.

(2) Il existe une application bicontinue et biunivoque de E sur elle-même, de la forme $x' = \theta(x),\ y' = \theta(y)$, telle que les courbes C_m deviennent des droites passant par l'origine.

Quelles sont toutes les applications de E sur elle-même de la forme $x' = \psi(x),\ y' = \psi(y)$ qui transforment toutes les courbes C_m en droites passant par l'origine ?

(3) La fonction $\varphi(x, m)$ de (1) est-elle déterminée d'une manière unique par les conditions a,b,c,d ?