

COURBES en polaires « exotiques »

Lazare Georges VIDIANI

Résumé. Le but de ce petit article est de construire quelques courbes dont l'équation polaire est « exotique » en ce sens que la fonction en θ est une série de FOURIER.

L'ouvrage donné en référence (1) propose les trois exercices suivants : construire les courbes dont une équation polaire $r = f(\theta)$ est : (avec $a > 0$)

$$\left\{ \begin{array}{l} a) r = \frac{4a}{\pi} \left[6 - 3\sqrt{3} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3\sqrt{3} + (-1)^{n-1}}{36n^2 - 1} \cos(6n\theta) \right] = \frac{4a}{\pi} [r_1 - \sqrt{3}r_2] \\ b) r = \frac{6a\sqrt{3}}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{9k^2 - 1} \cos(3k\theta) \right] \\ c) r(m) = a \left[1 + \frac{2m}{\pi} \sin \frac{\pi}{m} \left(\frac{1}{2} + \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(nm\theta)}{1 - (nm)^2} \right] \right) \right] m \in \mathbb{N}^* \text{ donné} \end{array} \right.$$

Solution.

(a) Réduction de l'intervalle d'étude : les fonctions r sont respectivement $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{m}$ périodiques et paires ; donc il suffit de les étudier respectivement dans $[-\frac{\pi}{6}, 0], [0, \frac{\pi}{3}], [0, \frac{\pi}{m}]$, de faire la symétrie des arcs obtenus par rapport à Ox, puis respectivement 5 rotations $R(O, \frac{\pi}{3}), 2$ rotations $R(O, \frac{2\pi}{3})$ et $m-1$ rotations $R(O, \frac{2\pi}{m})$.

(b) D'après le cours (voir par exemple (3)) le développement en série de FOURIER de la fonction f_α dont la restriction à $[-\pi, \pi]$ est (pour $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$,

$$f_\alpha(t) = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2\alpha \sin(\alpha \pi)}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \cos(nt) \quad (\mathcal{R})$$

(c) Spécialisons $\alpha = \frac{1}{6}$ et $t = 6\theta$ dans (\mathcal{R}) on a $f_{\frac{1}{6}}(6\theta) = \frac{3}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 6 \cos(6n\theta)}{\pi(1-36n^2)}$ donc $r_1 = 2\pi \cos \theta$, mais comme cette relation est valable pour $\theta \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ et comme si $\theta \in [-\frac{\pi}{6}, 0], \theta + \frac{\pi}{6} \in [0, \frac{\pi}{6}]$, on a $f_{\frac{1}{6}}(6(\theta + \frac{\pi}{6})) = \cos(\theta + \frac{\pi}{6}) = \frac{3}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6 \cos(6n\theta)}{\pi(1-36n^2)}$ donc $r_2 = \pi \cos(\theta + \frac{\pi}{6})$ et sur $[-\frac{\pi}{6}, 0]$ on a $r = 8a \cos \theta - 4a\sqrt{3} \cos(\theta + \frac{\pi}{6}) = 4a \left[2 \cos \theta - \sqrt{3} \cos \theta \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right] = 2a [\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta]$ et ainsi $r = 4a \cos(\theta - \frac{\pi}{3})$ et $x^2 + y^2 - 2ax - 2a\sqrt{3}y = 0$; on ne prend que l'arc de cercle qui correspond à $\theta \in [-\frac{\pi}{6}, 0]$; on fait la symétrie par rapport à Ox, puis 5 rotations $R(O, \frac{\pi}{3})$ du tout ; l'arc (a) est formé de 12 arcs de cercles.

Le programme Maple :

a:=1/6:

r:=t -> 2*a*cos(t)+2*a*sqrt(3)*sin(t):

P1:=t -> [r(t)*cos(t), r(t)*sin(t)]:

P2:=t -> [r(t)*cos(t), -r(t)*sin(t)]:

N:=100;

L:=seq([P1(-Pi/6*(N-i)/N),P2(-Pi/6*(N-i)/N),P2(-Pi/6*(N-i-1)/N),P1(-Pi/6*(N-i-1)/N)],i=0..N-1):

gr:=display([

seq(plot([op(rot(j*Pi/3,P1(t))), t=-Pi/6..0],color=maroon,thickness=2),j=0..5)

,seq(plot([op(rot(j*Pi/3,P2(t))), t=-Pi/6..0],color=maroon,thickness=2),j=0..5)

```

,seq(polygonplot(evalf(map( u -> map( w ->
rot(j*Pi/3,w),u),[L])),color=yellow,style=patchnograd,transparency=0.8),j=0..5)
],scaling=constrained,axes=none):
gr;

```

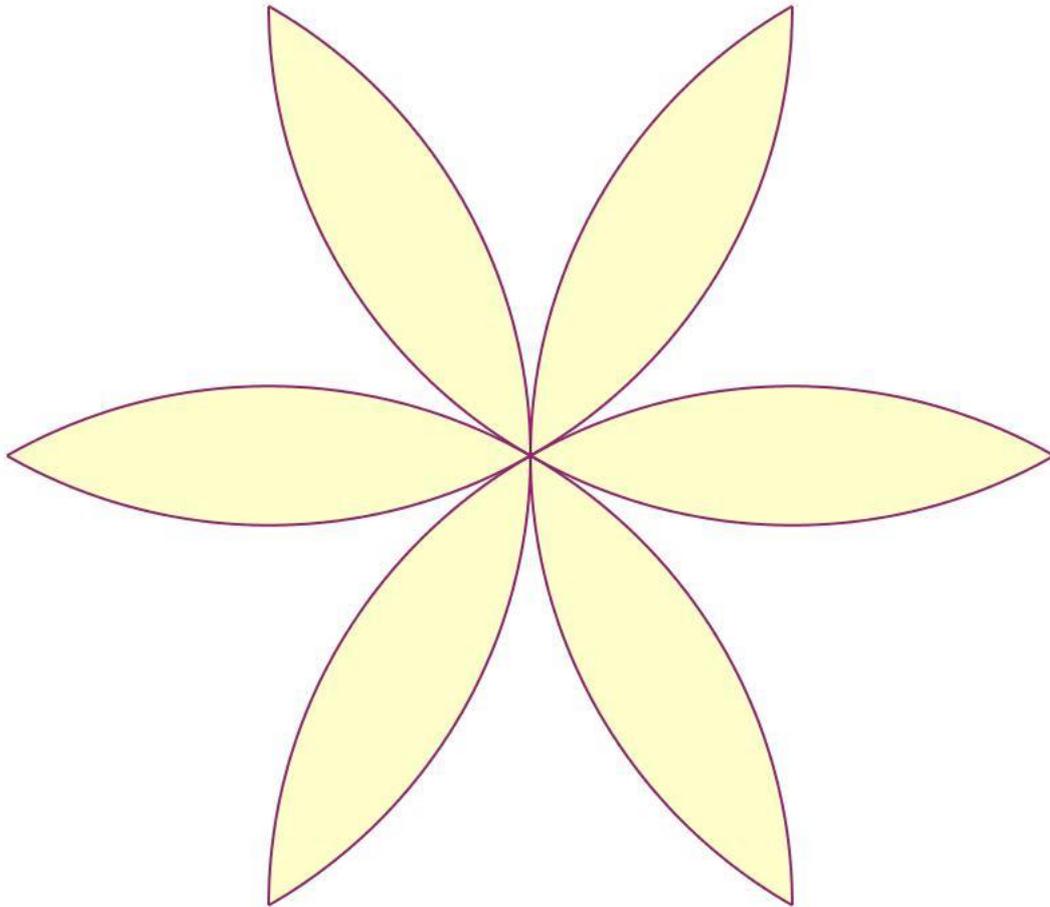


Figure 1 courbe (a)

(d) Pour l'arc (b) Spécialisons $\alpha = \frac{1}{3}$ et $t = 3\theta$ dans (\mathcal{R}) ; alors pour $t \in [-\pi, \pi]$, c'est-à-dire $\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$, $\cos \theta = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} + \frac{\sqrt{3}}{3\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} 9}{9n^2-1} \cos 3n\theta$; on constate que $\mathbf{r}_b = 2\mathbf{a} \cos \theta$; dans l'intervalle considéré r_b représente un arc de cercle de $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ (de centre $(a,0)$, passant par O ; On ne garde que l'arc entre $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ et on fait deux rotations $R(O, 2\frac{\pi}{3})$ successives de l'arc obtenu : la courbe (b) est un trèfle à trois arcs de cercles.

Le programme Maple

```
a:=1/6; r:=t -> 2*a*cos(t);
```

```
P1:=t -> [r(t)*cos(t), r(t)*sin(t)];
```

```
N:=100;
```

```
#L:= seq( [P1(-Pi/6*(N-i)/N),P2(-Pi/6*(N-i)/N),P2(-Pi/6*(N-i-1)/N),P1(-Pi/6*(N-i-1)/N)],i=0..N-1):
```

```
gr:=display( [
```

```
seq(plot([op(rot(j*2*Pi/3,P1(t))), t=-
Pi/3..Pi/3],filled=true,color=COLOR(RGB,0.7,1,0.7)),j=0..2)
```

```
,seq(plot([op(rot(j*2*Pi/3,P1(t))), t=-Pi/3..Pi/3],color=maroon,thickness=2),j=0..2)
```

],scaling=constrained,axes=None):
gr;

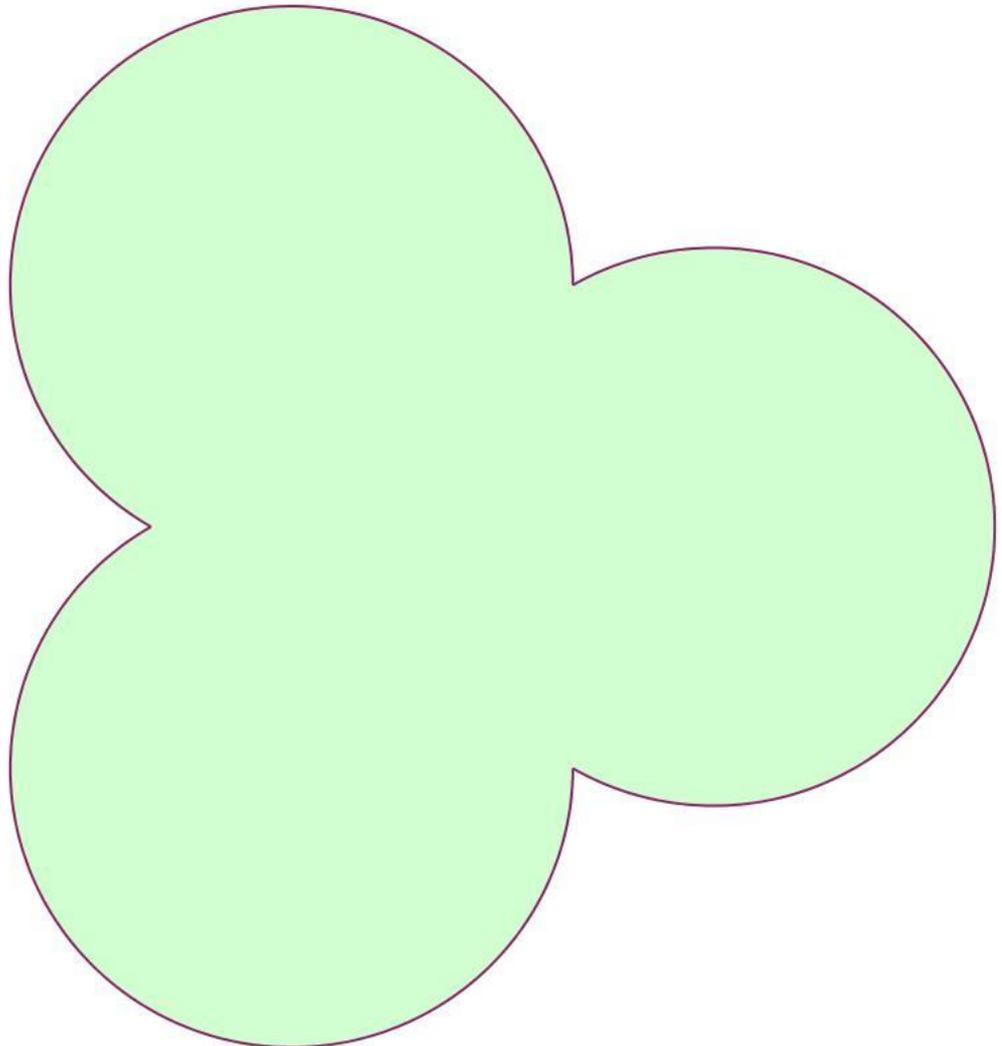


Figure 2 courbe (b)

(e) Pour l'arc (c) Spécialisons $\alpha = \frac{1}{m}$ et $t = m\theta$ dans (\mathcal{R}) ; On reconnaît immédiatement $\mathbf{r}_c = \mathbf{a}(1 + \cos \theta)$; conchoïde de cercle dont ne garde que l'arc entre $\left[-\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{m}\right]$, puis on fait $m-1$ rotations successives $R\left(O, \frac{2\pi}{m}\right)$; la courbe (c) est formée de m arcs de cardioïdes.

Le Programme Maple : (avec $m=5$)

```

m:=5: a:=1/m:
r:=t -> a*(1+cos(t)) ;
P:=t -> [r(t)*cos(t),r(t)*sin(t)]:

gr:=display( [seq(plot([op(rot(2*j*Pi/m,P(t))),t=-Pi/m..Pi/m],color=red,thickness=3),j=0..m-1)
,seq(plot([op(rot(2*j*Pi/m,P(t))),t=-Pi/m..Pi/m],filled=true,color=cyan,transparency=0.8),j=0..m-1)
],scaling=constrained,axes=none):
gr;

```

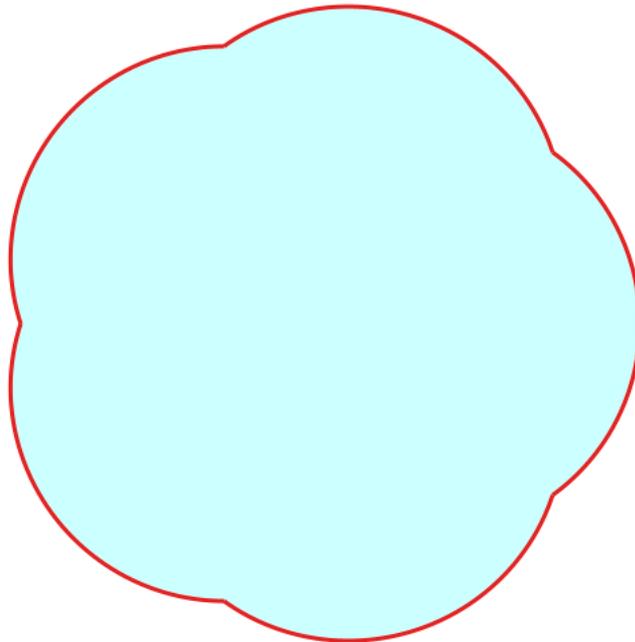


Figure 3 courbe (c) (5 arcs de Cardioïdes)

Pour d'autres courbes « exotiques » voir la courbe (d) dont la relation entre les coordonnées polaires est $\sin \theta = \frac{r^2 - 3r}{r + 1}$.

Plan résumé de l'étude : on pose $f(r) = \frac{r^2 - 3r}{r + 1}$ on l'étudie (tableau de variation) ; sa valeur n'est entre -1 et +1 que pour $r \in \left[2 - \sqrt{5} \approx -0.236067977\dots, 2 + \sqrt{5} \right]$, $r = -1$ n'est pas atteint, $f(r)$ reste fini, la période pour θ est 2π , Oy est axe de symétrie (θ en $\pi - \theta$), on étudie la variation de $\theta = \text{Arc sin } f(r)$, sur l'intervalle précédent, on détermine la tangente aux points remarquables dont $r=1$, ce qui justifie le tracé ci-dessous)

Programme Maple:

```

#===== courbe sin(theta)=(r^3-3*r)/(1+r) =====
with(plots):sin(theta)=(r^2-3*r)/(1+r):
eq:={(1+r)*sin(t)-r^2+3*r}:
res:=radnormal([solve(eq,r)]);
r1:=subs(op(res[1]),r):r2:=subs(op(res[2]),r):
gr:=display([plot([r1*cos(t),r1*sin(t),t=0..2*Pi],color=red,thickness=2)
,plot([r2*cos(t),r2*sin(t),t=0..2*Pi],color=red,thickness=2)
,plot([r2*cos(t),r2*sin(t),t=Pi..2*Pi],filled=true,color=magenta,transparency=0.9)

```

```
,plot([r2*cos(t),r2*sin(t),t=0..Pi],filled=true,color=green,transparency=0.8)
,plot([r1*cos(t),r1*sin(t),t=0..2*Pi],filled=true,color=cyan,transparency=0.8)
],scaling=constrained,axes=None):
```

gr;

Pour colorier différemment les deux boucles correspondant à r_2 , il faut séparer en deux intervalles

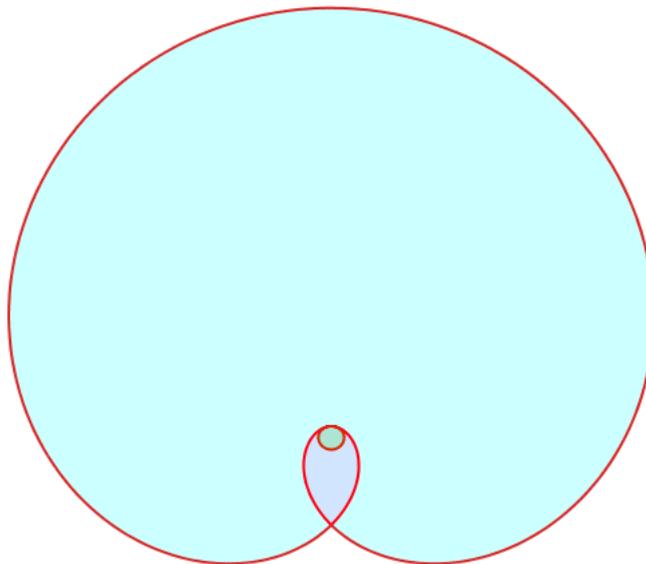


Figure 4 courbe (d) (en polaires implicite)

Références :

- (1) Arnaudies, Fraysse, cours de mathématiques tome 3, compléments d'analyse, (Dunod Université janvier 1989 ; exercice 14 page 142, chapitre IV Séries de Fourier.
 - (2) Concours estp 1992, premier exercice.
 - (3) Râmis, Odoux, Deschamps Tome 4 (Masson 1977) page 128 et p 123
 - (4) Courbe (d) Bréal 1983 page 203
 - (5) Site d'Alain ESCULIER <http://aesculier.fr>
<http://aesculier.fr/fichiersMaple/cerclesApollonius/cerclesApollonius.html>
-