Étude d'une courbe implicite unicursale.
Par Lazare Georges VIDIANI (georges.vidiani@orange.fr)

Résumé. La courbe implicite ci-dessous a l'avantage d'être unicursale (c'est-à-dire d'admettre une représentation paramétrique rationnelle). L'intérêt de ce calcul réside en le fait que cette approche oblige à réviser beaucoup de notions (courbe en polaires, paramétrage, représentation unicursale de quartique, aire, factorisation, décomposition en éléments simples, primitives, courbe algébrique, calcul des résidus, lemme de Jordan…). Il y a aussi beaucoup d'apports sur les propriétés des Résidus (éléments de second espèce, simplification des parties réelles, fiabilité des commandes residue des logiciels formels,..) ; les renvois chiffrés en gras reportent aux notes.

Énoncé.

La courbe (C) représentée par l'équation

$$\boldsymbol{16\,x^4+37\,x^2y^2+10\,y^4-2(4x^2+xy+3y^2)y+y^2=0\ (E)}$$

Est unicursale et fermée ; évaluer l'aire qu'elle limite. (1)(2)

Solution.

Remarque initiale : comme $0 \leq 6\,x^4+37\,x^2y^2+10\,y^4+y^2 = 2(4x^2+xy+3y^2)y$, la méthode de RÉGIONNEMENT **(8)** assure que (C) est toute incluse dans le demi plan y >0, l'origine étant le seul point tel que y=0.

(1) Équation polaire de (C) : En polaires, après simplification par ρ^2, car l'origine est un point double (qui n'est pas isolé, nous le verrons par la représentation paramétrique, car il est obtenu pour le paramètre v infini), on a

$$\rho^2(\cos^2\theta+2\sin^2\theta)(16\cos^2\theta+5\sin^2\theta)-2\rho\sin\theta\,(4\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta+3\sin^2\theta)+\sin^2\theta=0$$

Soit résolvant cette équation du second degré en ρ :

$$\rho=\frac{(4\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta+3\sin^2\theta)\ \sin\theta\pm\sin\theta\sqrt{D}}{16\cos^4\theta+37\sin^2\theta\cos^2\theta+10\sin^4\theta}$$

où $D=\ (4\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta+3\sin^2\theta)^2\ -(16\cos^4\theta+37\sin^2\theta\cos^2\theta+10\sin^4\theta)$

Posons pour simplifier l'écriture des calculs $c=\cos\theta\,,s=\sin\theta\,,t=\tan\theta$, alors

$$D=\ (4c^2\ +sc+3s^2)^2-(16c^4+37s^2c^2+10s^4)$$

Puis en -développant puis réduisant

$$D=\ 16c^4+s^2c^2+9s^4+8sc^3+24s^2c^2+6s^3c-(16c^4+37s^2c^2+10s^4)$$

$$D=\ -s^4+8sc^3+6s^3c-12s^2c^2=c^4(\boldsymbol{-12t^2-t^4+8t+6t^3})=\boldsymbol{c^4g(t)}$$

Avec $\mathrm{g(t)}=-12\mathrm{t}^2-\mathrm{t}^4+8\mathrm{t}+6\mathrm{t}^3=\ \mathrm{t}(2-\mathrm{t})^3$

g(t) n'est positif que pour t entre 0 et 2. Par conséquent (C) est tout entière dans le premier quadrant, et entre $\theta=0\ et\ \theta=Arctan\ 2$. Et à cause du double signe, a la forme d'un croissant, que nous préciserons.

Finalement $\rho=\frac{(4\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta+3\sin^2\theta)\ \sin\theta\pm\sin\theta\sqrt{-sin^4\theta+8\sin\theta cos^3\ \theta+6sin^3\theta\cos\theta-12sin^2\theta\ cos^2\theta}}{16\cos^4\theta+37\sin^2\theta\cos^2\theta+10\sin^4\theta}$

(2) Représentation paramétrique rationnelle de (C) :

(C) est une quartique cupsidale (alias « elle admet un point de rebroussement) sans symétrie (voir plus loin). Comme les termes de plus haut degré de l'équation de (C) sont $(x^2+2y^2)(16x^2+5y^2)$, elle n'a pas de points à l'infini réels, elle est bornée. Il y a un point de rebroussement à l'origine où la tangente double est y=0.

Coupons (C) par la droite y=tx. L'équation aux abscisses des points de rencontre est
$(16 + 37\,t^2 + 10\,t^4)x^2 - 2tx(4 + t + 3t^2) + t^2 = 0$ et le discriminant réduit, est :
$\Delta' = t^2((4 + t + 3t^2)^2 - 16 - 37t^2 - 10t^4) = t^2(16 + t^2 + 9t^4 + 8t + 6t^3 + 24t^2 - 16 - 37t^2 - 10t^4)$ et après réduction :
$\Delta' = t^2(-t^4 + 6t^3 - 12t^2 + 8t) = t^2 g(t) = -t^3(t^3 - 6t^2 + 12t - 8) = -t^3[(t-2)(t^2 - 4t + 4)]$

$\Delta' = -t^3\,(t-2)^3$, et les racines en x ne sont réelles que si $t = \tan\theta \epsilon [0,2]\ soit\ \theta \epsilon [0, Arctan\ 2]$.
Comme le produit des racines est t^2, elles sont de même signe, leur somme $\frac{2t(4+t+3t^2)}{(16+37\,t^2+10\,t^4)}$ est positive, donc elles sont toutes les deux positives. Les ordonnées (y=tx) aussi. La courbe est donc dans le premier quadrant et dans le secteur $\theta \epsilon [0, Arctan\ 2]$.
Comme tϵ[0,2], posons $t = 1 + \cos u = 2\cos^2\frac{u}{2} = \frac{2}{1+v^2}$ où $v = \tan\frac{u}{2}$ et comme $\sqrt{2t - t^2} = |\sin u|$, u en -u équivaut au changement du double signe dans l'expression des racines, on peut prendre $\varepsilon = -1$.

$$x = \frac{t(4+t+3t^2) + \varepsilon t(2-t)\sqrt{2t-t^2}}{(1+2t^2)(16+5t^2)}\ et\ t - 2 = \frac{-2v^2}{1+v^2}\ et\ 2t - t^2 = \frac{4v^2}{(1+v^2)^2}$$

$$x = \frac{2}{1+v^2}\frac{4 + \frac{2}{1+v^2} + \frac{12}{(1+v^2)^2} + \frac{4v^3}{(1+v^2)^2}}{(1 + \frac{8}{(1+v^2)^2})(16 + \frac{20}{(1+v^2)^2})} = \frac{2(1+v^2)[4v^3 + 12 + 2 + 2v^2 + 4 + 8v^2 + 4v^4]}{(9 + 2v^2 + v^4)(36 + 32v^2 + 16v^4)}$$

$$x = \frac{2(1+v^2)[4v^4 + 4v^3 + 10v^2 + 18]}{(9 + 2v^2 + v^4)(36 + 32v^2 + 16v^4)} = \frac{(1+v^2)[2v^4 + 2v^3 + 5v^2 + 9]}{(9 + 2v^2 + v^4)(9 + 8v^2 + 4v^4)}$$

$$x = \frac{(1+v^2)[2v^4 + 2v^3 + 5v^2 + 9]}{((v^2+3)^2 - 4v^2)((2v^2+3)^2 - 4v^2)} = \frac{(1+v^2)[2v^4 + 2v^3 + 5v^2 + 9]}{(v^2 + 3 - 2v)(v^2 + 3 + 2v)(2v^2 + 3 - 2v)\,(2v^2 + 3 + 2v)}$$

$$x = \frac{(1+v^2)[2v^4 + 2v^3 + 5v^2 + 9]}{(v^2 + 3 - 2v)(2v^4 + 2v^3 + 5v^2 + 9)\,(2v^2 + 3 + 2v)} = \frac{\boldsymbol{(1+v^2)}}{\boldsymbol{(v^2 - 2v + 3)\,(2v^2 + 2v + 3)}}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{1+v^2}{2v^4 - 2v^3 + 5v^2 + 9}}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{2}{1+v^2}x = \frac{2}{(v^2-2v+3)\,(2v^2+2v+3)} = \frac{2}{2v^4-2v^3+5v^2+9}}\quad \boldsymbol{\frac{x}{y} = \frac{1+v^2}{2}}\ \text{donc}\ d\left(\frac{x}{y}\right) = v dv$$

On pose $\boxed{\Delta_1 = \boldsymbol{(v^2 - 2v + 3)}\ \ \boldsymbol{et}\ \Delta_2 = \boldsymbol{2v^2 + 2v + 3}\ \ \boldsymbol{puis}\ \Delta = \Delta_1\Delta_2 = \boldsymbol{2v^4 - 2v^3 + 5v^2 + 9}}$

La quartique (C) est bien unicursale **(10) (15),** puisque nous venons d'en exhiber une représentation paramétrique rationnelle. L'origine est obtenue pour $v = \pm\infty$. Et pourtant elle n'a pas trois points doubles. Sinon (Agreg 1972 ?) on coupe par une conique contenant les trois points doubles et tangente à une des tangentes à un des trois points doubles. Cette conique coupe la quadrique en 8 points dont 7 (2+2+3) sont connus, on aurait une représentation rationnelle d'une telle quadrique.

Remarque : comme (voir le début) L'équation aux abscisses des points de rencontre de (C) et de la droite y=tx est
$(16 + 37\,t^2 + 10\,t^4)x^2 - 2tx(4 + t + 3t^2) + t^2 = 0$, soit en ordonnant en t
$t^4(10x^2) + t^3(6x) + t^2(37x^2 - 2x + 1) + t(-8x) + 16x^2 = 0$, les relations entre coefficients et

racines sont $\sigma_1 = \frac{-6x}{10x^2}, \sigma_2 = \frac{37x^2-10x+1}{10x^2},\ \sigma_3 = \frac{8x}{10x^2}, \sigma_4 = \frac{16}{10}$; on remarque qu'indépendamment de la droite y=tx, donc de t, on a $\sigma_4 = \frac{16}{10}$ et $8\sigma_1 + 6\sigma_3 = 0$, sont donc des conditions nécessaires d'alignement des quatre points de rencontre avec la courbe C, de paramètres t_1, t_2, t_3, t_4. *(Ceci est une conséquence géométrique du théorème d'ABEL).* ***(11)***

Remarque : Le 27 1 2023, après avoir lu mon article, AE **(4)**, propose une représentation paramétrique (non rationnelle) :

« En passant, une façon d'obtenir une représentation paramétrique assez simple de ta courbe :

```
#==========================================
restart;
f := (x, y) -> 16*x^4 + 37*x^2*y^2 + 10*y^4 - (8*x^2 + 2*y*x + 6*y^2)*y + y^2;
EQ:=expand(f(x,y)/x^2);
eqpol:=collect(subs(y=x*T,EQ),x); resx:=map(factor,[solve(eqpol,x)]);
p1:=resx[1],resx[1]*T;p2:=resx[2],resx[2]*T;

with(plots):
a:=2:
display([plot([p1,T=-a..a],color=red) ,plot([p2,T=-a..a],color=blue) ],scaling=constrained);
#==========================================
```
»

(3) Étude de x, y :

$$\boldsymbol{y = \frac{2}{2v^4 - 2v^3 + 5v^2 + 9}} \quad ; \boldsymbol{y' = \frac{-4v(4v^2 - 3v + 5)}{(2v^4 - 2v^3 + 5v^2 + 9)^2}}$$

y' n'a qu'un zéro v=0, pour v fini et $v = \pm\infty$, puisque le trinôme du numérateur n'a pas de racines réelles.

$$x' = \frac{\boldsymbol{2v(2v^4 - 2v^3 + 5v^2 + 9) - (1 + v^2)2v(4v^2 - 3v + 5)}}{\boldsymbol{(2v^4 - 2v^3 + 5v^2 + 9)^2}} = \frac{2v[\boldsymbol{2v^4 - v^3 + 4v^2 - 3v - 4}]}{\boldsymbol{(2v^4 - 2v^3 + 5v^2 + 9)^2}}$$

On remarque x' et y' s'annulent simultanément pour $v = 0$ d'où un point stationnaire $A\ (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ qui est d'ailleurs un point de rebroussement de première espèce et $v = \pm\infty$, qui donne l'origine 0 qui est un point de rebroussement de seconde espèce (car (C) reste dans le premier quadrant, donc d'un seul côté de sa tangente Ox en O. D'où l'absence de symétrie pour (C) à cause des genres différents des deux rebroussements.

Pour avoir le signe de x' on étudie $\varphi(v) = 2v^4 - v^3 + 4v^2 - 3v - 4$, $\varphi'(v) = 8v^3 - 3v^2 + 8v - 3$ $\varphi'(v) = (v^2 + 1)$(8v-3) donc $\varphi(v)$ décroit sur $\left[-\infty, \frac{3}{8}\right]$ en s'annulant en $-1 < \alpha \approx -0{,}63 < 0$ puis croit sur $\left[\frac{3}{8}, +\infty\right]$ en s'annulant en $1 < \beta \approx 1{,}16 < 2$.

D'où le tableau de variation de x et y. et la courbe (C). (Tableau fait avec l'outil tableau de Word)

t	$-\infty$		-1		$\propto\approx -0{,}63$		0		1		$\beta \approx 1{,}16$		2		$+\infty$
x’	0	+	1/27		0	-	0	+	1/49		0	-	-24/205	-	0
y’	0	+	4/27	+			0	-	-12/7	----------	----------	----------	-8/3	-	0
x	0	↗	$\frac{1}{9}$	↗	0,118	↘	$\frac{1}{9}$ A	↗	$\frac{1}{7} \approx 0{,}143$	↗	0,144	↘	0,111	↘	0
y	0	↗	$\frac{1}{9}$	↗	0,169	↗	$\frac{2}{9} \approx 0{,}222$	↘	$\frac{1}{7} \approx 0{,}143$	↘	0,123	↘	$\frac{2}{45} \approx 0{,}044$	↘	0
$\frac{y'}{x'}$	0		4				-5/2		-6				1		0
$\Delta=\Delta_1\Delta_2=$ $\mathbf{2v^4 - 2v^3 + 5v^2 + 9}$			18						14				45		

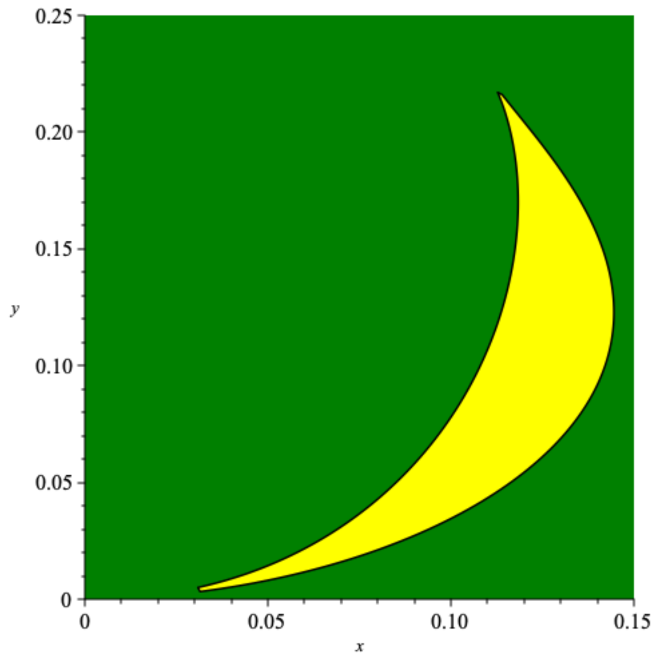

Figure 1 Courbe (C)

(*) On remarque, et c’est fortuit, une analogie avec le drapeau Mauritanien ! **(5)**
https://fr.wikipedia.org/wiki/Drapeaux_musulmans#/media/Fichier:Flag_of_Mauritania.svg

La tangente en A est d’équation $\frac{y-\frac{2}{9}}{x-\frac{1}{9}} = \frac{y'}{x'}(v=0) = -\frac{5}{2}$ qui recoupe y=x en le point tel que $(\frac{1}{7}, \frac{1}{7})$ qui est d’ailleurs le point de (C) de paramètre v=1. (C) est d’ailleurs recoupée par y=x en le point de paramètre -1 $(\frac{1}{9}, \frac{1}{9})$.

Entiers fondamentaux des points de rebroussement :
Pour le point A (de paramètre v=0) :

$$\boldsymbol{x = \frac{1+v^2}{2v^4 - 2v^3 + 5v^2 + 9}} \quad ; \quad \boldsymbol{y = \frac{2}{2v^4 - 2v^3 + 5v^2 + 9}}$$

$$y = \frac{2}{9}\frac{1}{1+\frac{5}{9}v^2 - \frac{2}{9}v^3 + \frac{2}{9}v^4} = \frac{2}{9}(1 - \frac{5}{9}v^2 + \frac{2}{9}v^3 + o(v^3))$$

$x=(1+v^2)\frac{1}{9}\left(1-\frac{5}{9}v^2+\frac{2}{9}v^3+o(v^3)\right)=\frac{1}{9}\left(1+\frac{4}{9}v^2+\frac{2}{9}v^3+o(v^3)\right)$

$\binom{x}{y}=\begin{pmatrix}\frac{1}{9}\\ \frac{2}{9}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{4}{81}\\ \frac{-10}{81}\end{pmatrix}v^2+\begin{pmatrix}\frac{2}{81}\\ \frac{4}{81}\end{pmatrix}v^3+o(v^3)$ Les entiers fondamentaux de A sont donc $n_1=2\ pair\ et\ n_2=3$ impair de parités différentes, A est donc un point de rebroussement de première espèce.

Pour les développements limités, on peut aussi utiliser series avec Maple. series((v^2 + 1)/(2*v^4 - 2*v^3 + 5*v^2 + 9), v = 0, 4) pour x et series(2/(2*v^4 - 2*v^3 + 5*v^2 + 9), v = 0, 4) ; pour y.

Pour le point 0 (de paramètre $\mathrm{v}=\pm\infty, \mathrm{w}=0$ avec $\mathrm{w}=\frac{1}{\mathrm{v}}$**) :**

$$\mathrm{y}=\frac{2}{2\mathrm{v}^4-2\mathrm{v}^3+5\mathrm{v}^2+9}=\frac{\frac{1}{\mathrm{v}^4}}{1-\frac{1}{\mathrm{v}}+\frac{5}{2}\frac{1}{\mathrm{v}^2}+\frac{9}{2}\frac{1}{\mathrm{v}^4}}=\frac{2*w^4}{2-2*w+5*w^2+9*w^4}$$

$$y=\frac{1}{v^4}\left(1+\frac{1}{\mathrm{v}}-\frac{5}{2}\frac{1}{\mathrm{v}^2}-\frac{9}{2}\frac{1}{\mathrm{v}^4}+o\left(\frac{1}{v^4}\right)\right)=\frac{1}{v^4}+\frac{1}{v^5}+o\left(\frac{1}{v^5}\right)$$

$$\mathrm{x}=\frac{1+\mathrm{v}^2}{2\mathrm{v}^4-2\mathrm{v}^3+5\mathrm{v}^2+9}=\frac{w^2+w^4}{2-2*w+5*w^2+9*w^4}=\frac{\frac{1}{v^2}+\frac{1}{v^4}}{2}\left(1+\frac{1}{\mathrm{v}}-\frac{5}{2}\frac{1}{\mathrm{v}^2}-\frac{9}{2}\frac{1}{\mathrm{v}^4}+o\left(\frac{1}{v^4}\right)\right)=\frac{1}{2v^2}+\frac{1}{2v^3}-\frac{1}{4}\frac{1}{\mathrm{v}^4}-\frac{3}{2}\frac{1}{v^5}+o\left(\frac{1}{v^5}\right)$$

On peut vérifier avec Maple : pour x : x := series((w^4 + w^2)/(9*w^4 + 5*w^2 - 2*w + 2), w = 0, 6) ;
Pour y : series(2*w^4/(9*w^4 + 5*w^2 - 2*w + 2), w = 0, 6) ;

Ainsi $\binom{x}{y}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}w^2+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}w^3+\begin{pmatrix}\frac{-1}{4}\\ 1\end{pmatrix}w^4+\begin{pmatrix}\frac{-3}{2}\\ 1\end{pmatrix}w^5+o(w^5)$

Les entiers fondamentaux du point O sont donc $n_1=2\ pair\ et\ n_2=4$ pair, il est donc comme prévu, un point de rebroussement de seconde espèce.

Recherche de points d'inflexion :

Une condition nécessaire pour qu'un point de paramètre v soit un point d'inflexion est que $\left(\frac{y'}{x'}\right)'=0$

Soit

R := v -> (4*v^2 - 4*v + 5)/(2*v^4 - v^3 + 4*v^2 - 3*v - 4);
R := proc (v) options operator, arrow; (4*v^2-4*v+5)/(2*v^4-v^3+\4*v^2-3*v-4) end proc;

R := v -> (4*v^2 - 4*v + 5)/(2*v^4 - v^3 + 4*v^2 - 3*v - 4)

A := diff(R(v), v):

A := (8*v - 4)/(2*v^4 - v^3 + 4*v^2 - 3*v - 4) - (4*v^2 - 4*v + 5)*(8*v^3 - 3*v^2 + 8*v - 3)/(2*v^4 - v^3 + 4*v^2 - 3*v - 4)^2

fsolve(A = 0, v); 0.4360160763

Il y a un seul point possible d'inflexion il est de paramètre v= 0.4360160763, comme prévu entre 0 et 1 ;
On vérifie qu'il en est effectivement un et comme il n'y en a qu'un c'est un argument de plus (hors être sur l'axe hypothétique) pour que (C) n'ait aucune symétrie. On aurait ou aussi utiliser la méthode de la hessienne.

(4) Calcul de l'aire A intérieure à (C) ;

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\int_{C^+}(\mathrm{xdy}-\mathrm{ydx})=-\frac{1}{2}\int_{C^+}y^2d\left(\frac{x}{y}\right)=-2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{vdv}{(v^2-2v+3)^2(2v^2+2v+3)^2}$$

(le signe moins s'explique par le fait que le sens C+ (direct, sens trigo) correspond à v de plus l'infini à moins l'infini)

Décomposons en éléments simples, la fraction $F=\frac{v}{(v^2-2v+3)^2(2v^2+2v+3)^2}$,

Et soit par la méthode de spéciales soit par Maple (convert(F, parfrac) ;) on a :

$$F = \frac{-11*v + 12}{9^3*(v^2 - 2*v + 3)^2} + \frac{4(-26*v + 75)}{9^4*3*(v^2 - 2*v + 3)} + \frac{-20*v - 48}{9^3*(2*v^2 + 2*v + 3)^2} + \frac{4(52*v + 6)}{9^4*3*(2*v^2 + 2*v + 3)}$$

On remarque (et cela nous servira au moment du calcul par la méthode des résidus) que :
$(v^2 - 2*v + 3) = (v-1-i\sqrt{2})(v-1+i\sqrt{2})$ et de même
$(2*v^2 + 2*v + 3) = 2(v+\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{5}}{2})(v+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{5}}{2})$

- **4-1) Calcul de $\mathcal{A}$ par la méthode de math spéciales, en intégrant les éléments de seconde espèce ci-dessus. (3)**

Rappelons la méthode de calcul : on met préalablement le trinôme du dénominateur des fractions rationnelles de seconde espèce (de la décomposition préalable en éléments simples) sous forme canonique :

$$k_n = \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n} \; avec\; discriminant = b^2 - 4ac < 0$$

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{A(x-\propto+\propto)+B}{a^n((x-\propto)^2+\beta^2)^n} = \frac{A(x-\propto)}{a^n((x-\propto)^2+\beta^2)^n} + \frac{B+A\propto}{a^n((x-\propto)^2+\beta^2)^n} = i_n + j_n$$

Avec $\propto = \frac{-\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}$ **et** $\beta = \sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}} = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$

On pose $I_n = \int i_n dx$ et $J_n = \int j_n dx$ soit $I_n = \int \frac{A}{2}\frac{2(x-\propto)d(x-\propto)}{a^n((x-\propto)^2+\beta^2)^n}$ on pose $\boldsymbol{X = x-\propto = \beta t}$ donc

$$I_n = \frac{A}{2a^n}\int\frac{d(X^2+\beta^2)}{(X^2+\beta^2)^n} = \begin{cases} n=1 \; I_1 = \frac{A}{2a}\ln(X^2+\beta^2) \\ n=2 \; I_2 = \frac{A}{2a^2}\int\frac{d(X^2+\beta^2)}{(X^2+\beta^2)^2} = \frac{-A}{2a^2}\frac{1}{(X^2+\beta^2)} = \frac{-A}{2a(ax^2+bx+c)} \end{cases}$$

De même $J_n = \int j_n dx = \int \frac{B+A\propto}{a^n((x-\propto)^2+\beta^2)^n}dx = \frac{B+A\propto}{a^n}\int\frac{\beta dt}{\beta^{2n}(1+t^2)^n} = \frac{B+A\propto}{a^n\beta^{2n}}H_n$

et on a des éléments de seconde espèce de la forme

$$H_n = \int\frac{dt}{(1+t^2)^n} = \int\frac{(1+t^2-t^2)dt}{(1+t^2)^n} = \mathrm{H}_{n-1} - \int\frac{\frac{t}{2}2tdt}{(1+t^2)^n}$$

On intègre la deuxième intégrale par parties $\begin{cases} u = \frac{t}{2} \\ dv = \frac{2tdt}{(1+t^2)^n}\end{cases}$ et $\begin{cases} du = \frac{dt}{2} \\ v = -\frac{1}{(n-1)(1+t^2)^{n-1}}\end{cases}$

Ce qui donne $H_n = H_{n-1}\left(1-\frac{1}{2(n-1)}\right) + \frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}}$ (voir aussi ROD T3 pp 245-246)

Ici n= 1 ou 2 $H_1 = Arctan\, t + Cte$ et $H_2 = H_1\frac{1}{2}+\frac{t}{2(1+t^2)}=\frac{1}{2}Arctan\, t + \frac{t}{2(1+t^2)} + Cte$

En continuant le calcul initial (en s'aidant au besoin de Maple par des formules telles que $A := int\left(4*\frac{-26*v+75}{3*9^4*(v^2-2*v+3)}, v\right)$; et analogues, on a :

$$S := \int F = -\frac{52 * \ln(v^2 - 2 * v + 3)}{19683} + \frac{811\sqrt{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{(2 * v - 2)\sqrt{2}}{4}\right)}{157464} + \frac{52 * \ln(2 * v^2 + 2 * v + 3)}{19683} - \frac{1426\sqrt{5}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{(4 * v + 2)\sqrt{5}}{10}\right)}{492075} + \frac{2 * v + 42}{5832 * (v^2 - 2 * v + 3)} + \frac{-38 * v + 6}{3645 * (2 * v^2 + 2 * v + 3)}$$

Et en prenant la variation entre moins l'infini et plus l'infini de 2S on a : (chacune des variations des deux ln est nulle car on tombe sur ln(1)=0) ;

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{2\pi}{19683}\left[\frac{811}{8}\sqrt{2} - \frac{1426}{25}\sqrt{5}\right] \approx 0.005050228684371421513549}$$

Ce que confirme le calcul approché (evalf) de l'intégrale de 2F par Maple.

evalf[100](int(2*F, v = -infinity .. infinity));

0.0050502286843714215135492887993695701199499659330536371822454191252561910562353983097
5293244315548569

- **4-2) Calcul de $\mathcal{A}$ par l'intermédiaire des coordonnée polaires**

On rappelle que $xdy - ydx = \rho^2 d\theta$

Or $\boldsymbol{x} = \frac{1+v^2}{2v^4-2v^3+5v^2+9}$ et $\boldsymbol{y} = \frac{2}{1+v^2}x$ donc $\rho^2 = x^2(1 + \frac{4}{(1+v^2)^2}) = \frac{((1+v^2)^2+4)}{(2v^4-2v^3+5v^2+9)^2}$ et comme $\tan\theta = \frac{2}{1+v^2}$

Donc $\theta = Arctan\ \frac{2}{1+v^2}$, on a une représentation paramétrique de la courbe en coordonnées polaires et $\rho^2 d\theta = \frac{((1+v^2)^2+4)}{(2v^4-2v^3+5v^2+9)^2}\left(-\frac{4vdv}{(1+v^2)^2\left(1+\frac{4}{(1+v^2)^2}\right)}\right) = \frac{-4vdv}{(2v^4-2v^3+5v^2+9)^2}$

Ce qui conduit au même résultat que dans 4-1). C'était d'ailleurs prévisible et évident, mais nous rassure.

- **4-3) Calcul de $\mathcal{A}$ par la méthode des résidus (une confrontation nous confortera) (6) (7) (14)**

(8 1 2033) *Justement cette confrontation des premiers résultats, après consultation d'UPS math m'a amené la réponse : Il y a Wolfram alpha (développé par ceux qui ont fait Mathematica, dans les années 90, de bien meilleure qualité que Maple)* https://www.wolframalpha.com/input?i=residue+calculator *: il faut donc constamment vérifier.* *Exemple de syntaxe* https://www.wolframalpha.com/input?i=residue+of+1%2F%28z%5E2%2B4%29%5E2+at+z%3D2i

Mais aussi bien Maple que Wolfram Alpha donnent parfois des résultats contradictoires, aussi est-il plus fiable de faire les calculs manuellement !

Sur la fiabilité voir https://www.irisa.fr/sage/jocelyne/cours/precision/insa-1200.pdf
Qui fera une liste des erreurs circonstanciées des logiciels formels ?

Intégrons 2F sur le contour formé du demi-cercle, dans le demi plan $y \geq 0$ de centre O et de rayon R, complété par l'intervalle (-R, +R) ; Le lemme de Jordan assure que $\mathcal{A} = 2\mathrm{i}\pi \sum résidus\ de\ 2F\ dans\ y \geq 0$).

Pour calculer les résidus de F puis 2F on peut :

- soit utiliser la formule générale suivante, si *f* possède en *a* un pôle d'ordre *n* :
- $Res_a\, f = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}((z-a)^n f(z))$: **si le pôle est simple n=1** $\boldsymbol{Res_a\, f = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)}$ **; si le pôle est double, n=2,** $\boldsymbol{Res_a\, f = \lim_{z\to a}(2(z-a)f(z) + (z-a)^2 f'(z))}$

- soit utiliser Maple par la procédure $residue\left(\frac{-11*v+12}{(9^3).((v^2-2*v+3)^2)}, v\ =\ 1\ +\ sqrt(2)*I\right)$; et variantes en modifiant les arguments
- Soit utiliser residue de WOLFRAM ALPHA

C'est le premier procédé que nous adoptons.

On en profite, chemin faisant, pour établir quelques résultats généraux, sur les résidus d'éléments simples de seconde espèce.

Les pôles de F qui sont d'ordonnée positive sont les racines répondant à cette exigence de $\Delta_1 = v^2 - 2*v + 3$ et $\Delta_2 = 2*v^2 + 2*v + 3$, soit respectivement $z_1 = 1 + i\sqrt{2}$ et $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{5}}{2}$. (on ne peut mettre z' prime comme identifiant, car Maple le prend pour une dérivation)

Avant de se lancer dans les calculs propres à 2F nous allons découvrir et tester :

- **les formules générales :**

$residue\left(\frac{A*v+B}{(v-a)*(v-b)}, v\ =\ a\right)$; plus généralement $\boldsymbol{R := n -> residue\left(\frac{A.v+B}{(v-a)^n*(v-b)^n}, v\ =\ a\right)}$; (n n'est pas pris en compte tant qu'il n'est pas affecté !) et le test for n from 1 to 20 do print(n), R(n);end do; permet grâce à google et la suite 1 2 6 20 70 252 924 3432 12870 48620 184756 705432 2704156 10400600 40117700 155117520 601080390 2333606220 9075135300 35345263800 … de vérifier que c'est la suite A600984 de SLOANE central binomial coefficients et de vérifier ainsi la formule générale (confortée par une récurrence immédiate) :

$$\boxed{\boldsymbol{R(n) = residu\left(\frac{A.v+B}{(v-a)^n*(v-b)^n}, v\ =\ a\right) = (-1)^{`n} * C_{2n}^{n}\left(\frac{Aa+B}{(a-b)^{2*n-1}} - \frac{A}{2*(a-b)^{2*n-2}}\right)}}$$

D'après un lemme furtif et caché de L.G.V. (Le Grand Valiron) Valiron Tome 1 page 398 numéro 196 au milieu de la page, **l'intégrale d'une fonction réelle étant réelle, la somme des résidus doit être imaginaire pure.** La somme des termes réels doit donc être nulle. (ce qui donne un premier critère de vérification de l'exactitude des calculs des résidus) ; on peut dire aussi que $\left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)dv}{-2\pi}\right) i = \sum résidus$
Mais vu le manque de fiabilité, comme il a déjà été remarqué plus haut des logiciels Maple et Wolfram alpha, surtout pour les résidus des pôles d'ordre 2, nous préférons un calcul « à la main ».
Rappelons que :

$$F = \frac{-11*v+12}{9^3*(v^2-2*v+3)^2} + \frac{4(-26*v+75)}{9^4*3*(v^2-2*v+3)} + \frac{-20*v-48}{9^3*(2*v^2+2*v+3)^2} + \frac{4(52*v+6)}{9^4*3*(2*v^2+2*v+3)}$$

(il faudra multiplier par 2 pour avoir l'aire après intégration) et posons

$F1 = \frac{4(-26*v+75)}{9^4*3*(v^2-2*v+3)}$ F2= $\frac{4(52*v+6)}{9^4*3*(2*v^2+2*v+3)}$ F3= $\frac{-11*v+12}{9^3*(v^2-2*v+3)^2}$ et enfin $F4 = \frac{-20*v-48}{9^3*(2*v^2+2*v+3)^2}$

Calcul de résidus des pôles simples de F1 et F2 : on utilise la formule $Res_a\, f = \lim_{v\to a}(v-a)\, f(v)$

- **Solution 1.**
  - Pour F1 $a = 1 + i\sqrt{2}$ $F1(v) = \frac{4(-26*v+75)}{9^4*3*(v-a)(v-\bar{a})}$ $Res_a\, F1 = \lim_{v\to a}(v-a)\, F1(v) = \frac{4(-26*a+75)}{9^4*3*(a-\bar{a})} = \frac{4(-26-26i\sqrt{2}+75)}{9^4*3*(2i\sqrt{2})}$

$Res_a\, F1 = \frac{4(49-26i\sqrt{2})}{9^4*3*(2i\sqrt{2})} = \frac{4(49i\sqrt{2}+52)}{9^4*3(-4)} = \frac{\boldsymbol{-49i\sqrt{2}-52}}{\boldsymbol{9^4.3}} = \frac{\boldsymbol{-49i\sqrt{2}-52}}{\boldsymbol{19683}}$ qui est bien conforme à ce que donne Maple pour les commandes simplify(residue(F1(v), v = 1 + sqrt(2)*I)) ;

Question : à quelle condition la partie réelle du résidu est -elle nulle ?

- Pour F2 $a = \frac{-1+i\sqrt{5}}{2}$ $F2(v) = \frac{4(52*v+6)}{9^4*3*2(v-a)(v-\bar{a})}$ $Res_a\, F2 = \lim_{v\to a}(v-a)\,F2(v) = \frac{2(52a+6)}{9^4*3(a-\bar{a})}$ soit

$Res_a\, F2 = \frac{2(-26+26i\sqrt{5}+6)}{9^4*3(i\sqrt{5})} = \frac{2(-20+26i\sqrt{5})i\sqrt{5}}{9^4*3(-5)} = \frac{2(20i\sqrt{5}+26*5)}{9^4*3(5)} = \frac{\mathbf{8i\sqrt{5}+52}}{\mathbf{9^4*3}} = \frac{\mathbf{8i\sqrt{5}+52}}{\mathbf{19683}}$ qui est bien conforme à ce que donne Maple pour les commandes simplify(residue(F2(v), v = $\frac{-1+i\sqrt{5}}{2}$)) ; De plus on remarque (comme prévu) que la somme de ces deux premiers résidus a une partie réelle nulle.

- **Solution 2** : pour éviter de faire deux fois le même calcul avec des coefficients différents, on va calculer $Res_a\, f = \lim_{v\to a}(v-a)\,f(v)$ pour $f(v) = \frac{Av+B}{(v-a)(v-\bar{a})}$ avec pour F1 19683.A=-4*26=-2*52=-104 et 19683.B=4*75=300 et $a = 1+i\sqrt{2}$ et pour F2 19683.A=52*2=104 19683.B=12 (on a simplifié par 2, après avoir mis le trinôme du dénominateur $(2*v^2 + 2*v + 3) = 2(v^2+v+\frac{3}{2})$ sous forme canonique. Et $a = \frac{-1+i\sqrt{5}}{2}$.

Par conséquent $\boldsymbol{Res_a\, f = \lim_{v\to a}(v-a)\frac{Av+B}{(v-a)(v-\bar{a})}) = \frac{Aa+B}{(a-\bar{a})}}$

Et ainsi pour F1 $Res_a\, F1 = \frac{(-104)(1+i\sqrt{2})+300}{19683.(2i\sqrt{2})} = \frac{-49i\sqrt{2}-52}{19683}$

Et de même pour F2 $Res_a\, F2 = \frac{\boldsymbol{Aa+B}}{\boldsymbol{(a-\bar{a})}} = \frac{52(-1+i\sqrt{5})+12}{19683.i\sqrt{5}} = \frac{8i\sqrt{5}+52}{19683}$, comme prévu ! et de plus la somme de ces deux résidus est imaginaire pure. La somme des résidus de F1 et F2 est donc $\frac{\mathbf{8I\sqrt{5}-49I\sqrt{2}}}{\mathbf{19683}}$

Calcul de résidus des pôles doubles de F3 et F4 : on utilise la formule

$$\boldsymbol{Res_a\, f = \lim_{z\to a}(2(z-a)f(z) + (z-a)^2 f'(z))}$$

- **Solution 1**

  - Pour F3 $a = 1+i\sqrt{2}$ F3(v)=$\frac{-11*v+12}{9^3*(v^2-2*v+3)^2}$

$$\boldsymbol{Res_a\, F3 = \lim_{v\to a}(2(v-a)F3(v) + (v-a)^2 F3'(v))}$$

$$= \lim_{v\to a}\left(2(v-a)\frac{-11*v+12}{9^3(v-a)^2(v-\bar{a})^2} + (v-a)^2\frac{-11(v-a)^2(v-\bar{a})^2 - (-11v+12)(2(v-a)(v-\bar{a})(2v-a-\bar{a})}{(v-a)^4(v-\bar{a})^4}\right)$$

$$= \lim_{v\to a}\left(2\frac{-11*v+12}{9^3(v-a)^1(v-\bar{a})^2} + (v-a)^2\frac{-11(v-a)^2(v-\bar{a})^2}{(v-a)^4(v-\bar{a})^4} + \frac{+(11v-12)(2(2v-a-\bar{a})}{(v-a)^1(v-\bar{a})^3}\right) =$$

$$\lim_{v\to a}\left(2\frac{-11*v+12}{9^3(v-a)^1(v-\bar{a})^2} + \frac{-11}{9^3(v-\bar{a})^2} + \frac{(11v-12)(2(v-a+v-\bar{a})}{9^3(v-a)^1(v-\bar{a})^3}\right) =$$

$\lim_{v\to a}\left(2\frac{-11*v+12}{9^3(v-a)^1(v-\bar{a})^2} + \frac{-11}{9^3(v-\bar{a})^2} + 2\frac{(11v-12)}{9^3(v-\bar{a})^3} + 2\frac{(11v-12)}{9^3(v-a)(v-\bar{a})^2}\right)$ après réduction il reste

$\boldsymbol{Res_a\, F3} = \frac{-11}{9^3(a-\bar{a})^2} + \mathbf{2}\frac{(11a-12)}{9^3(a-\bar{a})^3} = \frac{-11}{9^3(2I\sqrt{2})^2} + \mathbf{2}\frac{(11+11I\sqrt{2}-12)}{9^3(2I\sqrt{2})^3} = \frac{11}{8.9^3} + \mathbf{2}\frac{(\mathbf{-1+11I\sqrt{2}})\mathbf{I\sqrt{2}}}{9^3*8*4}$ et ainsi

$\boldsymbol{Res_a\, F3} = \frac{\boldsymbol{-I\sqrt{2}}}{\mathbf{9^3*8*2}} = \frac{\boldsymbol{-I\sqrt{2}}}{\mathbf{11664}}$

  - Pour F4 $a = \frac{-1+i\sqrt{5}}{2}$ $F4 = \frac{-20*v-48}{9^3*(2*v^2+2*v+3)^2}$ $\boldsymbol{Res_a\, F4 = \lim_{v\to a}(2(v-a)F4(v) + (v-a)^2 F4'(v))}$

$$F4 = \frac{-20*v-48}{9^3*(2*v^2+2*v+3)^2} = \frac{-20*v-48}{9^3*4*(v-a)^2(v-\bar{a})^2}$$

$$Res_a\, F4 = \lim_{v\to a}(2(v-a)F4(v)+(v-a)^2F4'(v)) = \lim_{v\to a}\left(\frac{-20*v\ -\ 48}{9^3*2*((v-a)(v-\bar{a})^2}+(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a})^2\boldsymbol{F4}'(\boldsymbol{v})\right)=$$

$$\lim_{v\to a}\left(\frac{-20*v\ -\ 48}{9^3*2*((v-a)(v-\bar{a})^2}+\frac{(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a})^2}{\boldsymbol{4*9^3}}(\frac{-20(v-a)^2(v-\bar{a})^2}{(v-a)^4(v-\bar{a})^4}+\frac{(\boldsymbol{20v+48})(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{v}-\bar{\boldsymbol{a}})(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{v}-\bar{\boldsymbol{a}})}{\boldsymbol{2*9^3}(v-a)^4(v-\bar{a})^4})\right)=$$

$$\lim_{v\to a}\left(\frac{-20*v-48}{9^3*2*((v-a)(v-\bar{a})^2}+\frac{-5}{9^3(v-\bar{a})^2}+\frac{(\boldsymbol{20v+48})}{\boldsymbol{2*9^3}(v-\bar{a})^3}+\frac{(\boldsymbol{20v+48})}{\boldsymbol{2*9^3}(v-a)(v-\bar{a})^2}\right)=$$

Soit après réduction des termes extrêmes

$$\boldsymbol{Res_aF4}=\frac{-\boldsymbol{5}}{9^3(I\sqrt{5})^2}+\frac{(\boldsymbol{-10+10I\sqrt{5}+48})}{\boldsymbol{2*9^3}(I\sqrt{5})^3}=\frac{\boldsymbol{+1}}{\boldsymbol{9^3}}+\frac{(\boldsymbol{38+10I\sqrt{5}})}{\boldsymbol{2*9^3}(I\sqrt{5})^3}=\frac{\boldsymbol{-1}}{\boldsymbol{9^3*4}}+\frac{(\boldsymbol{19I\sqrt{5}-25})}{\boldsymbol{9^3*25}}=\frac{\boldsymbol{19I\sqrt{5}}}{\boldsymbol{9^3*25}}=\frac{\boldsymbol{19I\sqrt{5}}}{\boldsymbol{729*25}}=\frac{\boldsymbol{19I\sqrt{5}}}{\boldsymbol{18225}}$$

- **Solution 2 :** pour éviter de faire deux fois le même calcul avec des coefficients différents, on va calculer

$$Res_a\, f = \lim_{v\to a}(2(v-a)f(v)+(v-a)^2f'(v)) \quad \text{pour } f(v)=\frac{Av+B}{(v-a)^2(v-\bar{a})^2}$$

$$Res_a\, f = \lim_{v\to a}\left(2\frac{Av+B}{(v-a)^1(v-\bar{a})^2}+(v-a)^2\frac{A(v-a)^2(v-\bar{a})^2-(Av+B)(2(v-a)^1(v-\bar{a})^2+2(v-a)^2(v-\bar{a})^1)}{(v-a)^4(v-\bar{a})^4}\right)$$

$$=\lim_{v\to a}\left(2\frac{Av+B}{(v-a)^1(v-\bar{a})^2}+\frac{A}{(v-\bar{a})^2}-\frac{(Av+B)(2(v-a)^1(v-\bar{a})^2+2(v-a)^2(v-\bar{a})^1)}{(v-a)^2(v-\bar{a})^4}\right)$$

$$=\lim_{v\to a}\left(2\frac{Av+B}{(v-a)^1(v-\bar{a})^2}+\frac{A}{(v-\bar{a})^2}-\frac{2(Av+B))}{(v-a)^1(v-\bar{a})^2}-\frac{2(Av+B))}{(v-\bar{a})^3}\right)=\frac{\boldsymbol{A}}{(\boldsymbol{a}-\bar{\boldsymbol{a}})^2}-\frac{\boldsymbol{2(Aa+B)})}{(\boldsymbol{a}-\bar{\boldsymbol{a}})^3}$$ après réduction des $2\frac{Av+B}{(v-a)^1(v-\bar{a})^2}$

Pour F3 $9^3A=-11,\ \ 9^3B=12,\ \ a=1+i\sqrt{2}$

Pour F4 $9^3A=-5,\ \ 9^3B=-12, a=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{5}}{2}$

La somme des résidus de 2F est donc $\frac{\boldsymbol{16I\sqrt{5}-98I\sqrt{2}}}{\boldsymbol{19683}}+\frac{\boldsymbol{-I\sqrt{2}}}{\boldsymbol{5832}}+\frac{\boldsymbol{38I\sqrt{5}}}{\boldsymbol{18225}}=\frac{\boldsymbol{1426\sqrt{5}}}{\boldsymbol{492075}}-\frac{\boldsymbol{811\sqrt{2}}}{\boldsymbol{157464}}$

La somme des résidus de 2F dans le demi plan indiqué est donc :

$$I\left(-811*\frac{\sqrt{2}}{157464}+\ 1426*\frac{\sqrt{5}}{492075}\right)=I\left(-811*\frac{\sqrt{2}}{19683*8}+\ 1426*\frac{\sqrt{5}}{19683*25}\right)=\frac{I}{19683}(-\frac{811}{8}\sqrt{2}+\frac{1426}{25}\sqrt{5})$$

Donc d'après la formule des résidus

$A=2i\pi\frac{I}{19683}(-\frac{811}{8}\sqrt{2}-+\frac{1426}{25}\sqrt{5})=\frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{19683}}(\frac{\boldsymbol{811}}{\boldsymbol{8}}\sqrt{\boldsymbol{2}}-\frac{\boldsymbol{1426}}{\boldsymbol{25}}\sqrt{\boldsymbol{5}})$

Qui est bien le même résultat obtenu en 4-1).

Références :

(1) Georges Cagnac, Henri Commissaire Cours de mathématiques spéciales tome III p 133 exercice 5 (Masson 1957) l'énoncé exact pour permettre une recherche par google (Agreg, concours, Oral RMS ? exercice avant 1957 est « La courbe définie en coordonnées rectangulaires par l'équation » ; **Avis de RECHERCHE : quelle est l'origine (Auteur, support originel,..) de cet exercice ??** (il n'est pas dans les deux tomes 590p (T1 332p, T2 258p) exercices de Licence (Hermann 1926) de l'abbé POTRON (outre mon exemplaire 2 T photocopié à l'X, le livre est à

Tolbiac, et à l'X) ; les énoncés des exercices sur les fonctions implicites sont T1 p302-305, Bernouilli ferait plaisir à RC, https://fr.wikipedia.org/wiki/Maurice_Potron https://www.persee.fr/doc/cep_0154-8344_2000_num_36_1_1280 https://data.bnf.fr/fr/12352240/maurice_potron/ il mériterait un article historique et scientifique dans QUADRATURE, https://www.letelegramme.fr/images/2008/01/17/200801172322963_1.jpg , ni dans les trois tomes de TEIXEIRA, ni dans les trois tomes de Pierre-René-Jean-Baptiste-Henri BROCARD https://www.lajauneetlarouge.com/henri-brocard-1865-un-ingenieur-savant-du-xixe-siecle/ et **Timoléon** (https://www.parents.fr/prenoms/timoleon-56501) **LEMOYNE (né le 27 décembre 1889, un vendredi, à Vieux-Habitants en Guadeloupe, décédé le 26 septembre 1958 à Saint-Claude [Guadeloupe]**

(2) Râmis (Masson 1961) tome IV couverture orange page 360 exo 3 ; Aire du croissant.

(3) ROD Râmis Odoux Deschamps mathématiques Spéciales tome 3 (topologie et éléments d'analyse) (Masson 1976) Pour chercher les primitives de fractions rationnelles pages 245-246 ne surtout pas utiliser la méthode trigonométrique qui sort de la rationalité !

(4) Site d'Alain ESCULIER http://aesculier.fr http://aesculier.fr/fichiersMaple/cerclesApollonius/cerclesApollonius.html

(5) Lien avec le drapeau Mauritanien https://fr.wikipedia.org/wiki/Drapeaux_musulmans#/media/Fichier:Flag_of_Mauritania.svg et l'analyse https://www.agoravox.fr/tribune-libre/article/surprise-le-saviez-vous-voici-d-ou-106881 gazré ??? c'est-à-dire établi gazra, pour obtenir un récépissé. (accaparé), squatté les sionistes ayant depuis gazré le symbole comme les nazis ont gazré la croix gammée, comme ils ont gazré la Palestine…. »

(6) Théorème des Résidus (Augustin Cauchy 1826 https://fr.wikipedia.org/wiki/Résidu_(analyse_complexe) ; outre la formule donnée on peut aussi utiliser la fonction residue de Maple.

(7) Lemme de Jordan https://fr.wikipedia.org/wiki/Lemme_de_Jordan

(8) Pour de magnifiques élagages de courbes implicites, par la méthode du régionnement, voir René Chenon chef de travaux au conservatoire de Arts et Métiers (Riber éditeur 1964 Paris 2ème) 200 exercices de mathématiques générales page 145 pour $xy^2+2x^2-x=0$ avec trois factorisation et p 149 pour $(x^2+y^2-1)(x-y)=(x+y-1)(x+y)$ avec quatre factorisations. https://www.amazon.fr/Exercices-Mathématiques-Générales-conservatoire-National/dp/B01BPA8NA2

(9) Tous les calculs en Maple sont dans le fichier de 12 pages ` Implicite Cagnac p 133 ; date V 16 12 22 version 7 1 2023 08h12`

(10) QUARTIQUES UNICURSALES ; Brocard Bib p 158 : George Salmon Courbes planes pages 357-370 (1884 Gauthier Villars, Hachette 2019) ; pour éviter 35€50 Fnac ou 35€67 Amazone : préférer le livre numérisé 652 pages https://books.google.fr/books?id=82N0vaav4IYC&printsec=frontcover&source=gbs_atb&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false
Mots savants : cubique canonisante, (p269 forme canonique ?) quartique tacnodale, https://fr.wiktionary.org/wiki/acnodal quartique oscnodale,...
http://serge.mehl.free.fr/anx/pt_double_implicite.html On parle de point *tacnodal* (du latin *tactus*, de *tangere* = *toucher*, qui a donné *contact*, de *cum* = *avec*, *ensemble*

(Faa di Bruno, Jongmans, Halphen...en parlent). Manifestement les coefficients ont été choisi dans l'expression générale p 363-364 ; les quartiques unicursales correspondent aux quatre derniers cas (sur 10) du tableau page 302.

(11) Conséquences géométriques du théorème d'ABEL ; théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales (Tome I Études des fonctions analytiques sur une surface de RIEMANN) (Gauthier-Villars 1929) pages 397, 487-488, chapitre XII applications du théorème d'ABEL à la géométrie pages 483-522) pour d'autres liens voir la note en bas de la p 483 ; Georges VALIRON équations fonctionnelles (Masson 1950) pages 67-69 théorème de HUMBERT ; D'autres éléments dabs le cours de Berger 4 p 190 par exemple) ; Favard 2 p 528 ; Navale 1930, Agrégation 1947 fermeture hexagonale https://www.georges-vidiani.com/wp-content/uploads/2020/11/8-Fermeture-Hexagonale.pdf ; https://www.georges-vidiani.com/wp-content/uploads/2020/11/6-Geometrie-sur-une-strophoide.pdf

(12) Calcul de l'aire aléatoire https://fr.quora.com

Quelle est la meilleure méthode pour calculer l'aire d'une forme ou d'une surface aléatoire ?

(13) **IMPLICITE :** Sur le domaine d'existence d'une fonction implicite définie par une relation entière G(x, y)=0. Œuvres de Gaston JULIA (sous la direction de Michel Hervé 6 tomes, volume III p 459-474. (Gauthier-Villars 1969) (187 articles et livres, 44 discours et allocutions)

(22 1 23) The Cauchy Method of Residues Volume 2: Theory and Applications.

(14) **MITRINOVIC Dragoslav S. (VP le 22 1 23 suggère une américanisation « Sénior » (*), ou un ajout tardif en hommage au grand père) https://galaksijanova.rs/wp-content/uploads/2022/05/image4-6.jpeg The Cauchy Method of Residues Volume 2: Theory and Applications** https://link.springer.com/book/10.1007/978-94-011-2000-5 **(1984) ; 144,16 euros par Amazon ; peut être obtenu par SUDOC ; une autre voie est de se rendre sur le lien précédent et de choisir les pages concernées (par exemple page 7 un tableau particulièrement intéressant de 11 lignes donnant l'évolution des résidus ; on peut copier et coller dans un document vierge Word préalablement ouvert et on a peu de temps pour copier. Page 6 exemple 8 issu du tome 1 p 14-15 sous forme de déterminant.** https://books.google.pn/books?id=-suKhxfPH5AC&printsec=copyright#v=onepage&q&f=false **(soft cover 89,66 €)**

(*) AJ le 22 1 23 19h10 « sans être totalement sûr, comme il est Serbe, je pense que ça fonctionne comme en Russe, c'est à dire que c'est le prénom de son père ("fils de...") Si tu prends la pages Wikip en cyrilliques. »

https://sr.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D1%80%D0%B0%D0%B3%D0%BE%D1%81%D0%BB%D0%B0%D0%B2_%D0%9C%D0%B8%D1%82%D1%80%D0%B8%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%9B

Une bio est proposée en pdf (en bas); où on lit **Svetislava** comme nom du père... tu rajoutes quelque chose comme un "vitch" à la fin et ça doit le faire... mais attention, je raisonne par analogie, je ne parle pas serbe!

(15) **Unicursale** : http://serge.mehl.free.fr/anx/courbe_alg.html On parle alors de courbe *unicursale* (le terme est de Cayley), du latin *unus* = *un* et *cursivus,* participe passé de *currere* = *courir*, pour signifier que chaque point peut être construit individuellement et rendre compte de la courbe.

» Le grand intérêt des courbes unicursales réside en particulier dans la recherche de points à coordonnées rationnelles (entières ou fractionnaires) permettant la résolution d'équations diophantiennes. La recherche de l'existence de points à coordonnées entières sur une courbe elliptique est à la source des travaux de Y. Taniyama et A. Wiles dans la résolution du "Grand" héorème de Fermat. Par extension, on qualifie parfois d'*unicursale* une représentation paramétrique x = f(t), y = g(t) non nécessairement rationnelle.

ANNEXE : les étapes des recherches sur internet

Important pour les avis de recherche (Gisèle Lemoyne fin de (1))
Peut être enlevé de l'article si Jean Paul Truc l'estime

(1) Georges Cagnac, Henri Commissaire Cours de mathématiques spéciales tome III p 133 exercice 5 (Masson **1957**) l'énoncé exact pour permettre une recherche par google (Agreg, concours, Oral RMS ? exercice avant 1957 est « La courbe définie en coordonnées rectangulaires par l'équation » ; **Avis de RECHERCHE : quelle est l'origine (Auteur, support originel,..) de cet exercice ??** (il n'est pas dans les deux tomes 590p (T1 332p, T2 258p) exercices de Licence (Hermann 1926) de l'abbé POTRON (outre mon exemplaire 2 T photocopié à l'X, le livre est à Tolbiac, et à l'X) ; les énoncés des exercices sur les fonctions implicites sont T1 p302-305, Bernouilli ferait plaisir à RC, https://fr.wikipedia.org/wiki/Maurice_Potron https://www.persee.fr/doc/cep_0154-8344_2000_num_36_1_1280 https://data.bnf.fr/fr/12352240/maurice_potron/ il mériterait un article historique et scientifique dans QUADRATURE, https://www.letelegramme.fr/images/2008/01/17/200801172322963_1.jpg , ni dans les trois tomes de TEIXEIRA, ni dans les trois tomes de Pierre-René-Jean-Baptiste-Henri BROCARD https://www.lajauneetlarouge.com/henri-brocard-1865-un-ingenieur-savant-du-xixe-siecle/ et **Timoléon** (https://www.parents.fr/prenoms/timoleon-56501) **LEMOYNE (né le 27 décembre 1889, un vendredi, à Vieux-Habitants en Guadeloupe, décédé en 19 ??** essayer Poggendorff 1863-2003 https://fr.wikipedia.org/wiki/Johann_Christian_Poggendorff https://scienceworld.wolfram.com/biography/Poggendorff.html ; page 3 sur 4 de https://les-mathematiques.net/vanilla/index.php?p=discussion/814152#Comment_814152 ; (27 1 2023) Nicolas Verdier en 2013 dit que Pauline Romera-Lebret en parle **« beaucoup » ???** dans sa thèse (soutenue en 2009 à Nantes « La nouvelle géométrie du triangle : passage d'une mathématique d'amateurs à une mathématique d'enseignants (1873-1929**)) 657 pages,** + **annexe de 107 pages** qui dans l'annexe IX dans la note 119 page 66 se contente de dire **(beaucoup ≠ une fois)** (ainsi 0 fois et une fois, ne font pas « beaucoup ». « qu'il n'a aucun rapport avec Émile LEMOINE ») cette annexe comprend une bibliographie de 43 +24 pages sur HENRI BROCARD et 18 pages sur FGM Frère Gabriel Marie) +https://www.theses.fr/2009NANT2014 ; LEMOYNE fait remarquer page V de la préface courbes remarquables tome II que son collaborateur Henri Brocard est décédé le 16 janvier 1922 à Kensington, et que lui-même a été retardé par un affaiblissement visuel suite à une grave maladie ; de plus loin d'être le faire valoir boute en train de son illustre co-auteur, il est l'auteur unique de deux tomes d'un ouvrage de recherche de géométrie contemporaine « une géométrie analytique sans équation ».
(Rien à voir avec Memphis Lemoyne college, dans le Tennessee (à 3500 km de la Guadeloupe), Lemoyne étant alors un philanthrope qui a donné 20000$ pour la construction de cet établissement) https://en.wikipedia.org/wiki/LeMoyne–Owen_College https://historic-memphis.com/memphis-historic/lemoyne/lemoyne.html

https://www.google.fr/imgres?imgurl=http%3A%2F%2Fhistoric-memphis.com%2Fmemphis-historic%2Flemoyne%2Ft-o-fuller-1925.jpg&imgrefurl=http%3A%2F%2Fhistoric-memphis.com%2Fmemphis-historic%2Flemoyne%2F%3FC%3DM%3BO%3DD&tbnid=qkr-xBDOXs4bjM&vet=12ahUKEwijidLriY39AhV0picCHY_LBRIQMygBegQIARAn..i&docid=qXYGkValVVKtEM&w=424&h=646&itg=1&q=T%20%20lemoyne%201939&hl=fr&ved=2ahUKEwijidLriY39AhV0picCHY_LBRIQMygBegQIARAn

Verdier a même ajouté « surtout son article (beaucoup plus abouti) pour la Revue d'histoire des Mathématiques » https://archive.org/details/biographischlite02pogguoft/page/408/mode/2up) (Vuibert 1919 Gabay et Albert Blanchard 1967 éditeurs), https://quod.lib.umich.edu/cgi/t/text/text-idx?c=umhistmath;idno=ABE2896 , Ni FGM https://www.apmep.fr/Exercices-de-geometrie-comprenant 2000 solutions 1897, https://www.gabay-editeur.com/F-G-M-Exercices-de-geometrie-6e-ed-1920) ni dans a catalog of special plane curves Dennis Lawrence (Dover 1972) tout un chapitre sur les courbes quartic, https://archive.org/details/catalogofspecial00lawr

Avis de RECHERCHE : qui trouvera la date et le lieu de décès, et un portrait de TIMOLÉON LEMOYNE ??????? (c'est fait voir ci-dessous le 13 février 2023) (en indiquant ses références précises) (Google, Yahoo, Quant, thèse de Romera-Lebret sont muets sur le sujet !)

1923 https://www.e-periodica.ch/cntmng?pid=ens-001%3A1923%3A23%3A%3A100

Voir aussi **Gisèle LEMOYNE** spécialiste en didactique mathématique, à Montréal née en 1943 (où et dates complètes ?) décédée à 79 ans le 3 Avril 2022 (où ?), a une fille Valérie, (ou Isabelle ?, ou Nathalie ?) Mariée le 11 juillet 1964 à Serge Pellerin

https://www.mesaieux.com/fr/recherche_genealogique/fiche_famille?NoFiche=2647287&msg=m1

https://www.coopfuneraireestrie.com/avis-de-deces/serge-pellerin-243623/

(où il y a de multiples mystères ??? (j'ai bien mon idée intuitive sur le sujet, mais suivant le principe de « Monsieur » d'Arriso, je ne vous en dirais rien ! : deux enfants Natalie et Isabelle (non citée Valérie), et où dans les condoléances pour de décès de Serge, Gisèle est citée 9 fois avec les noms de ses filles, alors qu'elle est décédée en 2022 et non en 2023 comme son mari Serge !)

(7 Juillet 2023 ; après avoir rempli auprès de l'État civil Québécois le « bon formulaire de demande et payé (prélèvement 25,75 € le 25 mai +0,83€ 1er juin Prélevé sur relevé carte 22 juin : l'état civil écrit « nous ne trouvons aucune information dans nos dossiers concernant la naissance de Gisèle Lemoyne » ; je commence à avoir une idée intuitive mais suivant le principe de Mr D'Arriso je ne dirais rien !

https://www.google.fr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwis64Lu8_z_AhVaVqQEHS31C2UQFnoECBUQAQ&url=https%3A%2F%2Fdam-oclc.bac-lac.gc.ca%2Fdownload%3Fis_thesis%3D1%26oclc_number%3D1276807467%26id%3D9d8fa4b9-a770-4f5a-9fa4-94f507cd13bc%26fileName%3D23918.pdf&usg=AOvVaw14_6UWIyp7PKy1t6J68V4y&opi=89978449

https://books.openedition.org/pur/138828?lang=fr

https://nouvelles.ulaval.ca/2007/04/25/les-enfants-du-peche-a:240b7e94-f739-458e-929a-ba658870dc6e)

***10 juillet 2023** : Très instructifs : http://classiques.uqac.ca/contemporains/dumont_micheline/des_religieuses_murs_enfants/des_religieuses_texte.html (13000 abandons de filles par an ?) Ce qui concorde avec les 300

000 « Orphelins DUPLESSIS » entre 1940 et 1960, ce qui donne 15000 par an ! (voir recherche google)

https://www.erudit.org/fr/revues/ss/1986-v35-n3-ss3496/706321ar.pdf

https://nouvelles.ulaval.ca/2007/04/25/les-enfants-du-peche-a:240b7e94-f739-458e-929a-ba658870dc6e

https://archipel.uqam.ca/3590/1/D1972.pdf

https://www.slideserve.com/autumn-jimenez/sophie-ren-de-cotret-universit-de-montr-al-inrp-umr-adef-gis-le-lemoyne-et-lalina-coulange https://books.openedition.org/pum/14697?lang=fr
https://fse.umontreal.ca/faculte/nouvelles/une-nouvelle/news/detail/News/deces-de-gisele-lemoyne-professeure-pendant-plus-de-30-ans-a-luniversite-de-montreal/ (Fille Valérie)
https://ardm.eu/qui-sommes-nous-who-are-we-quienes-somos/gerard-vergnaud-2/
https://cv.hal.science/francois-conne?langChosen=fr (François CONNE HAL)
http://www.unige.ch/fapse/life/archives/livres/alpha/L/Lemoyne_Conne_1999_A.html
https://isidore.science/a/lemoyne_gisele
https://www.aprum.umontreal.ca/Lettres/2022/2022-09-01.pdf (page 16)
calculatrice défectueuse https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/73x4_1560958332233-pdf
https://www.gdm.quebec/communauté/gisèle-lemoyne (* photo et témoignages)
http://www.forum.umontreal.ca/numeros/1999-2000/forum00-03-06/article02.html (photo donner du sens aux mathématiques), calculatrice défectueuse)**
https://www.aprum.umontreal.ca/Disparus/Lemoyne-G.pdf (avec PHOTO)
https://numerique.banq.qc.ca/patrimoine/details/52327/4190026 (hommage 2005, 9 occurrences, p144 et sqq)
Un premier indice : Les îles de Guadeloupe sont 3500 kilomètres de Montréal. Elles sont situées sur le même fuseau horaire que Montréal, **GMT - 4**. En Guadeloupe, nous ne changeons pas d'heure en Hiver, contrairement au Canada. Le fait que le livre de Gisèle LEMOYNE soit à la médiathèque numérique de Guadeloupe, n'est pas anodin non plus !
L'arbre https://gw.geneanet.org/jupitree?lang=fr&pz=joseph&nz=coezy&ocz=1&p=timoleon&n=lemoyne montre qu'il n'a pas eu d'enfants, mais qu'il avait 9 frères et sœurs.
Lundi 13 février 2023 Mr Joseph Coëzy de geneanet me répond par retour de mail : **Timoléon Lemoyne est décédé le 26 septembre 1958 à Saint-Claude [Guadeloupe]**, cette indication figure en marge de son acte de naissance, lien ci-après

http://anom.archivesnationales.culture.gouv.fr/caomec2/osd.php?territoire=GUADELOUPE&commune=VIEUX-HABITANTS&annee=1889&typeacte=AC_NA - vue n° 41, acte 156.

Je n'ai pas de photo de lui et n'en sais pas plus sur lui.

> Je ne sais pas s'il a un lien avec Gisèle Lemoyne, la démarche que je vous conseille est de vous procurer l'acte de décès de Gisèle où figurent peut-être des

informations sur ses date et lieu de naissance et sur ses parents.

Pour **Gisèle Lemoyne** : de plus en plus de curriculum vitae, ne comprennent plus de données PERSONNELLES (date et lieu de Naissance, date et lieu de décès, villes, habitat personnel, portrait. Anecdotes…) ; Ils forment un ensemble **« HORS SOL »** ; Absence qui les rend aussi intéressants et attrayantes, qu'un relevé comptable, une table des matières, contrairement à tout ce qui disent les livres d'histoire des sciences :

- Histoire de la science par Pierre Rousseau https://fr.wikipedia.org/wiki/Pierre_Rousseau_(vulgarisateur) https://fr.shopping.rakuten.com/offer/buy/267634592/histoire-de-la-science-rousseau-pierre-de-pierre-rousseau.html?fbbaid=7753793104&t=180191&gclid=CjwKCAiA0cyfBhBREiwAAtStHOameiUSqz0Kn2qxmUFPRtLjMe3UoKGJMmFXCjMFcNOt6Qn2ji9JAxoCFLwQAvD_BwE

- Histoire de la science Pleiade https://www.histoires-sans-fin.fr/produit/histoire-de-la-science-encyclopedie-de-la-pleiade/

- Les grands Mathématiciens Eric Temple Bell (Payot 1961) https://fr.wikipedia.org/wiki/Eric_Temple_Bell

- La mathématique reine et servante des sciences Eric Temple Bell (Payot 1953) https://www.amazon.fr/Temple-Mathématique-reine-servante-sciences/dp/B0018IWWCM où page 396 le profil extraordinaire (*) de Louis-Paul-Émile RICHARD (Le professeur de Mathématiques Spéciales de GALOIS, en 1828) devrait dessiller les yeux de Mr D'Arrisso !)
  (*) *(En 1828, Galois avait dix-sept ans ; ce fut pour lui une grande année. Pour la première fois il rencontra un homme capable de comprendre son génie. Louis-Paul-Émile RICHARD (1795-1849), Professeur de Mathématiques Spéciales à Louis Le Grand. Richard n'était pas un pédagogue gourmé, mais un homme de valeur qui dans ses heures de loisir, suivait des cours de géométrie à la Sorbonne et se tenait au courant des progrès des Mathématiques réalisés par les savants contemporaines, pour en faire profiter ses élèves.* ***Cet homme qui n'aurait pas fait un pas pour ses propres intérêts ne jugeait aucun sacrifice trop grand lorsque l'avenir d'un de ses élèves était en jeu.****….) 5 6 23 Par Roland Brasseur que je remercie : (pour la recherche d'un portrait de Richard :* Très très probablement impossible. Ni épouse ni descendance, ni frères ou sœurs connus, à peu près aucun document de l'époque ne lui est consacré, et les quelques journaux qui annoncent son décès ne publient pas de photos. Pas de statue commémorative non plus. Il n'était membre d'aucune académie. Pas de photo de cérémonie (distribution des prix ou autre) à laquelle il aurait participé. Seule chance, de probabilité quasi nulle : une caricature faite par un de ses élèves (Galois, Hermite, Le Verrier, Serret, ou un moins connu qui aurait laissé des archives) et conservée depuis près de deux siècles. Tout sur Stéphanie D, dans « les maths de Ian Stewart !

En fait tout historique est « pour l'honneur de l'esprit humain » https://www.apmep.fr/Faut-il-etudier-la-teratologie (voir à la fin)
C'est Carl Gustav Jacobi dans une lettre à Adrien-Marie Legendre le 2 juillet 1830 lors du décès de Fourier, qui employa cette expression (Il ne fut pas le premier car Laplace l'utilisa en 1812, et principe des belles lettres de Charles Batteux en 1802 tome 1 p 129.

21 2 2023 06h59 réponse du Vice-Doyen de l'Université de Montréal :

Bonjour,

Notre institution ne détient pas ces informations, et si elle les détenait, elle ne pourrait vous les fournir pour des raisons de confidentialité des dossiers de ses employés.

Cordialement,

David D'Arrisso | B.Ed., M.A., Ph.D.
Vice-doyen aux affaires professorales et Secrétaire de Faculté
Faculté des sciences de l'éducation
Professeur agrégé
Département d'administration et fondements de l'éducation

T 514 343-6650

90, boul. Vincent D'Indy
Bureau B-511, Montréal QC H2V 2S9

(message gardé !)

---

https://fse.umontreal.ca/faculte/departement-dadministration-et-fondements-de-leducation/corps-professoral/fiche/in/in15898/sg/David%20D%27Arrisso/

Ma réponse du 21 2 23 à 07h10 /VIDIANI
Fontaine Les Dijon
Bonjour Monsieur Le vice-Doyen (:-) Le 21 Février 2023 06h59

Merci de votre réponse rapide qui m'évite d'attendre dans cette direction.

Je comprends vos raisons, mais je ne les approuve pas ; à force de « principes de précautions » on n'arrive à rendre tout terne (voir en dessus du trait) (le copié collé de ce qui concerne l'histoire de la science au-dessus du trait !)

Je vous souhaite une bonne journée !

https://www.usherbrooke.ca/registraire/fileadmin/sites/registraire/Annuaires_en_PDF/1954-1960/58-59_Annuaire_General_-_Cinquieme_Annee_Academique.pdf cours ESD sciences domestique (filles)

4 3 2023 **Avis de recherche sur Gisèle LEMOYNE** : (lien avec la Guadeloupe, lieu de Naissance, sa vie, ... etc) ; Je renonce provisoirement, mais tout lecteur qui sait quelque chose, est prié de prendre contact avec moi. (mon adresse mail est en tête de l'article).

24 mai 2023 par site mesaieux https://www.mesaieux.com/fr/recherche_genealogique/fiche_famille?NoFiche=2647287&msg=m1 Mariage en 1964 avec Serge Pellerin, sa date de naissance après 1940 n'a pas été numérisée : il faut une copie à l'état civil du Québec, mais il faut un code sequr...

Comme je suis tenace, (et que les tels refus, ne font que renforcer ma recherche), cela n'a comme effet que de reculer de quelques mois () l'obtention d'une réponse précise elle !

ÉTAT CIVIL du Québec : Premier contact 26 mai 2023, puis le 12 juin il me faut remplir le « bon formulaire », ce que j'envoie et poste le 13 juin 2023 en payant par carte 24,70 $ canadien dont le cours en euros fluctue chaque jour, (soit 17,73 euros qui me sont prélevés sur le relevé de ma carte le 22 juin, sans oublier les « frais d'opération à l'étranger » 0,83€.

Ses livres : https://books.openedition.org/pum/14665?lang=fr

La calculatrice défectueuse :

https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/73x4_1560958332233-pdf#:~:text=L%27idée%20ingénieuse%20de%20Gisèle,en%20recherchant%20une%20séquence%20d%27

http://www.forum.umontreal.ca/numeros/1999-2000/forum00-03-06/article02.html

https://slideplayer.fr/slide/4797429/

http://www.forum.umontreal.ca/numeros/1999-2000/forum00-03-06/article02.html

http://ife.ens-lyon.fr/editions/editions-electroniques/enseignement-des-mathematiques-et-tice

(151 pages)

planches 7, 11,.../46 de https://www.slideserve.com/autumn-jimenez/sophie-ren-de-cotret-universit-de-montr-al-inrp-umr-adef-gis-le-lemoyne-et-lalina-coulange

(2) Râmis (Masson 1961) tome IV couverture orange page 360 exo 3 ; Aire du croissant.

(3) ROD Râmis Odoux Deschamps mathématiques Spéciales tome 3 (topologie et éléments d'analyse) (Masson 1976) Pour chercher les primitives de fractions rationnelles pages 245-246 ne surtout pas utiliser la méthode trigonométrique qui sort de la rationalité !

(4) Site d'Alain ESCULIER http://aesculier.fr
http://aesculier.fr/fichiersMaple/cerclesApollonius/cerclesApollonius.html

(5) Lien avec le drapeau Mauritanien
https://fr.wikipedia.org/wiki/Drapeaux_musulmans#/media/Fichier:Flag_of_Mauritania.svg
et l'analyse https://www.agoravox.fr/tribune-libre/article/surprise-le-saviez-vous-voici-d-ou-106881 gazré ??? c'est-à-dire établi gazra, pour obtenir un récépissé. (accaparé), squatté les sionistes ayant depuis gazré le symbole comme les nazis ont gazré la croix gammée, comme ils ont gazré la Palestine…. »

(6) Théorème des Résidus (Augustin Cauchy 1826
https://fr.wikipedia.org/wiki/Résidu_(analyse_complexe) ; outre la formule donnée on peut aussi utiliser la fonction residue de Maple.

(7) Lemme de Jordan https://fr.wikipedia.org/wiki/Lemme_de_Jordan

(8) Pour de magnifiques élagages de courbes implicites, par la méthode du régionnement, voir René Chenon chef de travaux au conservatoire de Arts et Métiers (Riber éditeur 1964 Paris 2ème) 200 exercices de mathématiques générales page 145 pour $xy^2+2x^2-x=0$ avec trois factorisation et p 149 pour $(x^2+y^2-1)(x-y)=(x+y-1)(x+y)$ avec quatre factorisations. https://www.amazon.fr/Exercices-Mathématiques-Générales-conservatoire-National/dp/B01BPA8NA2

(9) Tous les calculs en Maple sont dans le fichier de 12 pages ` Implicite Cagnac p 133 ; date V 16 12 22 version 7 1 2023 08h12`

(10) QUARTIQUES UNICURSALES ; Brocard Bib p 158 : George Salmon Courbes planes pages 357-370 (1884 Gauthier Villars, Hachette 2019) ; pour éviter 35€50 Fnac ou 35€67 Amazone : préférer le livre numérisé 652 pages
https://books.google.fr/books?id=82N0vaav4IYC&printsec=frontcover&source=gbs_atb&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false
Mots savants : cubique canonisante, (p269 forme canonique ?) quartique tacnodale, https://fr.wiktionary.org/wiki/acnodal quartique oscnodale,...

http://serge.mehl.free.fr/anx/pt_double_implicite.html On parle de point *tacnodal* (du latin *tactus*, de *tangere* = *toucher*, qui a donné *contact*, de *cum* = *avec*, *ensemble* (Faa di Bruno, Jongmans, Halphen...en parlent). Manifestement les coefficients ont été choisi dans l'expression générale p 363-364 ; les quartiques unicursales correspondent aux quatre derniers cas (sur 10) du tableau page 302.

(11) Conséquences géométriques du théorème d'ABEL ; théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales (Tome I Études des fonctions analytiques sur une surface de RIEMANN) (Gauthier-Villars 1929) pages 397, 487-488, chapitre XII applications du théorème d'ABEL à la géométrie pages 483-522) pour d'autres liens voir la note en bas de la p 483 ; Georges VALIRON équations fonctionnelles (Masson 1950) pages 67-69 théorème de HUMBERT ; D'autres éléments dabs le cours de Berger 4 p 190 par exemple) ; Favard 2 p 528 ; Navale 1930, Agrégation 1947 fermeture hexagonale https://www.georges-vidiani.com/wp-content/uploads/2020/11/8-Fermeture-Hexagonale.pdf ; https://www.georges-vidiani.com/wp-content/uploads/2020/11/6-Geometrie-sur-une-strophoide.pdf

(12) Calcul de l'aire aléatoire https://fr.quora.com

Quelle est la meilleure méthode pour calculer l'aire d'une forme ou d'une surface aléatoire ?

(13) **IMPLICITE :** Sur le domaine d'existence d'une fonction implicite définie par une relation entière G(x, y)=0. Œuvres de Gaston JULIA (sous la direction de Michel Hervé 6 tomes, volume III p 459-474. (Gauthier-Villars 1969) (187 articles et livres, 44 discours et allocutions)

(22 1 23) The Cauchy Method of Residues Volume 2: Theory and Applications.

(14) **MITRINOVIC Dragoslav S. (VP le 22 1 23 suggère une américanisation « Sénior » (*), ou un ajout tardif en hommage au grand père) https://galaksijanova.rs/wp-content/uploads/2022/05/image4-6.jpeg The Cauchy Method of Residues Volume 2: Theory and Applications** https://link.springer.com/book/10.1007/978-94-011-2000-5 **(1984) ; 144,16 euros par Amazon ; peut être obtenu par SUDOC ; une autre voie est de se rendre sur le lien précédent et de choisir les pages concernées (par exemple page 7 un tableau particulièrement intéressant de 11 lignes donnant l'évolution des résidus ; on peut copier et coller dans un document vierge Word préalablement ouvert et on a peu de temps pour copier. Page 6 exemple 8 issu du tome 1 p 14-15 sous forme de déterminant.** https://books.google.pn/books?id=-suKhxfPH5AC&printsec=copyright#v=onepage&q&f=false **(soft cover 89,66 €)**

(*) AJ le 22 1 23 19h10 « sans être totalement sûr, comme il est Serbe, je pense que ça fonctionne comme en Russe, c'est à dire que c'est le prénom de son père ("fils de...") Si tu prends la pages Wikip en cyrilliques. »

https://sr.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D1%80%D0%B0%D0%B3%D0%BE%D1%81%D0%BB%D0%B0%D0%B2_%D0%9C%D0%B8%D1%82%D1%80%D0%B8%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%9B

Une bio est proposée en pdf (en bas); où on lit **Svetislava** comme nom du père... tu rajoutes quelque chose comme un "vitch" à la fin et ça doit le faire... mais attention, je raisonne par analogie, je ne parle pas serbe!

(15) **Unicursale** : http://serge.mehl.free.fr/anx/courbe_alg.html On parle alors de courbe *unicursale* (le terme est de Cayley), du latin *unus* = *un* et *cursivus,* participe passé de *currere* = *courir*, pour signifier que chaque point peut être construit individuellement et rendre compte de la courbe.

» Le grand intérêt des courbes unicursales réside en particulier dans la recherche de points à coordonnées rationnelles (entières ou fractionnaires) permettant la résolution d'équations diophantiennes. La recherche de l'existence de points à coordonnées entières sur une courbe elliptique est à la source des travaux de Y. Taniyama et A. Wiles dans la résolution du "Grand" héorème de Fermat. Par extension, on qualifie parfois d'*unicursale* une représentation paramétrique x = f(t) , y = g(t) non nécessairement rationnelle.