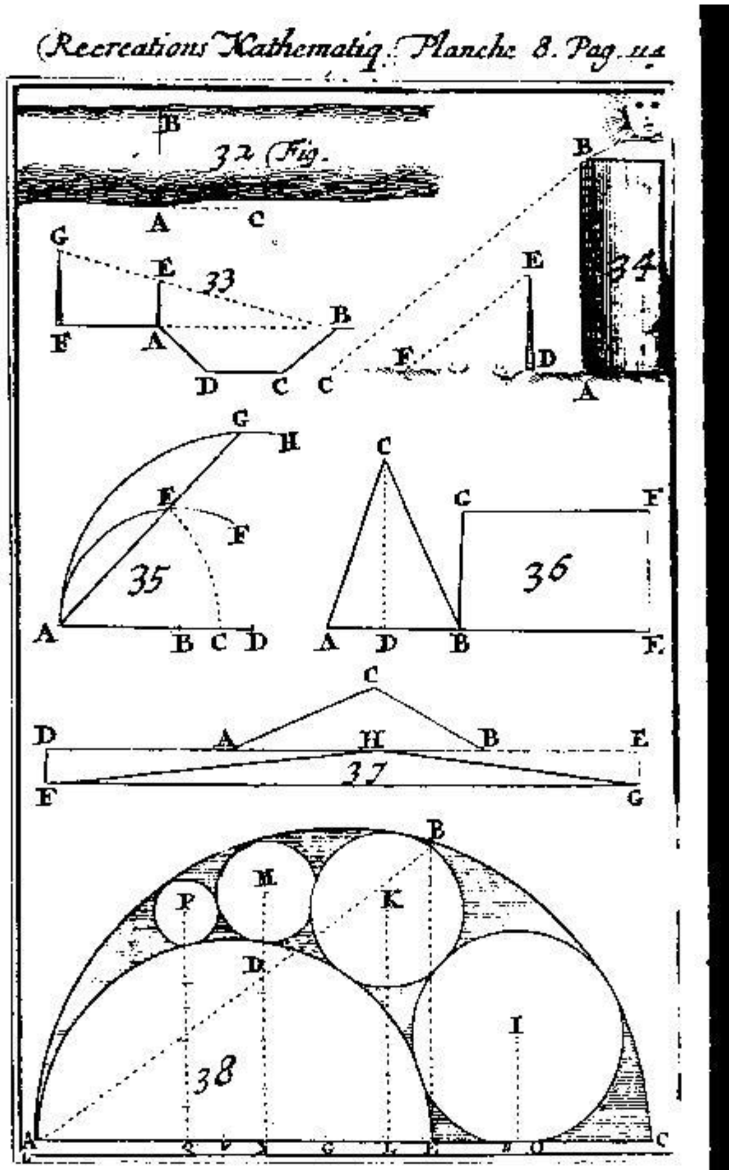
mercredi 3 mai 2023 15:17

Somme des aires des cercles tangents aux frontières de l'Arbelos

Lazare Georges VIDANI

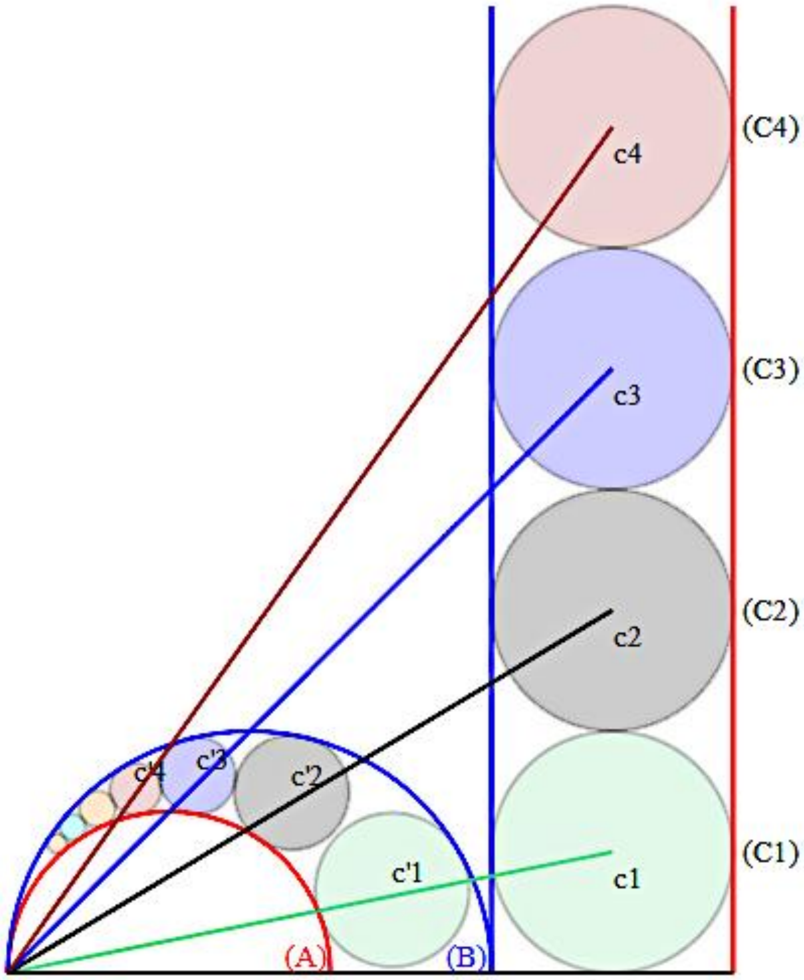
Résumé. Arbelos signifie « couteau du Savetier ; le but de l'article est de calculer la somme des aires des disques tangents aux deux cercles frontières, et tangents entre eux.

La figure 36 des « récréations Mathématiques et Physiques » de OZANAM (de l'Académie Royale des Sciences, et Professeur de Mathématique) éditées à Paris chez Jombert rue Saint Jacques, au coin de la rue des Mathurins, à l'Image Notre Dame en 1689, avec Privilège du Roy est :

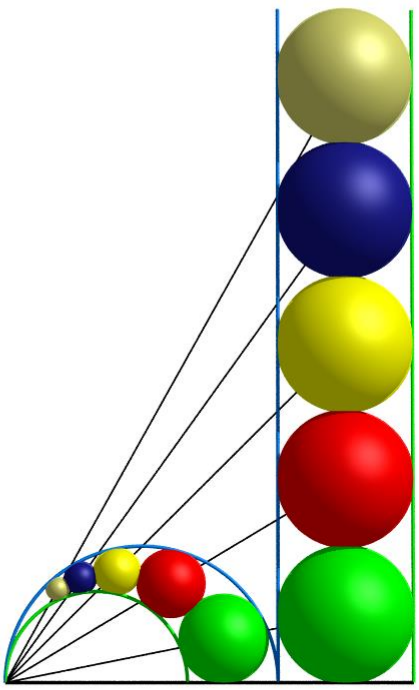


ÉNONCÉ : Deux demi-cercles de diamètre OA=a et OB=b sont tangents intérieurement. On construit le cercle C1 tangent à OA et aux deux demi-cercles, puis le cercle C2 tangent à C1 et aux deux demi cercles, et ainsi de suite… Calculer la somme ∑des aires des cercles C1, C2…., Cn,….

L'intérêt de cet exercice est qu'il mêle étroitement, géométrie, analyse, séries de Fourier, fonctions analytiques



Et encore plus visuel : illustré par Jos LEYS



SOLUTION : l'inversion $\mathfrak{I}(0,a^2)$ transforme les deux cercles (A) et (B) en deux demi droites perpendiculaires en A et C(c) avec $c=\frac{a^2}{b}$, à OA, et les cercles Cn en les cercles C'n, qui parce que

l'inversion conserve le contact, sont tous tangents aux deux demi droites précédentes ;, donc tous de même rayon $R'n = \frac{c-a}{2}$ et leurs centres C', vérifient immédiatement (I étant le milieu de AC) $IC'n = (c-a)\left(n+\frac{1}{2}\right)$.
En outre les cercles Cn sont aussi homothétiques des cercles C'n, dans les homothéties respectives $\mathfrak{H}$(O,kn) où $kn = \frac{OTn}{OT'n} = \frac{a^2}{(OT'n)^2}$ car $OTn.OT'n = a^2$, la figure n'étant faite que pour T1 et T'1 ;

Mais OT'^2_n est aussi la puissance de O par rapport au cercle C'_n donc égale à ${OC'_n}^2 - R'^2_n$, or par le théorème de Pythagore appliqué au triangle OIC'_n , ${OC'_n}^2 = OI^2 + {IC'_n}^2$ par conséquent
$OT'^2_n = OI^2 + {IC'_n}^2 - R'^2_n$
-

L'aire de Cn est donc $S_n = k_n^2(\pi R'^2) = \frac{a^4\pi\frac{(c-a)^2}{4}}{\left[\frac{(c+a)^2}{2}+\frac{(c-a)^2}{2}(2n+1)^2-\frac{(c-a)^2}{4}\right]^2} = \frac{4\pi a^2b^2(a-b)^2}{[4ab+(a-b)^2(2n+1)^2]^2}$
(car le rapport des aires est le carré du rapport d'homothétie)

Donc

$$\boxed{\boldsymbol{\Sigma = 4\pi a^2b^2(a-b)^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{[4ab+(a-b)^2(2n+1)^2]^2}}}$$

Or soit par la théorie des fonctions analytiques, soit par celle des séries de Fourier en développant la fonction $f_t(x)$ paire, 2π périodique égale à cos(tx) sur $[-\pi,+\pi]$, $t \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ (formule valable pour t complexe, en particulier t=iu u réel, où le cosinus devient ch) on obtient :

$$\cos t\,x = \frac{\sin t\pi}{t\pi} + \frac{2t\sin t\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2-t^2}$$

soit pour $x=\pi$, la formule d'EULER (1755) (cas particulier du théorème de Mittag Leffler (qu'une légende rend responsable du fait qu'il n'y a pas de prix Nobel de Mathématiques…) $\cot\pi t = \frac{1}{\pi t} + \frac{2t}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-t^2}$ et en changeant t en it $\coth\pi t = \frac{1}{\pi t} + \frac{2t}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+t^2}$
Soit $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+t^2} = \frac{1}{2t^2}[\pi t\ coth\pi t - 1]$ avec $t \notin i\mathbb{Z}$

Posons $t = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \propto > 0,\ \beta > 0$ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\frac{\propto}{\beta}+n^2} = \beta\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\propto+\beta n^2} = \frac{\beta}{2\propto}\left[\pi\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\ coth\pi\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} - 1\right]$ et donc
$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\propto+\beta n^2} = \frac{1}{2\propto}\left[\pi\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\ coth\pi\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} - 1\right] = \varphi(\propto,\beta)$ or $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\propto+\beta n^2} = \sum_{n\ pair}\frac{1}{\propto+\beta n^2} + \sum_{n\ impair}\frac{1}{\propto+\beta n^2}$

Donc
$\sum_{k\geq 0}\frac{1}{\propto+\beta(2k+1)^2} = \varphi(\propto,\beta) - \varphi(\propto,4\beta) = \frac{1}{2\propto}\left[\pi\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\ coth\pi\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\ -\ -\pi\sqrt{\frac{\alpha}{4\beta}}\ coth\pi\sqrt{\frac{\alpha}{4\beta}}\ \right]$
En simplifiant :

$$\sum_{k\geq 0}\frac{1}{\propto+\beta(2k+1)^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{\propto\beta}}\left[coth\pi\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\ - \frac{1}{2}\coth\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right]$$

« Or » la formule de trigonométrie hyperbolique $\cot 2u = \frac{1}{th\ 2u} = \frac{1+th^2 u}{2\ thu} = \frac{1}{2}\coth u + \frac{1}{2} th\ u$ nous donne alors :

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{\propto + \beta(2k+1)^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{\propto \beta}}\ th\,(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}})$$

La convergence de cette série et la convergence uniforme en particulier de la série dérivée (car normale sur $[\varepsilon, +\infty[$ justifie une dérivation terme à terme (par rapport à $\propto$), qui donne :

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(\propto + \beta(2k+1)^2)^2} = \frac{\pi}{8 \propto \sqrt{\propto \beta}}\ th\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right) + \frac{\pi^2}{16 \propto \beta}\left[th^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right) - 1\right]$$

Prenons $\propto = 4ab, \beta = (a-b)^2, a > 0, b > 0$
Il vient, toutes réductions faites laissées aux bons soins du lecteur…

$$\boxed{\Sigma = \frac{\pi^2\sqrt{ab}}{16}\left[\pi\sqrt{ab}\ th^2\frac{\pi\sqrt{ab}}{a-b} + (a-b)th\frac{\pi\sqrt{ab}}{a-b} - \pi\sqrt{ab}\right] = \pi^3\frac{ab(sh\,r - r)}{8r(1+chr)}\quad avec\ r = \frac{2\pi\sqrt{a}}{a-b}}$$

On peut chercher des équivalents, lorsque b tend vers a.

Références

(1) Bulletin APM 350 septembre 1985 pages 784-786 problème posé par ROGER CUCULIERE qui donne en préambule de sa proposition de sujet, cette belle figure d'OZANAM ! (accord de reproduction de cette image, donné par mail le 15 12 2022 7h03)

(2) Bulletin APM 355 septembre 1986 pages 558-561 solutions diverses.

(3) Tissier 2 page 121

(4) Flory IV p 90

(5) Denis Feyel et Armand de la Pradelle (Paris Diderot) collection U 1973 p 206
https://pictures.abebooks.com/inventory/17325126558.jpg
https://books.google.fr/books/about/Exercices_sur_les_fonctions_analytiques.html?id=kyzvAAAAMAAJ&redir_esc=y
http://www.math-evry.cnrs.fr/_media/members/lemarie/denis_feyel.pdf

(6) Valiron 1 p 43 et 384 (pour la formule d'Euler 1755 sur cotang)

(7) American Mathematical Monthly june 1985 et June 1997 et june 87 généralise si le cercle C1 n'est pas tangent à Ox

(8) Pour la science mars 1979 Arbelos et tranchet du cordonnier

(9) Monde de Martin Gardner Bibliothèque pour la science, diffusion Belin p 91-95

(10) Dictionnaire PUF alternative de Steiner

(11) Berger tome 2 page 190

(12) Tangente hors-série 84 : Les magnifiques illustrations, de la revue tangente Hors-série 84 de Décembre 2022, celle de couverture, puis celles illustrant le bel article de François Lavallou « Des cercles Touchants » pages 18-22 et le non moins esthétique article « L'arbelos d'Archimède à Pappus » d'Antoine Houlou-Garcia pages 10-13 ont agi sur moi, comme des madeleines de Proust, et rappelé un exercice que je donnais à mes élèves de Mathématiques Spéciales, en TP 9 (celui sur les séries de Fourier) et issu d'un problème posé dans APM 350 (voir la bibliographie)

Sitographie

Magnifiques images du site de Jos Leys (Ingénieur-artiste, géomètre) https://images.math.cnrs.fr/_Leys-Jos_.html 32 citations dans https://www.pourlascience.fr/sr/logique-calcul/jos-leys-un-artiste-geometre-2444.php pour la science 342 avril 2006 index http://www.josleys.com/galleries.php?showdate=1

(1) **http://www.josleys.com**

(2) http://www.josleys.com/show_image.php?galid=286&imageid=9115 (couverture de tangente)

(3) Arbelos flottant : http://www.josleys.com/show_image.php?galid=287&imageid=9147

(4) ARBELOS https://fr.wikipedia.org/wiki/Arbelos (beaucoup de liens Mathword, Boas…

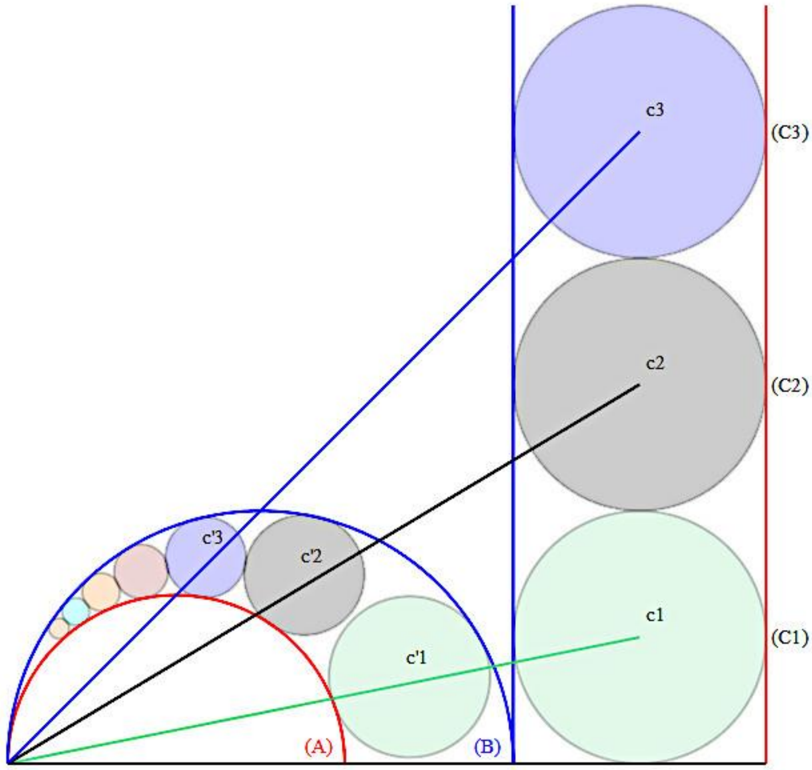
(5) En ancien grec https://en.wiktionary.org/wiki/arbelo

(6) https://images.math.cnrs.fr/L-arbelos-Partie-I.html

(7) Tranchet http://www.numdam.org/article/BSMF_1944__72__68_0.pdf

---

14 XII 22 Esculier ça fait peut-être une image plus carrée et la partie cercles inverses grossie en se limitant à 3 cercles à droite. 13 XII **"Je te ferais les images que tu veux à une seule condition : je ne veux pas de référence à mon nom pour ces images (ça ne présente aucune difficulté (*) à faire) et je ne fais rien sur l'article.**
Si je te propose une image décorative, je mettrai mes références sur l'image.


c3
(C3)
c2
(C2)
c1
(C1)
c'3
c'2
c'1
(A)
(B)