Lazare Georges VIDIANI 64 rue de l'EUROPE 21121 FONTAINE LES DIJON
tel 03 80 56 65 53 georges.vidiani@orange.fr
(ou 23 rue de la Croix Blanche Précelles 71490 Saint Jean de Trézy)

23 (+5 AV) articles sur http://www.georges-vidiani.com
*** 18 articles sur **https://www.georges-vidiani.com/wp-content/uploads/2020/10/0-Culture-Math-2018-18-articles-LGV-figures-Juel_27-05-2020_1700.pdf** https://www.pinterest.fr/georgesvidiani/1955-essayant-un-costume-violetta-pour-la-traviata/

CERCLES DE VILLARCEAU

Une équation du tore d'axe Oz, de cercle moyen de centre O et de rayon d, et de méridien de rayon r est classiquement (voir le web ou tous les cours de Mathématiques Spéciales, sur les surfaces de révolution) est

$$(x^2 + y^2 + z^2 + d^2 - r^2)^2 = 4d^2(x^2 + y^2)$$

Dans le plan méridien (Oyz), une tangente au cercle méridien a pour équation $z = y \tan a$ où $\frac{r}{d} = \sin a$. Car r<d (car le tore « a un trou central » il est dit « ouvert ») et en prenant cette tangente comme nouvel axe OY (OZ lui étant directement perpendiculaire, dans le plan méridien Oyz, d'équation x=0), cette tangente a pour équations (Z=0, x=X=0). (une droite dans l'espace R3 est l'intersection de deux plans).

Et le changement x=X y=cos a Y, et z=sin a Y, donne comme équation de cette section du tore par Z=0 () : $(Y^2 + x^2 + d^2 \cos^2 a)^2 = 4d^2\,(x^2 + Y^2 \cos^2 a)$

Et en remuant un peu (*), il reste

$$((Y^2 + x^2 - d^2 \cos^2 a)^2 - 4d^2 x^2 \sin^2 a = 0$$

On a une belle « différence de carrés » que l'on factorise

$$(Y^2 + x^2 - d^2 \cos^2 a - 2dx \sin a)(Y^2 + x^2 - d^2 \cos^2 a + 2dx \sin a) = 0$$

On reconnait deux équations de cercles dans le plan Z=0. (**)

$$\boldsymbol{Y^2 + (x - d\,sin\,a)^2 = d^2 cos^2 a} \quad \textbf{et} \quad \boldsymbol{Y^2 + (x + d\,sin\,a)^2 = d^2 cos^2 a}$$

Soit deux cercles (de VILLARCEAU) de même rayon d cos a.

(*) la même « astuce » est utilisée dans un exercice d'enveloppe (Pierre Martin application de l'analyse à la géométrie collection U Colin 1967) Enveloppe des cercles centrés sur une ellipse et orthogonaux au cercle centré au centre de l'ellipse et passant par les sommets su petit axe (l'enveloppe se décompose en deux cercles). Une solution est par exemple Maurice Crestey exercices et problèmes résolus tome III (Dunod 1972) page 274.

(**) On pouvait prévoir, avec la géométrie projective, que l'intersection du tore avec un plan bitangent se décomposerait en deux cercles : https://denisfeldmann.fr/maths.htm https://denisfeldmann.fr/PDF/cercles.pdf (Monsieur L'inspecteur Général Bérard, est passé par là). Cagnac et Commeau dans leur cours de géométrie descriptive fascicule 2 page 213 (Masson 1951), démontrent qu'il n'y a pas d'autres cercles sur un tore ouvert que les méridiens, les parallèles, et les cercles de Villarceau. Voir aussi Casanova descriptive (Belin) p 187.

() Ce raccourci, génial et stratégique, de calculer directement l'intersection du tore en question, avec le plan bitangent Z=0, est du à Monsieur Maillot, professeur de mathématiques spéciales en 1960, au **Lycée du Parc à Lyon.** (cours tapé par LGV 1958-1959 MII pp 53'-54). Ce professeur a utilisé le cours de mathématiques spéciales (éditeur MASSON 4ème trimestre 1953) Tome I éléments d'Algèbre et de géométrie analytique, par Hippolyte COMMISSAIRE et Georges CAGNAC tous les deux professeurs de mathématiques spéciales au Lycée LOUIS LE GRAND, le deuxième étant même Inspecteur Général de 1956 à 1972, il a même inspecté et très bien noté, ma future épouse à Bourg en Bresse en 1960).
https://drive.google.com/file/d/1TaERVMBhSK9pa98BbRQGI_5FAae3bS8Q/view
https://maitron.fr/spip.php?article18338
Les pages 544-545 consacrées au théorème de VILLARCEAU de ce livre, ont été » numérisées et sont copiées dans ce document à la fin de la SITOGRAPHIE ;

Pour ceux qui sont nostalgiques de la méthode globale plus calculatoire, voici ce calcul :
La matrice de passage P de la base du repère (Oxyz) à celle du repère (OXYZ) (rappelons que Ox=OX) est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a \\ 0 & \sin a & \cos a \end{pmatrix}$, et suivant la formule de changement de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, soit x =X, y= cos a Y -sin a Z et z= sin a Y+ cos a Z (en cherchant uniquement les points du plan bitangent Z=0, cela donne bien comme plus haut
y= cos a Y et z- sin a Y). Profitons de ce calcul, pour d'une part avoir l'équation du tore dans le repère OXYZ dont le plan horizontal Z=0 est le plan bitangent choisi plus haut OxY ;
une simple substitution donne
$\boldsymbol{(X^2+Y^2+Z^2+d^2-r^2)^2 = 4d^2(X^2+\cos^2 a\, Y^2+\sin^2 a\, Z^2-2\cos a \sin a\, YZ)}$ et que la coupe par Z=0 redonne bien $(Y^2+x^2+d^2\cos^2 a)^2 = 4d^2\,(x^2+Y^2\cos^2 a)$ point de départ de la première méthode.
Question : quelles sont les fonctions du cerveau qui font qu'il est très difficile, pour certains, de s'adapter à un raisonnement différent de celui dont ils ont l'habitude ? **metathesiophobie**
https://psy-92.net/2020/06/10/peur-changement-metathesiophobie/ ; peur des nouveautés et du changement ;
https://fr.wikisource.org/wiki/L'inertie_mentale_et_la_loi_du_moindre_effort_(Ferrero)
(inertie de l'esprit, inertie mentale https://www.180-360.net/inertie_mentale_psychologique , peur du changement, peur de l'inconnu, modification de méthode, de démonstration, phobie, peur de ce qui est nouveau, ….. https://www.manager-go.com/gestion-de-projet/vaincre-resistance-au-changement.htm) flexibilité cognitive https://vie-etudiante.uqam.ca/conseils-soutien/psycho/projet-resilience/26-conseils-et-soutien/soutien-psychologique/893-resilience-5.html ;
https://www.cairn.info/revue-l-annee-psychologique1-2009-1-page-155.htm
La personnalité est donc une manière singulière d'agir. Ce **comportement** est **influencé** par une combinaison d'émotions, déterminées par la **perception** de l'environnement, mais aussi par une prédisposition à agir : l'attitude.
Souplesse, adaptabilité, modestie,

https://www.leparisien.fr/archives/mais-si-on-peut-changer-30-10-2011-1693033.php

SITOGRAPHIE

- https://fr.wikipedia.org/wiki/Cercles_de_Villarceau
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Antoine_Yvon_Villarceau

- https://www.youtube.com/watch?v=s7s5Tyv1vNA **12 Juillet 2017** (calcul en vidéo) (Laetitia Lebeau Ingénieure https://www.amazon.fr/meilleur-réussir-lépreuve-mathématiques-concours-ebook/dp/B0868334PP 1 euros alors que seulement 27 sur le site youtube !) et même 228,46€ Formatt Kindle (paramétrées fiches demand 7 et 22 juillet 22 mais on le trouve avec le site à la puce suivante https://www.youtube.com/watch?v=N1cfb7GOPkk) https://www.amazon.com/meilleur-réussir-lépreuve-mathématiques-concours-ebook/dp/B0868334PP (10 demandes vaines du 7 au 19 juillet 22, : je me demande si site est devenu obsolète ? dommage car j'aurais pu conseiller éventuellement certains points de ces fiches, de ce initiative sympathique)
- https://www.youtube.com/channel/UCEP4IXhoDa33i08Ud-j8u2Q (67 euros livre électronique) 20 fiches

- https://journals.openedition.org/bibnum/638#tocto1n3 (article de Marcel Berger, Pour la science numéro 292, février 2002 https://journals.openedition.org/bibnum/638?lang=fr
- ARNAUDIES Jean Marie et J Lelong FERRAND Tome 3 cours de mathématiques (classes préparatoires) Géométrie et Cinématique (Dunod 1975) Exercice 52 (sur les cercles de VILLARCEAU) page 674 et dans la note NB fin du a) « Toute droite telle que L s'appelle une **FOCALE (de M Paul ROBERT) du cercle Γ** ») ; à ce sujet voir http://www.numdam.org/article/BSMF_1935__63__231_0.pdf où droites focales interviennent 19 fois et où la conférence du 3 janvier 1935 par Henri LEBESGUE, lui-même « sur les droites focales de M Paul ROBERT et leur application à la théorie des coniques est citée en préambule.
  http://www.numdam.org/item/?id=BSMF_1935__63__121_0 et
  http://www.numdam.org/item/10.24033/bsmf.1229.pdf (35 pages, focale 145 fois)
  https://www.google.fr/search?hl=fr&tbo=p&tbm=bks&q=inauthor:%22Paul+Robert+(professeur.)%22&source=gbs_metadata_r&cad=2
  https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/AAP/AAP60002/AAP60002.pdf p 46-48 Congruence paratactique 1960 brochure 2 APM (bib p 388 de http://www.georges-vidiani.com/wp-content/uploads/2016/09/Esim-84-Cyclide-de-Dupin-RMS-mai-19850001.pdf)
- Video https://www.youtube.com/watch?v=FHSJuwVuXbI
- https://pixabay.com/fr/videos/torus-villarceau-cercles-8104/
- Numérisation du calcul de Mr Maillot (Professeur de mathématiques spéciales Lycée du Parc Lyon 1960) à partir de l'original du cours de mathématiques spéciales Commissaire et CAGNAC Tome I/III p 544-545 (MASSON 4ème Trimestre 1953))

Cours de Mathématiques Spéciales
Tome 1 (éléments d'algèbre et de géométrie analytique p544-545 (MASSON 4ème trimestre 19
par Hippolyte Commissaire et Georges CAGNA
professeurs de Mathématiques Spéciales au Lycée LOUIS LE GR
(Gagnac inspecteur général 1956-1972)

p544

EXEMPLE III. TORE. — *On appelle tore la surface engendrée par un cercle en tournant autour d'une droite qui est située dans son plan et ne passe pas par son centre.*

Équation. — Rapportons la figure à des axes rectangulaires, l'axe Oz étant l'axe de révolution et l'axe Oy la perpendiculaire à cet axe menée par le centre du cercle générateur. L'équation de celui-ci dans son plan est

$$(y-a)^2+z^2-R^2=0.$$

Nous formerons l'équation du tore en remplaçant dans cette équation y par $\pm\sqrt{x^2+y^2}$. En isolant le radical et élevant au carré on trouve l'équation sous forme entière.

$$(x^2+y^2+z^2+a^2-R^2)^2=4a^2(x^2+y^2),$$

le tore est une surface du quatrième ordre.

Section par un plan bitangent. — On dit qu'un plan est bitangent à une surface s'il lui est tangent en deux points.

Imaginons qu'un plan P soit tangent à un tore en deux points A et B. Si P était perpendiculaire à l'axe du tore, le plan P ne serait pas bitangent, il serait tangent en tous les points du parallèle passant par A ou B. P n'étant pas perpendiculaire à l'axe, les normales en A et B ne sont pas parallèles à l'axe, elles le rencontrent en deux points distincts et comme elles sont parallèles, le plan qu'elles déterminent contient l'axe, c'est un plan méridien. En résumé, si un plan P est bitangent à un tore, les points de contact A et B sont dans un même plan méridien et la droite AB est une tangente commune aux deux cercles section de la surface par ce plan méridien; c'est une tangente commune intérieure, A et B étant les seuls points où P est tangent. Le plan P n'est réel que si a est plus grand que R, ce que nous supposons.

Prenons pour plan des yz le plan méridien qui contient A et B et soit φ l'angle aigu formé par Oy et AB (fig. 141); $R=a\sin\varphi$ et l'équation du tore devient

$$(x^2+y^2+z^2+a^2\cos^2\varphi)^2=4a^2(x^2+y^2).$$

Rapportons la section à deux axes de son plan, l'un OX confondu avec Ox, l'autre OY porté par AB et orienté de manière que dans le plan yOz $(\overrightarrow{Oy},\overrightarrow{OY})=\varphi$. Si M (x, y, z) est un

p545 point du plan bitangent, $x=X$, $y=Y\cos\varphi$, $z=Y\sin\varphi$; pour que ce point appartienne au tore il faut et il suffit que p545

$$(X^2+Y^2+a^2\cos^2\varphi)^2=4a^2(X^2+Y^2\cos^2\varphi).$$

En remplaçant au second membre X^2 par $X^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)$ et faisant passer $4a^2(X^2+Y^2)\cos^2\varphi$ au premier membre, nous mettrons cette équation sous la forme

$$(X^2+Y^2-a^2\cos^2\varphi)^2=4a^2X^2\sin^2\varphi,$$

elle représente deux cercles dont les équations s'écrivent séparément

$$X^2+Y^2-2aX\sin\varphi-a^2\cos^2\varphi=0,$$
$$X^2+Y^2+2aX\sin\varphi-a^2\cos^2\varphi=0,$$

ou

$$(X-a\sin\varphi)^2+Y^2=a^2$$
$$(X+a\sin\varphi)^2+Y^2=a^2.$$

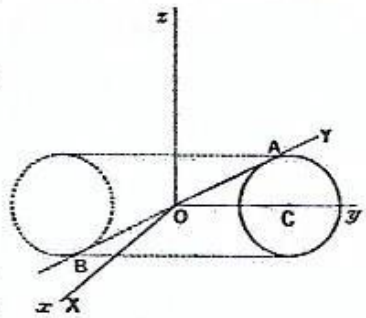


Fig. 141.

Ces cercles se coupent en A et B, ils sont symétriques l'un de l'autre par rapport au plan méridien des points de contact, leurs centres sont à une distance du centre du tore égale au rayon $R=a\sin\varphi$ du cercle générateur, ils sont égaux aux parallèles des points du cercle générateur où la tangente est perpendiculaire à l'axe parallèles dits parallèles moyens. Énonçons le résultat de ce calcul :

THÉORÈME D'YVON VILLARCEAU. — *La section d'un tore par un plan bitangent se compose de deux cercles.*

Projection de la section sur un plan perpendiculaire à l'axe. — Les cercles (C) et (C_1) qui composent la section se projettent sur le plan équatorial du tore (xOy) suivant des ellipses (E), (E_1) qui ont pour demi-petit axe $b=a\cos\varphi$, φ étant l'angle du plan bitangent et du plan de projection. La demi-distance focale de ces ellipses est donc $\sqrt{a^2-a^2\cos^2\varphi}=a\sin\varphi$; *il en résulte que le point O pied de l'axe est un foyer pour chacune des ellipses* E *et* E_1.

Remarque. — Appelons cercle (Γ) tout cercle déduit de (C) par une rotation autour de l'axe du tore et (Γ_1) tout cercle déduit de même de (C_1). Des raisonnements analogues à ceux que nous avons faits en étudiant la surface gauche de révolution permettent de reconnaître que :

1° Par tout point du tore, il passe un cercle (Γ) et un cercle (Γ_1);

2° Deux cercles (Γ) n'ont aucun point commun, il en est de même de deux cercles (Γ_1);

3° Un cercle (Γ) et un cercle (Γ_1) sont symétriques l'un de l'autre par rapport à un plan méridien et lorsque ces deux cercles ne sont pas dans le même plan, ils appartiennent à une sphère bitangente au tore en leurs deux points communs.

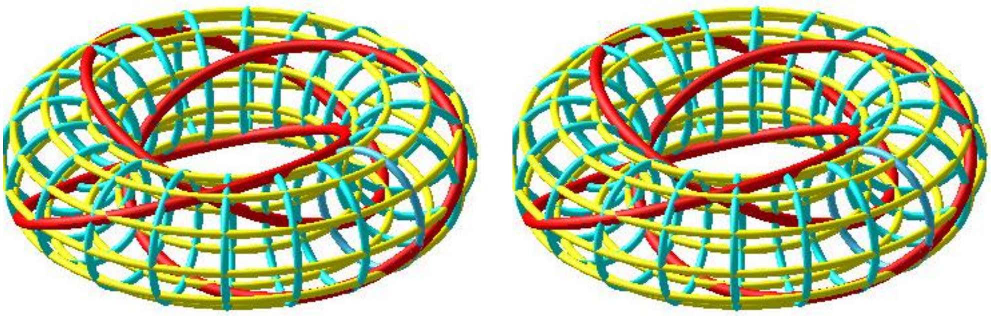
Par tout point du tore on peut tracer sur la surface un cercle (Γ), un cercle (Γ_1), un cercle dans un plan méridien et un parallèle, soit quatre cercles.

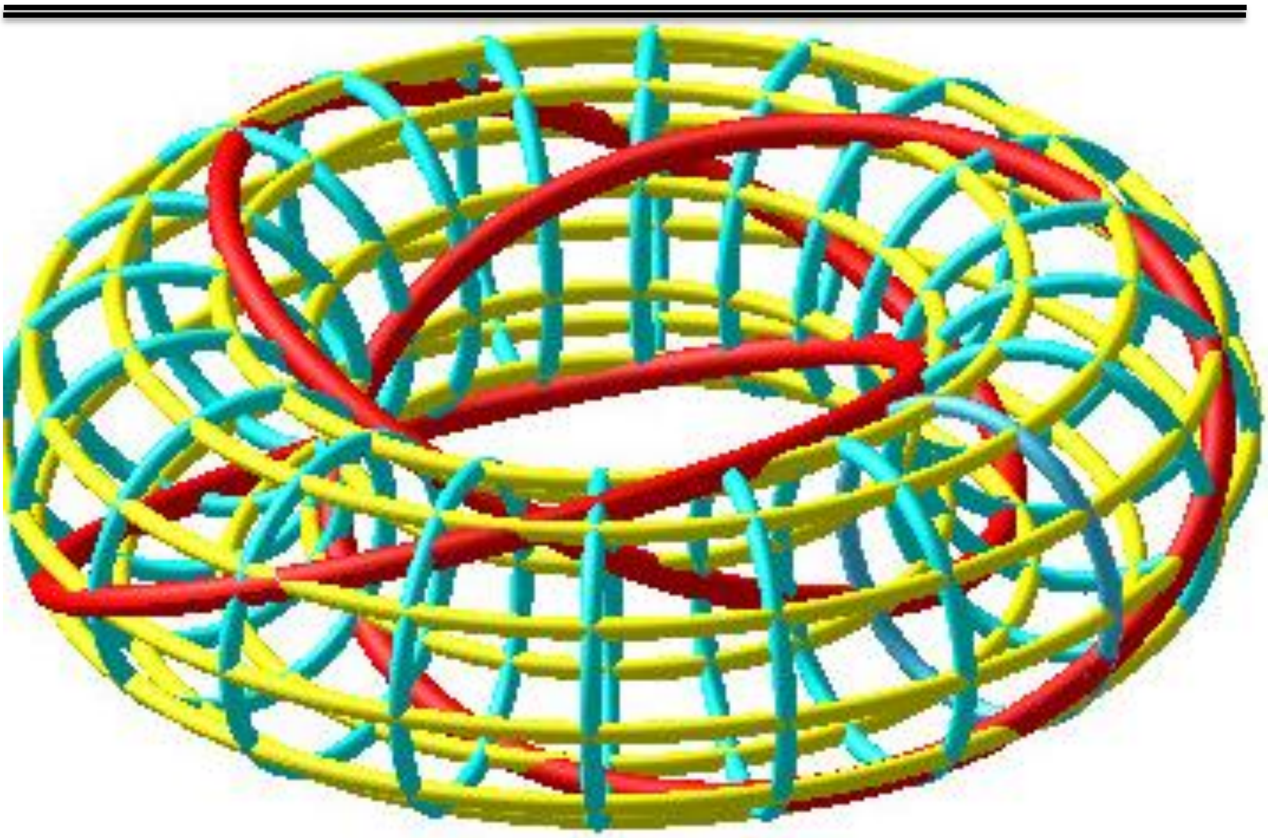
Né Antoine YVON, en 1837 lors de son inscription au concours de l'École Centrale, il ajoutera « de Villarceau » après YVON.

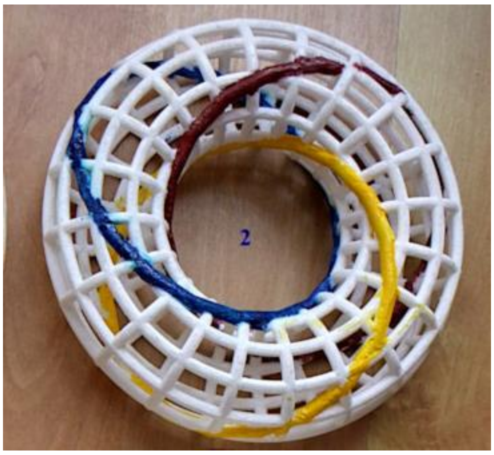
- **Présence dans les monuments https://www.pourlascience.fr/sd/art-science/les-cercles-de-villarceau-4629.php Voir aussi Berger (Cédic) tome 2 page 197 photo de l'escalier à vis du musée de l'œuvre Notre Dame à Strasbourg. https://journals.openedition.org/bibnum/638**
- **Vue d'ensemble sur ses travaux en Astronomie https://www.cosmovisions.com/Villarceau.htm**
- **Équation du Tore https://fr.wikipedia.org/wiki/Tore**
- **Tore https://mathcurve.com/surfaces/tore/tore.shtml**

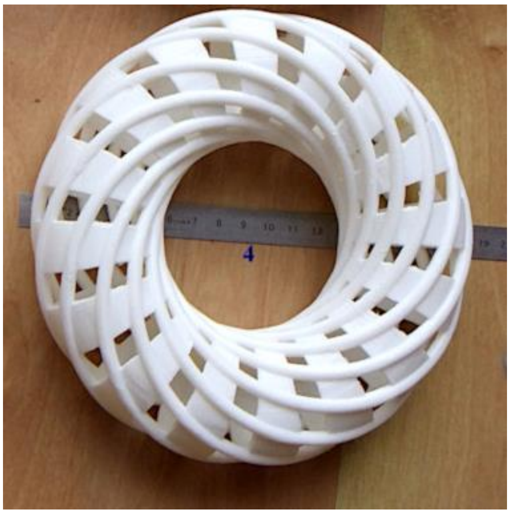
FIGURES faites par Alain ESCULIER

(Qui l'a fait avec une imprimante 3D, à ma demande, pour remercier mon menuisier qui avait fait gratuitement « un arbre à idées reçues (sur la maladie psychique) » lors d'une réunion « le grand Dej 2021 » de 200 associations)

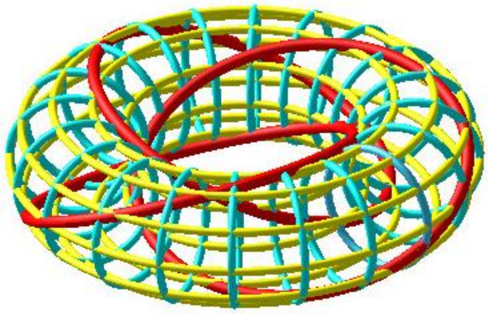


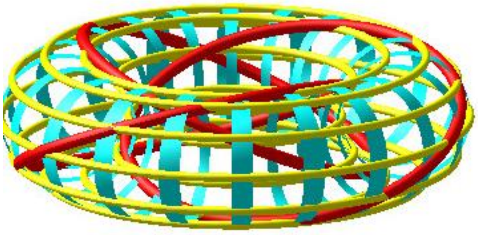


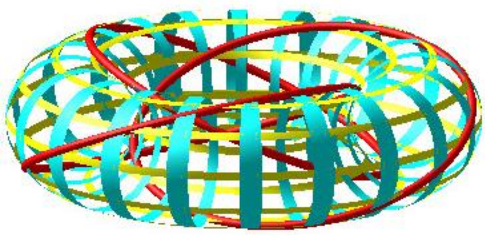




18 cm de diamètre







EXERCICES purement géométriques, laissés aux soins du lecteur *(issus de Ernest DUPORCQ Premiers principes de géométrie moderne Gauthier-Villars 1949) numéro 170 page 130*

1) *« Les sections planes du tore offrent un exemple simple de cycliques ; elles sont appelées spiriques. Le tore étant en effet l'enveloppe d'une sphère ∑ de grandeur donnée, dont le centre décrit un cercle **Γ**, toute section par un plan P pouvant être considérée comme l'enveloppe des cercles C suivant lesquels le plan P coupe les sphères ∑. Or tout point de l'axe du tore a même puissance par rapport aux sphères ∑ ; par suite le point **ω** où cet axe perce le plan P a même puissance par rapport aux cercles C, dont le centre décrut d'ailleurs l'ellipse suivant laquelle le cercle **Γ** se projette orthogonalement sur le plan P. Le cercle directeur est dans ce cas, concentrique à la déférente (alias lieu des centres des cercles) : les cycliques obtenues sont appelées « spiriques ». » (cf aussi Deltheil et Caire (ed Baillières 1951) p 392, 368, 260)*
   https://mathcurve.com/courbes2d/spiricdeperseus/spiricdeperseus.shtml
   http://serge.mehl.free.fr/anx/cbe_cyclique.html https://mathcurve.com/courbes2d/cyclic/cyclic.shtml

2) *« Dans le cas d'un plan bi tangent au tore, on se rend compte « facilement » que la déférente est bitangente au cercle directeur du tore. Par suite : la section d'un tore par un plan bitangent se compose de deux cercles. »*
3) En remarquant que la figure inverse d'un tore par rapport à un point de son axe est encore un tore, MANNHEIM a généralisé le théorème, précédent du à Villarceau et obtenu l'énoncé : toute sphère bitangente à un tore le coupe suivant deux cercles.

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mannheim/ https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k4861996/f91.item et anse de panier.

https://books.google.fr/books/about/Courbes_algébriques_planes_cubiques_et.html?id=9VPYwAEACAAJ&redir_esc=y
https://www.fr.fnac.ch/a10357256/Pierre-Nicaise-Courbes-algebriques-planes-cubiques-et-cycliques

https://www.librest.com/livres/courbes-algebriques-planes-cubiques-et-cycliques-pierre-nicaise_0-4224825_9782753904194.html?add_wishlist=1