L’intégrale de FRULLANI 31 mars 19h00 19h00 version 26.10.2019 11:45

Lazare Georges VIDIANI [lg\_vidiani@club-internet.fr](mailto:lg_vidiani@club-internet.fr)

**L’intégrale de FRULLANI**

Il s’agit de l’intégrale dt où f’ est continue sur (Nous l’appellerons intégrale de Frullani Multiplicative).

Nous préférons passer par l’intégrale de Frullani « Additive » ou de translation. u et v sont réels strictement positifs.

f étant continue sur , admettant des limites respectives et , en respectivement et  ; a et b étant des nombre réels, alors l’intégrale (dite de Frullani additive ou de translation) existe et vaut .

Soient X et X’ deux réels tels que X<X’, alors existe et le changement de variable x+a=u donne (par raison de lettre « muette » sous le signe intégral). De même le changement x+b, dans la seconde donne aussi

Par suite (par Chasles)

et donc

Par la formule de la moyenne pour c entre X+a et X+b et c’ entre X’ +a et X’+b, F(X,X’) tend vers donc FA(f)(a,b) existe et vaut  ;

On peut prendre f=th, f=Arctan, ou f=R où R est une fraction rationnelle sans pôle réel et de degré négatif ;

**Interprétation géométrique :** Dans un repère orthonormé xOy I est l’aire du domaine compris entre les graphes de y-f(x+h) et y=f(x). On passe du second au premier par la translation de vecteur (h,0)

**FIGURE et programme Maple du à Alain Esculier**

#------------- partie variable entre deux courbes fixes -------------

restart: with(plots):

n:=20;pas:=0.03;x0:=0.5;

fh:=proc(x) [x,tanh(x+h)] end: f:=proc(x) [x,tanh(x)] end:

partie:=proc(n) display([ seq(polygonplot([f(x0+i\*pas),fh(x0+i\*pas),fh(x0+(i+1)\*pas,0),f(x0+(i+1)\*pas)],color=cyan,style=patchnogrid),i=0..n)]): end:

display(plot({[[0,0],[2,0]],[[0,0],[0,1.5]]},color=black),plot([tanh(x),tanh(x+h)],x=0..2,color=[red,blue]),

display([ seq(partie(i),i=0..n)

],insequence=true),scaling=constrained,axes=normal);

partie(10);



**LIEN ENTRE FM ET FA :**

Dans FM on fait le changement de variable t=exp(x)

**Si on pose f\*=f°exp on a FM(f)(u,v)=FA(f\*)(ln(u) ,ln(v))**

**EXERCICES**

Voici quelque exemple ; la seule difficulté étant de trouver les fonctions f et les paramètres, qui permettent d’utiliser la formule précédente ;

Les solutions sont détaillées dans les références **[Râ], [CH2], [JLF], [STACK], [RYZ], [DEGRUY].**

On peut prendre f(t)=exp(-t) ; f=cos ; f=Arctan ; f=th ;

(voir **[CH2] )**

**SURPRISE**

Les multiples recherches par google avec les mots Frullani, integrals, mettent en avant, Ramanujan, (1913), Hardy, Ostrowski (1949), Feynman (intégrale du chemin, renormalisation), qui ont utilisé ces intégrales.

Le détail étant dans la Sitographie.

**BIBLIOGRAPHIE ET SITOGRAPHIE**

**FRULLANI**

La première fois où j’ai vu ce nom, c’est dans l’index page 456, ce n’est pas répété dans le texte) du livre de Jean BASS exercices de mathématiques (Masson 1965) pour l’exercice 3 pages 116-119. <http://aflb.ensmp.fr/AFLB-324/aflb324m563.pdf>

1. A Propos de Jean Bass, Laurent Schwartz écrit page 334 du même livre que celui cité ci dessous (à propos de Jacques Chapelon) : ***«lorsque Paul Lévy, prit sa retraite en 1958, les candidats à sa succession ne se bousculèrent pas…..Aucun des universitaires de renom ne le fit. Un candidat cependant se présenta : Jean Bass. Il travaillait en probabilités et avait fait des travaux connus en théorie de la turbulence. Il n’était, bien sûr, pas d’un niveau comparable à celui de Jacques Hadamard ou de Paul Lévy, mais c’était un mathématicien honorable. »***

Il (Frullani) est également cité, dans le cours de l’École Polytechnique de Jacques Chapelon IIème Division 1948-1949 II page 152 Index III 118 ; (en juge suprême auto-proclamé, Laurent Schwartz dit page 333 de son livre « un mathématicien aux prises avec le siècle » Odile Jacob 1997, ***« En mathématiques Paul Lévy et Chapelon, enseignaient de concert. Comme Savant, le second ne pouvait être comparé au premier. Ses cours étaient pourtant clairs et très appréciés. »*** )

[**https://fr.wikipedia.org/wiki/Giuliano\_Frullan**i](https://fr.wikipedia.org/wiki/Giuliano_Frullani)

y est cité **Ramanujan qui a généralisé** vers 1913

quarterly reports [1 p 313-318 ] (63 pages de 295 à 357) ; Pour Frullani voir aussi p296-297

Et l’on retrouve Greenhill

<https://books.google.fr/books?id=TT1T8A94xNcC&pg=PA18&lpg=PA18&dq=ramanujan++quarterly+313-318&source=bl&ots=ulwFthbiiw&sig=ACfU3U37Rp2WDqcxR_aLCSTzYRm7Aw9Blw&hl=fr&sa=X&ved=2ahUKEwiyoLfP19LjAhUd6OAKHQrID64Q6AEwAHoECAgQAQ#v=onepage&q=ramanujan%20%20quarterly%20313-318&f=false>

[**https://link.springer.com/content/pdf/bbm%3A978-1-4612-1088-7%2F1.pdf**](https://link.springer.com/content/pdf/bbm%3A978-1-4612-1088-7%2F1.pdf)

(copier dans la ligne de commande si refuse de s’ouvrir par click)

[**https://www.jstor.org/stable/2322782?seq=1#page\_scan\_tab\_contents**](https://www.jstor.org/stable/2322782?seq=1#page_scan_tab_contents)

<https://en.wikipedia.org/wiki/Frullani_integral>

Le nom de Frullani est également mis en avant dans Favard cours d’analyse de l’Ecole Polytechnique Tome 1 (Gauthier Villars 1960) page 412 exercice 7. La vie de Jean Favard (1902-1965) est évoquée dans l’Enseignement Mathématique II ème série tome XI fascicule 2-3 Mars-Septembre 1965, pages 101-103, sous la plume de Marc Zamansky.

« Mobilisé en septembre 1939 comme officier d’Artillerie, il participa aux combats de la bataille de France et est fait prisonnier en juin 1940. En octobre 1940, alors qu’il est déjà captif, il est nommé professeur à la Faculté des sciences de Paris. Dans le camp où il était, l’oflag XVIII A en Autriche, il crée une Faculté des Sciences dont il est le Doyen. Non seulement il enseigne, décerne certificats et grades, mais poursuit ses recherches qui font l’objet de deux mémoires qu’il fait paraître à son retour de captivité. »

Marc Zamansky fut interpellé à la télévision par le journalise Jacques Bloch Morhange, par un « Mon cher Doyen » pédant et cavalier.

<https://fr.wikipedia.org/wiki/Marc_Zamansky>

<https://www.samuelhuet.com/paid/44-polemos/251-zamanskysmasse-dinaptes.html>

<https://fr.wikipedia.org/wiki/Jacques_Bloch-Morhange>

**Quelques livres où l’exercice est proposé mais sans référence à Frullani**

1. L. Chambadal exercices et problèmes d’analyse mathématiques spéciales (Dunod Université 1978) Généralisation p 71-77
2. **[Râ] Râmis exercices d’analyse (Masson 1968) p 94-95 (aspect additif translaté) et 118 (aspect exponentiel, multiplicatif )**
3. **[CH2] Chambadal et Ovaert, cours de mathématiques Analyse II (Gauthier Villars 1972) p 459-461 ex 17 A 18 A et 19 B ; et p 499 ex 70 A** (D’après le tome 0 p 8 A B C indique la difficulté ↗︎ croissante des exercices)
4. **[JLF]** J. Lelong-Ferrand (Dunod Université 1977) p 190-193 aspect exponentiel, avec de nombreux exemples.
5. **[LEICH] Éric LEICHTNAM** exercices corrigés de mathématiques posés à l’oral des concours de Polytechnique et des ENS tome Analyse (ellipses 2000) pp 200-201 un de rares auteurs signalant les applications en physique (ce que m’a confirmé mon collègue et ami Marc Serrero) **« Cette intégrale intervient en physique et en géométrie non commutative. (Notion de logarithme Coulombien en Physique des plasmas et de Trace de DIXMIER). »**
6. Pour mémoire <http://mathworld.wolfram.com/FrullanisIntegral.html>

**TRACE DE DIXMIER**

<https://fr.wikipedia.org/wiki/Jacques_Dixmier>

<https://en.wikipedia.org/wiki/Dixmier_trace>

<http://www.formules-physique.com/categorie/1573>

<http://www.numdam.org/item/AIF_1963__13_1_219_0/>

**LOGARITHME COULOMBIEN**

Page 11/12 de <http://hebergement.u-psud.fr/m2apim/cours/cours%20APIM-2/cours2.pdf>

<https://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00245975/document>

<http://www.formules-physique.com/categorie/1573>

**Bracket method ; FEYMANN, HARDY, RAMANUJAN**

[https://www.science.gov/topicpages/h/harmonic-oscillator+transformation+brackets#](https://www.science.gov/topicpages/h/harmonic-oscillator+transformation+brackets)

**[DEGRUY] (12 pages avec des directions de généralisation)** [**https://www.degruyter.com/downloadpdf/j/math.2017.15.issue-1/math-2017-0001/math-2017-0001.pdf**](https://www.degruyter.com/downloadpdf/j/math.2017.15.issue-1/math-2017-0001/math-2017-0001.pdf)

**où surgissent Feymann (bib 6 9 10 11) Hardy (13) et Ramanujan 13 fois…**

[**https://www.degruyter.com/view/j/math.2017.15.issue-1/math-2017-0001/math-2017-0001.xml**](https://www.degruyter.com/view/j/math.2017.15.issue-1/math-2017-0001/math-2017-0001.xml) **6 pages et Frullani**

[**https://www.degruyter.com/downloadpdf/j/math.2017.15.issue-1/math-2017-0001/math-2017-0001.pdf**](https://www.degruyter.com/downloadpdf/j/math.2017.15.issue-1/math-2017-0001/math-2017-0001.pdf)

**21 pages method Bracket (crochet)**

**Ramanujan trois fois ; Feynman 4 fois ; Hardy 1902 bib 13 ;**

**De multiples exemples à partir de la page 4 dans la colonne de droite ;**

[**https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-01813978/document**](https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-01813978/document)

**(Ramanujan 6 fois Hardy 6 fois Feynman 24 fois Frullani 18 fois)**

**[RYZ]** [**https://arxiv.org/pdf/1005.2940.pdf**](https://arxiv.org/pdf/1005.2940.pdf)

7 pages Gradshteyn et Ryzhik ; Frullani integrales nombreux exemples et Ramanujan cité deux fois

<https://www.researchgate.net/publication/318729475_An_Extension_of_the_Method_of_Brackets_Part_1>

<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.232.9876&rep=rep1&type=pdf>

[**https://www.researchgate.net/publication/312669633\_Integrals\_of\_Frullani\_type\_and\_the\_method\_of\_brackets**](https://www.researchgate.net/publication/312669633_Integrals_of_Frullani_type_and_the_method_of_brackets)

**où on lit dès la page 1 :**

Abstract: The method of brackets is a collection of heuristic rules, some of which have being made rigorous,

that provide a ﬂexible, direct method for the evaluation of deﬁnite integrals. The present work uses this method

to establish classical formulas due to Frullani which provide values of a speciﬁc family of integrals. Some

generalizations are established

Abstract: The method of brackets is a collection of heuristic rules, some of which have being made rigorous,

that provide a ﬂexible, direct method for the evaluation of deﬁnite integrals. The present work uses this method

to establish classical formulas due to Frullani which provide values of a speciﬁc family of integrals. Some

generalizations are established

**« The method of Brackets, consisting of a small number of heuristic rules, was create by Ivan Gonzalez for the evaluation of definite integrals appearing in the resolution o FEYNAMN DIAGRAMS. The current work verifies eaxh step of this method, proves the independence on different representations of the integrand, and also modifies the rule by further considering analytic continuation. »**

[**https://arxiv.org/abs/1506.06985**](https://arxiv.org/abs/1506.06985)

[**https://www.researchgate.net/publication/279458481\_On\_the\_Method\_of\_Brackets\_Rules\_Examples\_Interpretations\_and\_Modifications**](https://www.researchgate.net/publication/279458481_On_the_Method_of_Brackets_Rules_Examples_Interpretations_and_Modifications)

**RENORMALISATION (Feynmann 1948)**

<https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorie_quantique_des_champs>

<http://feynman.phy.ulaval.ca/marleau/pp/18/18renormalisation.pdf>

<https://arxiv.org/abs/hep-th/9912092> (Texte d’Alain Connes)

**Quelques sites intéressants où on calcule des intégrales de Frullani**

* **[STACK] [https://math.stackexchange.com/questions/299371/ap](https://math.stackexchange.com/questions/299371/application-of-frullani-integral)**

**[plication-of-frullani-integral](https://math.stackexchange.com/questions/299371/application-of-frullani-integral)**

* [**https://math.stackexchange.com/questions/61828/proof-of-frullanis-theorem**](https://math.stackexchange.com/questions/61828/proof-of-frullanis-theorem)