Les quatre coccinelles : courbe de poursuite m 11:099 avril 2019 15h50 version 16.04.2019

Lazare Georges Vidiani (Fontaine Les Dijon) lg\_vidiani@club-internet.fr

**Les quatre coccinelles et leur poursuite mutuelle**

La page de couverture, au format A4, de scientific american de July 1965 <https://www.scientificamerican.com/magazine/sa/1965/07-01/>

 

Présentait une telle poursuite en couleur « the four bug problem » : le problème des quatre insectes, que nous exprimerons par « le problème des quatre coccinelles » qui fait quand même plus poétique que celui des quatre mouches ou pire celui des quatre souris ou des quatre chiens, comme on le rencontre parfois dans la littérature sur ce sujet (voir la bibliographie et sitographie).

1965 était l’année où la mode de l’Optical art explosait <https://fr.wikipedia.org/wiki/Op_Art>

En fait ce problème de poursuite est beaucoup plus ancien, puisque Edouard LUCAS proposa le « problème des trois chiens » dès 1877 (Nouv. Correspond. Math 3 1877 p 175-176).

**Énoncé : « les quatre Mouches (ou Coccinelles) Adèle, Berthe, Célestine et Dorothée sont aux sommets A,B,C,D respectivement, d’un carré de coté 2*a* ; Adèle vole vers Berthe, Berthe vers Célestine, Célestine vers Dorothée et Dorothée vers Adèle. Elles ont toutes la même vitesse de module constant *v*. »**

1. **Justification rigoureuse du fait qu’à tout instant, la figure qu’elles forment est un carré.**

L’argumentation classique $\left\{ \begin{array}{c}"La symétrie du problème " \\"Le système différentiel est autonome donc à chaque instant…" \\"La rotation qui fait passer de A\_{k} à A\_{k+1} fait passer de M\_{k} à M\_{k+1" }\end{array}\right.$

Ou encore « Les conditions du mouvement sont analogues, la figure reste un carré…. », pour intéressante et sympathique et poétique qu’elle soit, n’est pas convaincante car trop intuitive, ou affirmée, et ne passe pas le cap de l’analyse.

En effet le programme en Maple ci-après, portant sur trois mouches, par exemple, mais la configuration de départ n’étant pas régulière, pas équilatérale, montre nettement que les trajectoires dans ce cas d’une configuration initiale irrégulière ne sont pas les spirales logarithmiques attendues, et que la configuration de vol à tout instant ne reste pas semblable à elle-même ; (Il y a toujours un foyer attractif, compte tenu de l’attirance (courbe de poursuite) de chaque mouche vers la suivante) : Le cas régulier est donc un cas particulier qui simplifie le système car O est à la même distance des *n* mouches « initiales » (ici *n* = 4) : l’argument ($z\_{k} $étant l’affixe de la mouche numéro k, avec par convention $z\_{n+1}=z\_{1}$) $\frac{z\_{k+1} }{z\_{k}}$ est alors constant mais n’est pas une intégrale première, car ce fait dépend seulement de la régularité des conditions initiales.

Aussi je préfère la justification suivante : le système différentiel du mouvement global des *n* mouches, est $z\_{k}^{'}=v\frac{z\_{k+1}-z\_{k}}{|z\_{k+1}-z\_{k}|}$ équation $E\_{k}$, *k* = 1, …, *n* ; **« Nous allons vérifier que la solution « intuitive » convient, et d’après CAUCHY-LIPTCHITZ, c’est la seule, pour la configuration initiale régulière**. »

Montrons que la solution $z\_{k}=ρe^{iθ\_{k}}$, où $ρ\left(t\right)>0$ est indépendant de *k*, et $θ\_{k+1}=θ\_{k}+α$, où $α =\frac{2π}{n}$, convient.

L’équation $E\_{k}$, s’écrit alors $ρ^{'}e^{iθ\_{k}}+iρθ\_{k}^{'}e^{iθ\_{k}}=v\frac{ρe^{iθ\_{k}}(e^{iα}-1)}{|ρe^{iθ\_{k}}\left(e^{iα}-1\right)|}$ ;

Or $e^{iα }-1=e^{i\frac{α}{2}}\left(\frac{e^{i\frac{α}{2}}-e^{-i\frac{α}{2}}}{2i}\right)2i=2ie^{i\frac{α}{2}}sin\frac{α}{2}$ ; par conséquent, après simplification par $e^{iθ\_{k}}$, non nul, puisque de module 1, on a $ρ^{'}+ρθ\_{k}^{'}=vi\left(cos\frac{α}{2}+isin\frac{α}{2}\right)=v(-sin\frac{α}{2}+icos\frac{α}{2}$) ;

On identifie partie réelle et partie imaginaire des deux membres et on a $\left\{\begin{array}{c}dρ =-vsin\frac{α}{2} dt\\ρdθ\_{k}=vcos\frac{α}{2} dt\end{array}\right.$

Donc $\frac{dρ}{ρ}=-tan\frac{α}{2}dθ$, $ρ=λ\_{k}e^{-tan\frac{α}{2}θ\_{k}}$ , où $λ\_{k}$ est une constante qui dépend de l’indice *k* et de la condition initiale de la mouche numéro *k*.

Les trajectoires des mouches sont donc des **SPIRALES LOGARITHMIQUES.**

Calculons les $λ\_{k}$ en tenant compte des conditions initiales, d’après la figure évidente laissée au soin du lecteur, on a $sin\frac{α}{2}=\frac{a}{OA\_{1}}$ donc $OA\_{1}=\frac{a}{sin\frac{α}{2}}$ ; On a $ρ\left(0\right)=\frac{a}{sin\frac{α}{2}}$  (polygone régulier de centre O, au départ) et $θ\_{k}\left(0\right)=θ\_{1}\left(0\right)+\frac{2kπ}{n}$.

Par suite $\frac{a}{sin\frac{α}{2}}=λ\_{1}e^{-tan\frac{α}{2} \frac{α}{2}}$ donc $λ\_{1}=\frac{a}{sin\frac{α}{2}}e^{tan\frac{α}{2} (\frac{α}{2})}$ et donc $ρ\_{1}=\frac{a}{sin\frac{α}{2}}e^{-tan\frac{α}{2} (θ\_{1}-\frac{α}{2})}$

C’est une spirale logarithmique de foyer O, obtenu quand $θ\_{1} $tend vers plus l’infini. Il suffit de remarquer que $\left\{\begin{array}{c}ρ\_{k}=ρ\_{1} \\θ\_{k}=θ\_{1}+\frac{2kπ}{n}\end{array}\right.$ pour avoir le lieu de la mouche $M\_{k}$

(autrement dit $\frac{a}{sin\frac{α}{2}}=λ\_{k}e^{-tan\frac{α}{2} (n\frac{α}{2})}$ ) et **surtout** $θ\_{k+1}-θ\_{k}=\frac{2π}{n}=\frac{π}{2}$ **pour *n* = 4 :**

**À chaque instant *t*,** $M\_{1}M\_{2}M\_{3}M\_{4}$ **est un carré de centre 0 et de demi diagonale**$ ρ\left(t\right)$**.**

1. **Cherchons la loi horaire, le temps au bout duquel les mouches entrent en collision, la distance parcourue par chaque mouche entre le point de départ (sommet du carré initial) et le point de collision.**

On a vu que $dρ=-vsin\frac{α}{2} dt$ et que $ρ\_{1}=\frac{a}{sin\frac{α}{2}}e^{-tan\frac{α}{2} (θ\_{1}-\frac{α}{2})}$ , par conséquent

$\frac{a}{sin\frac{α}{2}}(-\tan(\frac{α}{2} ))e^{-tan\frac{α}{2} \left(θ\_{1}-\frac{α}{2}\right)}dθ\_{1=}-vsin\frac{α}{2} dt$ soit $\frac{a}{cos\frac{α}{2}}e^{-tan\frac{α}{2} \left(θ\_{1}-\frac{α}{2}\right)}dθ\_{1=}=vsin\frac{α}{2} dt$

On intègre alors cette équation (à variables séparées $t et θ\_{1}$)

$$\frac{-a}{sin^{2}\frac{α}{2}}e^{-tan\frac{α}{2} \left(θ\_{1}-\frac{α}{2}\right)}dθ\_{1=}=v (t+C) $$

*𝜌*Donc la loi horaire du mouvement de la mouche numéro 1 est (celle de la mouche numéro *k*, s’en déduit en changeant $θ\_{1}$ en $θ\_{1}+\frac{2(k-1)π}{n}$)

$$e^{-tan\frac{α}{2} \left(θ\_{1}-\frac{α}{2}\right)}=\frac{v}{a} sin^{2}\frac{α}{2}\left(\frac{a}{sin^{2}\frac{α}{2}}-t\right)>0$$

 Comme le mouvement s’arrête dès que $ρ=0$ (les mouches sont au même point (O le foyer, origine), il y a collision ! (Bonzaï !) obtenue pour $θ\_{1}=+\infty , $ le temps mis par chaque mouche entre le départ et la collision est $T=\frac{a}{sin^{2}\frac{α}{2}}$

1. **Distance parcourue par chaque mouche.**

En effet, on a une spirale logarithmique $ρ=ke^{mθ}, dρ=kme^{mθ} dθ$ et $ρdθ=ke^{mθ}dθ$ avec par hypothèse *k* > 0.

Donc avec les notations usuelles $ds^{2}=\left(dρ\right)^{2}+ρ^{2}\left(dθ\right)^{2}=k^{2}\left(1+m^{2}\right)\left(dθ\right)^{2}e^{2mθ}$

L’orientation *s* croissant pour $θ$ croissant donne $ ds=k\sqrt{1+m^{2}}e^{mθ}dθ$ soit $s=k\frac{\sqrt{1+m^{2}}}{m} e^{mθ}+C$

Où C est une constante.

Comme ici $m=-tan\frac{α}{2}$ et $k=λ\_{1}=\frac{a}{sin\frac{α}{2}}e^{tan\frac{α}{2} (\frac{α}{2})}$, on a $\sqrt{1+m^{2}}=\frac{1}{\cos(\frac{α}{2})}$ et donc par substitution

$s=\frac{a}{sin\frac{α}{2}}e^{-tan\frac{α}{2} (θ\_{1}-\frac{α}{2})} \left(-\frac{1}{sin\frac{α}{2}}\right)$+C et comme *s* = 0 pour $θ\_{1}=\frac{α}{2}$ on déduit $C=\frac{a}{sin^{2}\frac{α}{2}}$ .

On a

$$s=\frac{a}{sin^{2}\frac{α}{2}}\left(-e^{-tan\frac{α}{2} \left(θ\_{1}-\frac{α}{2}\right)}+1\right)$$

La distance totale parcourue depuis la position initiale en *t* = 0, jusqu’à la collision $t=T $ et $θ\_{1}=+\infty $ est $L=\frac{a}{sin^{2}\frac{α}{2}}$; On constate que dans le cas du carré (*n* = 4) L = 2*a*, la distance parcourue par chaque mouche avant la rencontre au centre du carré initial est exactement égale au côté du carré initial.

Un programme en Maple (qui sera mis sur mon site dès l’acceptation de cet article, sinon envoyé à tout lecteur demandeur) montre avec ANIMATE, le mouvement des 4 mouches (en cliquant avec la souris sur le graphe, on voit apparaître un petit menu et en cliquant sur la seconde icône de ce menu ; une flèche, le mouvement est simulé.

**Le dernier programme donné, montre que si la configuration de départ est irrégulière, par exemple avec un triangle non équilatéral, leurs trajectoires ne sont pas forcément des spirales logarithmiques, et que les trois mouches n’arrivent pas ensemble au point collision : (l’une peut y arriver, après la collision des deux premières).**

**Ce qui soulève l’ajustement des résultats précédents : Comme disait Georges Valiron : « Chaque question résolue en soulève deux autres ».**

**BIBLIOGRAPHIE ET SITOGRAPHIE**

* Cet exercice a été proposé à un oral de concours en 1977 environ – nous en avons beaucoup discuté avec le regretté Jacques BOUTELOUP, alors professeur de mathématiques spéciales M’ à Rouen, lors des repas que nous prenions à l’Hôtel de l’X, lors des journées X UPS de cette année-là. (voir par exemple exercices corrigés de mathématiques par REMY (ellipses 1983)), mais en fait il est beaucoup plus ancien ; il a même fait la couverture de la revue scientific american de juillet 1965. Le dictionnaire Penguin des curiosités géométriques (Eyrolles 1995) pages 189-190 signale que les figures produites furent très populaires dans les années 1960 dans les peintures du « op-art ». Il est signalé dans pour la science juillet 1988 page 112, à propos d’un livre de terminale. Ainsi que dans le livre « a Human Endeavor par Harod R. Jacobs page 366 éditeur Freeman San Francisco 1970, 1982. Voir aussi la carte postale de tangente (1996) ; TD 19 C mis dans TD 26.
* Problème des souris : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Problème\_des\_souris](https://fr.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A8me_des_souris)
* Courbes de poursuite (site math curve) et où il est fait référence à LUCAS <https://www.mathcurve.com/courbes2d/poursuite/poursuitemutuelle.shtml>
* Exercice 9 de <http://anisciences.free.fr/demos/lip_1/COURS/CIN/CIN_ENONCES/cinENONCES.html>
* Figure animées entre 2 et 9 mouches

<http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/4mouches.php>