

Les épi ou hypo trochoïdes

(zip2 TeX hcycloq.tex) version Zip II : 07 04 04 21h00

ÉPI ET HYPO CYCLOÏDES ALLONGÉES OU RACCOURCIES

A) **ÉQUATIONS** Par convention, tous les cercles seront orientés dans le sens trigonométrique. Soit (O, R) le cercle base, (C, r) le cercle roulant mobile tangent en I au cercle base, A sur le cercle base, une des positions du point M du cercle roulant, quand M est sur la base, c'est à dire coincide avec I . Nous introduisons le paramètre ε , qui sera $+1$, lorsque le cercle roulant est extérieur au cercle base (préfixe épi), et -1 lorsque l'un des deux cercles est intérieur à l'autre (préfixe hypo lorsque le cercle roulant est intérieur au cercle base, préfixe péri lorsque le cercle base est intérieur au cercle roulant) -voir la figure ci dessous : Nous appellerons préfixe-cycloïde ou préfixe -trochoïde, où préfixe $\in \{ \text{épi, péri, hypo} \}$, le lieu du point P , lié au disque roulant, tel que $CP = p \geq 0$; Par commodité et simplicité nous réserverons le mot cycloïde lorsque $p = r$ et celui de trochoïde dans le cas $p \neq r$ ou bien dans le cas général complet, lorsqu'on ne veut pas isoler le cas $p = r$ cycloïdal ; la préfixe-trochoïde sera dite allongée si $p > r$ raccourcie si $p < r$. Nous poserons pour toute la suite : $\mathbf{p} = \mathbf{CP}$, $\mathbf{r}' = \varepsilon \mathbf{r}$, $\mathbf{p}' = \varepsilon \mathbf{p}$, $(\mathbf{OA}, \mathbf{OI}) = \mathbf{t} (2\pi)$, $(\mathbf{CM}, \mathbf{CI}) = \theta (2\pi)$

Le roulement sans glissement se traduit par :

$$\boxed{\widehat{\mathbf{AI}} + \varepsilon \widehat{\mathbf{MI}} = 0} ; Rt + \varepsilon r \theta = 0 ; \boxed{\mathbf{Rt} + \mathbf{r}'\theta = \mathbf{0}} \quad (1)$$

Nous constatons que IC est du sens de εOI et, $\varepsilon r = r' = (\overline{IC})_u$ où $u = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

Par Chasles nous avons : $(O_1x_1, CP) = (O_1x_1, OI) + (OI, CI) + (CI, CP) = t + \frac{1}{2}\pi - \theta$ posé égal à φ .

$$OP = OC + CP = (\varepsilon r + R) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}. \text{ Or la condition de roulement sans glissement (1) s'écrit } \theta = -\frac{Rt}{r'} \text{ donc } t - \theta = t(1 + \frac{R}{r'}) = mt \text{ en posant } \boxed{\mathbf{m} = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{r}'} = \mathbf{1} + \varepsilon \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{r}}} \quad (2)$$

ON REMARQUE que ε est du signe de $m - 1$; $m\varepsilon r = \varepsilon r + R$ donc $\varepsilon r e^{it} = \text{affixe}(IC) = \frac{1}{m} \text{affixe}(OC) = \frac{1}{m}(\varepsilon r + R)e^{it}$ et $\boxed{\text{affixe}(\mathbf{OI}) = \mathbf{R}e^{it} = \text{affixe}(\mathbf{OC}) - \text{affixe}(\mathbf{IC}) = (\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{m}})\mathbf{Z}_C}$

Ainsi $OP = \begin{pmatrix} (\varepsilon r + R) \cos t - p\varepsilon \cos mt \\ (\varepsilon r + R) \sin t - p\varepsilon \sin mt \end{pmatrix}$ Si z_1 est l'affixe absolue de P on a $\boxed{\mathbf{z}_1 = \mathbf{m}\mathbf{r}'e^{it} - \mathbf{p}'e^{imt}}$ (3) formule que nous interprétons par : préfixe-trochoïde(m, r, p).

Nous remarquons que r' et p' sont de même signe (celui de ε donc $m - 1$, OP est la somme de deux vecteurs "tournants", et que le produit des coefficients de e^{it} et de e^{imt} est du signe de $-m$; m ou son inverse (on anticipe déjà ainsi la double génération de CREMONA) s'obtient en faisant le rapport des deux exposants. ε est donné par le signe de $m - 1$; p est alors le coefficient de e^{imt} multiplié par $-\varepsilon$, r celui de e^{it} multiplié par $\frac{\varepsilon}{m}$. $R = \varepsilon r(m - 1) = r|m - 1|$, et l'affixe de I est Re^{it} .

Enfin $(m - 1)r = \varepsilon R$. $m = 1$ donne $R = 0$ sans intérêt et nous avons les relations: $\boxed{\mathbf{R} = \varepsilon \mathbf{r}(\mathbf{m} - \mathbf{1}) \text{ et } \mathbf{r} = \varepsilon \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{m} - \mathbf{1}}}$.

Si O_1x_1 n'est pas O_1A , par déplacement on a l'équation générale des préfixes-trochoïdes par $Z_1 = e^{iC} z_1 + K$. Pour reconnaître la trochoïde, K est en évidence, et on calcule C et le changement de paramètre pour que les deux exponentielles figurant dans $Z - K$ soient de la forme e^{iu} et $e^{im u}$: nous verrons cela de manière plus précise dans la double génération de CREMONA.

Montrons, avant de faire une étude plus technique, que la position de m par rapport à 0 et 1 permet de caractériser le préfixe.

- $m = \frac{r + \varepsilon R}{r} = 1 + \varepsilon \frac{R}{r} > 0$ équivaut à $r + \varepsilon R > 0 \iff r > -\varepsilon R \begin{cases} \mathbf{m} > \mathbf{1} \iff \varepsilon = +\mathbf{1} & \text{ÉPI} \\ \mathbf{0} < \mathbf{m} < \mathbf{1} \iff \varepsilon = -\mathbf{1}, \mathbf{r} > \mathbf{R} & \text{PÉRI} \end{cases}$
- $m = \frac{r + \varepsilon R}{r} = 1 + \varepsilon \frac{R}{r} < 0$ équivaut à $r + \varepsilon R < 0 \iff r < -\varepsilon R \begin{cases} \mathbf{m} < \mathbf{0} \text{ impossible si } \varepsilon = +\mathbf{1} \text{ car } \mathbf{r} > \mathbf{0} \\ \mathbf{m} < \mathbf{0} \iff \varepsilon = -\mathbf{1}, \mathbf{r} < \mathbf{R} & \text{HYPO} \end{cases}$

Le cas $m = 1$ correspondant à $R = 0$ est écarté ; le cas $m = 0$ obligeant $r = -\varepsilon R$ donc $\varepsilon = -1$ est à enlever aussi car correspond au cas HYPO avec $r = R$, le cercle roulant est confondu avec le cercle base auquel il est intérieur : les cas $m = \pm\infty$ correspondent au cas $r = 0$ -le cercle roulant est réduit à un point, on ne peut évoquer de roulement sans glissement : "on n'avance pas". Ci dessous un tableau synthèse de la NOMENCLATURE (*) :

(*) Et non "nomenklatura" comme dans certains ministères ou chez les barbares de l'est (texte écrit en 1988).

m	$-\infty$	$m < -1$	$m = -1$	$-1 < m < 0$	0	$0 < m < 1$	$+1$	$1 < m$	$+\infty$
		HYPO de type 1 avec $r < \frac{R}{2}$ le cercle roulant ne contient pas le centre du cercle base. $\varepsilon = -1$	HYPO avec $r = \frac{R}{2}$ le cercle roulant passe par le centre du cercle base. $\varepsilon = -1$	HYPO de type 2 avec $\frac{R}{2} < r < R$ le cercle roulant contient le centre du cercle base $\varepsilon = -1$		PÉRI $r > R$ le cercle roulant contient le cercle base $\varepsilon = -1$		ÉPI le cercle roulant est extérieur au cercle base $\varepsilon = +1$	

Exemple: considérons l'arc $x = \cos t(\sqrt{2} \cos t + 1)$, $y = \sin t(\sqrt{2} \cos t - 1)$, alors $z = x + iy = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{2it} + e^{-it}$ en comparant avec (3) (attention le paramètre de la formule (3) n'est pas forcément égal au paramètre de la courbe qu'on veut lui identifier) m rapport des deux exposants est égal à $-2 < 0$, c'est donc une hypocycloïde, donc $\varepsilon = -1$; $p = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $mr' = 1$, $r = \frac{1}{2}$; $R = \varepsilon(m-1)r = \frac{3}{2}$. À cause de la translation de vecteur $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ la courbe étudiée est une hypocycloïde de type 1, allongée ($p > r$) obtenue par roulement sans glissement d'un cercle de rayon r , roulant sans glisser intérieurement au cercle translaté du cercle (O_1, R) .

B) **SYMÉTRIES ET RÉPÉTITIONS** Dans la formule (3) changeons t en $t + h$: $z_1(t + h) = mr'e^{it}e^{ih} - p'e^{imt}e^{imh}$.

Il y a intérêt à ce que $e^{ih} = e^{imh}$ soit $(m-1)h = 2\pi$, or $m \neq 1$ donc $h = \frac{2\pi}{m-1}$. Il suffit d'étudier la courbe pour t dans un intervalle de largeur h , et d'effectuer ensuite sur l'arc obtenu toutes les rotations de centre O_1 et d'angle kh où k appartient à \mathbb{Z} car alors $z_1(t + h) = e^{ih}z_1(t)$; de plus $z_1(-t) = \overline{z_1(t)}$. Nous prendrons donc comme intervalle d'étude l'intervalle $[0, \frac{\pi}{|m-1|}]$ et pour avoir toute la courbe, outre les rotations précédentes, nous effectuerons une symétrie orthogonale par rapport à O_1x_1 .

De plus le changement de t en $t + \frac{2\pi}{m-1}$, revient à multiplier $z(t)$ par $e^{i2\pi/m-1}$, donc à effectuer sur la trochoïde (3) une rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{m-1}$ qui la laisse invariante !

C) **LA NORMALE EN P EST PI** Nous le savons déjà, à cause de la théorie classique du centre instantané de rotation (rappelée en annexe I) qui est ici I , par suite du roulement sans glissement du cercle roulant sur le cercle base; En particulier dans le cas cycloïdal $p = r$, la tangente en M est MJ ; (J point diamétralement opposé à I sur le cercle roulant). On peut le vérifier analytiquement: la tangente en P , supposé non stationnaire (nous verrons ce cas à part) est dirigée par le vecteur d'affixe dérivée: $\frac{dz_1}{dt} = mi(r'e^{it} - p'e^{imt})$, or $IP = IO + OP$ est d'affixe $z_1 - Re^{it} = r'e^{it} - p'e^{imt}$, et est bien orthogonal au vecteur tangent en P , puisque le rapport des affixes de ces deux vecteurs est imaginaire pur. Par prolongement des égalités par passage à la limite, ceci est encore vrai pour un point stationnaire.

D) **DÉVELOPPÉES DES PRÉFIXE-CYCLOÏDES** (cas $p = r$):

Si M' est diamétralement opposé à M sur le cercle roulant alors $M'J$ est homothétique de MI , normale en M , dans $\mathcal{H}(O, \frac{O_i}{O_j}) = \mathcal{H}(O, \frac{R+2\varepsilon r}{R})$. Or (par la théorie du Centre Instantané de Rotation (CIR) dans un mouvement plan sur plan) $M'J$ est tangente en M' à la courbe cycloïdale décrite par M' , qui est déduite de celle décrite par M dans la rotation $\mathcal{R}(O, \pi \frac{r}{R})$; L'enveloppe de MI , c'est à dire la développée du lieu de M , est donc l'homothétique par \mathcal{H}^{-1} de l'enveloppe de $M'J$: la développée du lieu de M en est donc la courbe semblable par $\mathcal{H}^{-1} \circ \mathcal{R}$.

Le calcul analytique n'est pas plus difficile, que dans le cas de la cycloïde:

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} = mir'(e^{it} - e^{imt}) = mr'e^{\frac{i(m+1)t}{2}}(-2i \sin \frac{(m-1)t}{2}) \text{ donc } \alpha = (O_1x_1, MT) = \frac{(m+1)}{2}t + k\pi.$$

Or la représentation de la développée est $Z = z_M + i \frac{\partial z_M}{\partial \alpha} = mr'e^{imt} - r'e^{imt} - \frac{2mr'}{m+1}(e^{it} - e^{imt+i\pi}) = \frac{m-1}{m+1}(me^{i(t+h)} - e^{imt+ih+i\pi})e^{-ih}$.

Nous voulons pour retrouver (3) que $m(t+h) = mt + h + \pi$, soit $(m-1)h = \pi$, $h = \frac{\pi}{m-1}$; ainsi $Z = \frac{m-1}{m+1}r'e^{-\frac{\pi}{m-1}}z_M(t+h)$: la développée est une courbe semblable, exactement de même genre: c'est le même m et le même ε .

On peut aussi, pour prouver la conservation du type cycloïdal, par recherche de la développée, prouver que l'équation d'EULER des préfixe-cycloïdes avec $p = r$ est D_θ : $x \cos \theta + y \sin \theta - p(\theta) = 0$ avec $p(\theta) = p \sin(k\theta + k')$, la développée étant l'enveloppe de D'_θ [2].

E) **RÉCIPROQUE ET DOUBLE GÉNÉRATION DE CREMONA** (prénom Luigi (sic)) [Pavie 1830

- Rome 1903] (Photographie dans le dictionnaire Russe Math-cesquille l'American Mathematical Monthly octobre 1993) et sur le Web dans les sites historiques <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html>.

Nous allons montrer que tout point P , tel que O_1P soit la somme de deux vecteurs "tournants", a comme lieu une courbe préfixe-trochoïdale, dont nous allons déterminer base et roulante associée: fait remarquable, il y aura deux solutions: c'est la double génération de CREMONA.

Première méthode

O_1P_1 est de la forme $O_1A_1 + O_1A_2$ avec O_1A_j tel que $\|O_1A_j\| = s_j$ et $(O_1x_1, O_1A_j) = w_j t + \alpha_j$ avec des notations évidentes. P est le quatrième sommet d'un parallélogramme construit sur les deux vecteurs tournants O_1A_j ; Nous écartons le cas $w_1 = w_2$ car P décrirait un cercle. Le cas d'un w_j nul correspond à un cercle à une translation près, nous l'écartons aussi. Nous posons $u_j = \frac{O_1A_j}{s_j}$ et $v_j = iu_j$, vecteur directement perpendiculaire à u_j .

À une commutativité près de l'addition (ce qui revient à permuter les indices 1 et 2), par référence à (3) nous cherchons à identifier :

$$Z_P = s_1 e^{i(w_1 t + \alpha_1)} + s_2 e^{i(w_2 t + \alpha_2)} = S_1 e^{i w_1 t} + S_2 e^{i w_2 t} \text{ à } e^{iK} [m r' e^{i u} - p' e^{i m u}]$$

(les paramètres n'étant pas forcément les mêmes) Il n'est pas question de chercher u , comme fonction implicite de t , (problème ouvert...), essayez donc seulement de résoudre $e^{3it} + 2e^{it} = e^{3iu} + 2e^{iu}$ (poser $T = e^{it}$ et $U = e^{iu}$), et plus généralement $Ae^{it} + Be^{imt} = Ce^{iu} + De^{im'u}$ avec $A, B, C, D, m \neq 0$ réels donnés et de trouver s'il y a d'autres solutions $\forall t$, en C, D, m', u réels, que celles SUFFISANTES que nous élucidons ci dessous ! (Un tiré à part électronique ou une disquette, sera envoyé, au premier lecteur (date du cachet postal ou du message électronique faisant foi), qui résoudra ce problème général)

Compte tenu des changements de paramètres constatés, lors de la recherche des symétries, il est logique de se limiter à chercher une identification en prenant $\mathbf{u} = \mathbf{a}t + \mathbf{b}$.

On peut dire aussi d'après la ligne précédant (2) $\overline{OP} = \overline{OC} + \overline{CP}$, que l'identification revient à choisir lequel des deux termes qui interviennent dans Z_P est l'affixe de OC : $m r' e^{i(u+K)}$; Nous nous en souviendrons au moment de retrouver l'affixe de I , dans les deux générations possibles.

L'indépendance des exponentielles polynômes à la permutation évoquée près) prouve, comme au moins (en fait les deux) un des coefficients s_1, s_2 est non nul, que l'identification proposée équivaut (à la permutation évoquée près) à :

$a = w_1$, $am_1 = w_2$ donc $m_1 = \frac{w_2}{w_1}$: on constate que l'autre solution m_2 donnée par permutation vérifie $m_1 m_2 = 1$, (*) donc les m_j sont de même signe, et distincts car $w_1 \neq w_2$, sauf dans le cas où ils sont ± 1 que nous savons être de peu d'intérêt.

ε_1 est du signe de $m_1 - 1 = \frac{w_2}{w_1} - 1$ et ε_2 de celui de $\frac{w_1}{w_2} - 1$.

D'après la NOMENCLATURE les deux générations (si elle existent ce que nous confirmerons) sont de même type : **TOUTE HYPO-1 est HYPO-2 ; TOUTE ÉPI EST PÉRI**

$$\begin{cases} m_1 r_1' e^{i b} e^{i K} = s_1 e^{i \alpha_1} \\ p_1' e^{i(m_1 b + K + \pi)} = s_2 e^{i \alpha_2} \end{cases} \iff \begin{cases} m_1 \varepsilon_1 r_1 e^{i b} e^{i K} = s_1 e^{i \alpha_1} = S_1 \\ \varepsilon_1 p_1 e^{i(m_1 b + K + \pi)} = s_2 e^{i \alpha_2} = S_2 \end{cases}$$

Ce qui équivaut, par identification des modules et des arguments (modulo 2π) des deux membres à :

$$\begin{cases} |m_1| r_1 = s_1 ; p_1 = s_2 \\ b + K = \alpha_1 + (1 - \varepsilon_1 \operatorname{sgn}(m_1)) \frac{\pi}{2} = \alpha_1 + \arg(\varepsilon_1 m_1) = \alpha_1 + \arg(\varepsilon_1) + \arg(m_1) \\ b m_1 + K = \alpha_2 + (1 + \varepsilon_1) \frac{\pi}{2} = \alpha_2 + \arg(\varepsilon_1) + \pi \end{cases}$$

Ce dernier système étant toujours compatible, puisque de déterminant $1 - m_1$ non nul. Il détermine b et K .

Il y a toujours deux modes de génération distincts (car $m_1 \neq m_2$) (nous avons réglé les cas sans intérêt $m_1 = m_2 = \pm 1$) et deux seulement, résumés ci dessous.

$$\mathbf{m}_1 = \frac{w_2}{w_1}, \varepsilon_1 \text{ est du signe de } \mathbf{m}_1 - 1, \mathbf{r}_1 = s_1 \left| \frac{w_1}{w_2} \right| = \frac{s_1}{\mathbf{m}_1}, \mathbf{p}_1 = s_2, \mathbf{R}_1 = \mathbf{r}_1 |\mathbf{m}_1 - 1| = s_1 \left| 1 - \frac{1}{\mathbf{m}_1} \right|, \mathbf{a}_1 = \mathbf{w}_1, \mathbf{u} = \mathbf{a}_1 t + \mathbf{b}_1, (1 - \mathbf{m}_1) \mathbf{b}_1 = \alpha_1 - \alpha_2 - \varepsilon_1 (\operatorname{sgn}(\mathbf{m}_1) + 1) \frac{\pi}{2}, (1 - \mathbf{m}_1) \mathbf{K}_1 = \alpha_2 - \mathbf{m}_1 \alpha_1 + \frac{1 - \mathbf{m}_1}{|1 - \mathbf{m}_1|} [|\mathbf{1} - \mathbf{m}_1| - 1 - |\mathbf{m}_1|], \mathbf{b}_1 (\mathbf{1} - \mathbf{m}_1) = \alpha_1 - \alpha_2 + \arg(\mathbf{m}_1) - \pi, \mathbf{K}_1 (\mathbf{1} - \mathbf{m}_1) = \alpha_2 - \alpha_1 \mathbf{m}_1 + (\mathbf{1} - \mathbf{m}_1) \arg(\varepsilon_1) + \pi - \mathbf{m}_1 \arg(\mathbf{m}_1)$$

$$\mathbf{m}_2 = \frac{w_1}{w_2}, \varepsilon_2 \text{ est du signe de } \mathbf{m}_2 - 1, \mathbf{r}_2 = s_2 \left| \frac{w_2}{w_1} \right| = \frac{s_2}{\mathbf{m}_2}, \mathbf{p}_2 = s_1, \mathbf{R}_2 = \mathbf{r}_2 |\mathbf{m}_2 - 1| = s_2 \left| 1 - \frac{1}{\mathbf{m}_2} \right|, \mathbf{a}_2 = \mathbf{w}_2, \mathbf{u} = \mathbf{a}_2 t + \mathbf{b}_2, (1 - \mathbf{m}_2) \mathbf{b}_2 = \alpha_2 - \alpha_1 - \varepsilon_2 (\operatorname{sgn}(\mathbf{m}_2) + 1) \frac{\pi}{2}, (1 - \mathbf{m}_2) \mathbf{K}_2 = \alpha_1 - \mathbf{m}_2 \alpha_2 + \frac{1 - \mathbf{m}_2}{|1 - \mathbf{m}_2|} [|\mathbf{1} - \mathbf{m}_2| - 1 - |\mathbf{m}_2|], \mathbf{b}_2 (\mathbf{1} - \mathbf{m}_2) = \alpha_2 - \alpha_1 + \arg(\mathbf{m}_2) - \pi, \mathbf{K}_2 (\mathbf{1} - \mathbf{m}_2) = \alpha_1 - \alpha_2 \mathbf{m}_2 + (\mathbf{1} - \mathbf{m}_2) \arg(\varepsilon_2) + \pi - \mathbf{m}_2 \arg(\mathbf{m}_2)$$

ON REMARQUE QUE : $r_2 = p_1 |m_1|$ et que $p_2 = r_1 |m_1|$ et $p_1 p_2 = r_1 r_2$, $m_2 = \frac{1}{m_1}$, par conséquent $\frac{p_1}{r_1} = \frac{r_2}{p_2}$ et

$$\begin{cases} \bullet \text{ si } m_1 < 0, m_1 < -\frac{p_1}{r_1} \iff \frac{1}{m_2} < -\frac{r_2}{p_2} \iff (\text{car } m_2 < 0 \text{ et } -\frac{r_2}{p_2} < 0) m_2 > -\frac{p_2}{r_2} \\ \bullet \text{ si } m_1 > 0, m_1 < \frac{p_1}{r_1} \iff \frac{1}{m_2} < \frac{r_2}{p_2} \iff (\text{car } m_2 > 0) m_2 > \frac{p_2}{r_2} \end{cases}$$

Ce qui explique les symétries, par rapport aux deux cases $m = -\frac{p}{r}$, $p = r$ et $m = \frac{p}{r}$, $p = r$ du tableau général des formes.

À cause de la formule (3), que nous traduisons, par préfixe-trochoïde $(m, (r, p))$ nous avons la traduction de la double génération de CREMONA, par l'identification :

$$\mathbf{préfixe-trochoïde}(m, (\mathbf{r}, \mathbf{p})) = \mathbf{préfixe-trochoïde}\left(\frac{1}{m}, |\mathbf{m}|(\mathbf{p}, \mathbf{r})\right) \quad (4)$$

(*) (Pour les initiés on devrait marquer **M1**_{m2=1})

ON REMARQUE AUSSI QUE : $R_1 = s_1|1 - m_2| = \frac{p_2}{r_2}R_2$, donc une condition nécessaire et suffisante, pour que dans les deux générations de CREMONA, les cercles bases soient les mêmes est que $p_2 = r_2 \iff |w_1s_1| = |w_2s_2|$ c'est à dire que la courbe soit une préfixe -cycloïde. Dans la remarque qui suit (2), nous avons constaté que :

$$\mathbf{Z}_{I_3} = \left(\mathbf{1} - \frac{1}{\mathbf{m}_j} \right) \mathbf{s}_j \mathbf{e}^{i(\mathbf{w}_j t + \alpha_j)}$$
, par conséquent, $I_1P = O_1P - O_1I_1 = O_1A_1 + O_1A_2 - (1 - \frac{1}{m_1})O_1A_1 = \frac{w_2O_1A_1 + w_1O_1A_2}{w_1}$

et par permutation $w_1I_1P = w_2I_2P$, : P est aligné avec les deux points de contact des cercles roulants des deux génération avec leur cercle base et de manière plus précise, il en est même le $(w_1, -w_2)$ barycentre.

Le point I peut aussi se trouver en dérivant $O_1A_1(t) + O_1A_2(t)$ et en liant $s_1, s_2, w_1, w_2, \alpha_1, \alpha_2$, pour que la dérivée soit nulle (théorie du C.I.R.).

Cette première méthode est certes lourde, besogneuse (suivez mon regard indulgent, charitable et gentil) mais elle a son intérêt et se complète avec la suivante plus rapide et compacte.

Seconde méthode

Le problème est de résoudre en les réels C, D, u, m' l'équation $Ae^{it} + Be^{imt} = Ce^{iu} + De^{im'u}$, avec A, B, m réels donnés non nuls et t parcourant \mathbb{R} .

Avec les notations du début de cette rubrique : $A = e^{iK}mr'$, $B = -e^{iK}p'$.

- Une première possibilité est d'essayer de réaliser $\begin{cases} Ae^{it} = Ce^{iu} \\ Be^{imt} = De^{im'u} \end{cases}$

L'identification des modules des deux membres donne $C = Ae^{ik\pi}$ (k entier pour gérer la différence éventuelle de signes de A et C , pair si le signe est le même, impair sinon), et de même $D = Be^{ik'\pi}$, k' entier, avec la même remarque que pour k .

L'identification des arguments des deux membres donne alors $\begin{cases} t = u + (k + 2r)\pi \\ mt = m'u + (k' + 2s)\pi \end{cases}$ avec $r, s \in \mathbb{N}$.

L'élimination de u entre ces deux équations $u = t - (k + 2r)\pi$ donne $mt = m'(t - (k + 2r)\pi) + (k' + 2s)\pi$, et comme cela doit avoir lieu pour tout t , l'identification donne $\mathbf{m}' = \mathbf{m}, \mathbf{m}(k + 2r) = k' + 2s$

Mais comme m n'est pas nécessairement rationnel, le seul choix possible des entiers k, k', r, s est parfois $k = k' = r = s = 0$, en particulier lorsque m n'est pas rationnel.

Ceci avec $C = A = e^{iK}mr'$, $D = B = -e^{iK}p'$ fournit la première génération de Cremona.

- Une seconde possibilité est d'essayer de réaliser $\begin{cases} Ae^{it} = De^{im'u} \\ Be^{imt} = Ce^{iu} \end{cases}$

L'identification des modules des deux membres donne $D = Ae^{ik\pi}$ (k entier pour gérer la différence éventuelle de signes de A et D , pair si le signe est le même, impair sinon), et de même $C = Be^{ik'\pi}$, k' entier, avec la même remarque que pour k .

L'identification des arguments des deux membres donne alors $\begin{cases} t = m'u + (k + 2r)\pi \\ mt = u + (k' + 2s)\pi \end{cases}$ avec $r, s \in \mathbb{N}$.

L'élimination de u entre ces deux équations $u = mt - (k' + 2s)\pi$ donne $t = m'(mt - (k' + 2s)\pi) + (k + 2r)\pi$, et comme cela doit avoir lieu pour tout t , l'identification donne $\mathbf{m}'\mathbf{m} = \mathbf{1}, \mathbf{m}' = \frac{1}{\mathbf{m}}, \mathbf{m}(k + 2r) = k' + 2s$

Mais comme m n'est pas nécessairement rationnel, le seul choix possible des entiers k, k', r, s est parfois $k = k' = r = s = 0$, en particulier lorsque m n'est pas rationnel.

le point de paramètre u de la seconde génération est celui de paramètre t de la première

Ceci avec $D = A = e^{iK}mr'$, $C = B = -e^{iK}p'$ fournit la seconde génération de Cremona.

En se limitant au choix (toujours possible et compatible) $p = q = r = s = 0$ et en convenant de noter (m, A, B, t) la trochoïde définie par $z = Ae^{it} + Be^{imt}$, la double génération de Cremona se résume synthétiquement en

préfixe - trochoïde $(\mathbf{m}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, t)$ = préfixe - trochoïde $(\frac{1}{\mathbf{m}}, \mathbf{B}, \mathbf{A}, u = \mathbf{m}t)$

De manière mnémotechnique, on permute les termes moyens A, B , on divise par m le premier, et on multiplie par m le dernier.

F) ÉTUDE ET PROPRIÉTÉS

Nous avons vu qu'à une rotation près nous pouvons nous ramener à la forme $z_1 = mr'e^{it} - p'e^{imt}$

a) Régionnement :

$z\bar{z} = m^2r^2 + p^2 - 2pr m \cos(m-1)t$, ainsi OP^2 est entre $(mr+p)^2$ et $(mr-p)^2$ atteints seulement pour $\cos(m-1)t = \pm 1$, donc pour $(m-1)t = k\pi$, $t = k \frac{\pi}{(m-1)}$; $e^{it} = \varepsilon' e^{imt}$ et alors $OM^2 = (mr - (-1)^k p)^2$ le cercle intérieur est atteint pour m positif (épi et péri) et k pair, le cercle extérieur est atteint pour m négatif et k impair. Un des cercles ne peut être réduit à l'origine que si $mr = \pm p$.

b) Recherchons les points stationnaires éventuels, ils sont donnés par $z'_1 = 0$ soit $mi(r'e^{it} - p'e^{imt}) = 0$, m nul étant écarté, la seule possibilité est $\frac{r}{p} = e^{i(m-1)t}$, donc de module 1, $r = p$ et comme $\frac{r}{p} > 0$, $t = \frac{2k\pi}{m-1}$.

Il n'y a donc de points stationnaires, que dans le cas cycloïdal et d'après a) à cause de la parité de $2k$, ils sont tous sur le même cercle de régionnement, qui est le cercle de régionnement intérieur, dans le cas épi-péri et extérieur dans le cas hypo, et qui est en plus le cercle de BASE puisque $R = |m-1|r = |mr-p|$ puisque ici $p = r$. Le roulement sans glissement se fait donc sur le cercle où sont les points stationnaires.

c) La tangente en un point stationnaire M , est portée par le rayon OM . En effet alors en un point stationnaire $e^{it_0} = e^{imt_0}$, $z_1(t_0) = r'(m-1)e^{it_0}$, $z'_1 = mi(r'e^{it} - p'e^{imt})$, $z'_1(t_0) = 0$, $z''_1 = -m(r'e^{it} - p'e^{imt})$, $z''_1(t_0) = -mr'e^{it_0}(1-m)$ non nul est colinéaire à $z_1(t_0)$ affixe du rayon OM , de plus $z''_1(t_0) = -mie^{imt_0}(1-m^2)$ est non nul et orthogonal à $z''(t_0)$ (sauf si $m = -1$, cas de l'hypocycloïde à deux rebroussements, segment de droite, que nous verrons plus loin et qui correspond à $1 + \varepsilon \frac{R}{r} = -1$, donc $\varepsilon = -1$ et $R = 2r$) ; Les deux entiers fondamentaux en M sont 1 et 2 : le point M est stationnaire, point de rebroussement de première espèce. Si nous nous étions contenté de la tangente, nous aurions pu utiliser plus rapidement le théorème qui dit que si $z' = r(t)Z(t)$ où $r(t_0)$ est nul, mais $Z(t_0)$ non nul, alors $Z(t_0)$ dirige la tangente - Nous aurions pu aussi pour avoir les entiers fondamentaux, faire un développement limité de $z(t)$ au voisinage de t_0 .

d) En un point non stationnaire d'un cercle de régionnement, la tangente est tangente au cercle. En effet en un tel point

$t = \frac{k\pi}{m-1}$, $e^{imt} = (-1)^k e^{it}$, $z_1(t) = e^{it}(mr' - (-1)^k p')$, $z'_1(t) = mi(r' - (-1)^k e^{it})$ est orthogonal à $z_1(t)$ (rapport imaginaire pur).

e) Nous avons vu, dans le cas cycloïdal, (il n'y en a que dans ce cas), les points de rebroussement correspondaient à $(m-1)t = 2k\pi$ soit $\varepsilon \frac{R}{r} t = 2k\pi = -\varepsilon\theta$, c'est à dire quand M a fait un tour complet sur le cercle roulant ; Le nombre de points de rebroussement, quand I a fait un tour sur le cercle base est donc $\frac{2\pi R}{2\pi r} = |m-1|$, on peut toujours, à cause de la double génération de Luigi CREMONA, supposer $|m| > 1$: En particulier si m est entier, on revient au point de départ et le nombre de rebroussements pour un tour est aussi le nombre total et on a les exemples :

ÉPICYCLOÏDES $m = 2, 3, 4, 5$ le nombre de rebroussements est respectivement 1, 2, 3, 4.

HYPOCYCLOIDES $m = -1, -2, -3$, il y a respectivement 2, 3, 4 rebroussements ; nous en étudierons certaines plus en détail plus loin.

f) Étudions la forme ; on a vu qu'à des rotations près et une symétrie près par rapport à O_1x_1 , on pouvait réduire l'intervalle d'étude à $[0, \frac{\pi}{|m-1|}]$. Grâce à la double génération, au besoin en remplaçant m par $\frac{1}{m}$, on peut supposer $|m| > 1$ alors d'après la nomenclature : $m > 1$ donne $\varepsilon = 1$; $m \leq -1$ donne $\varepsilon = -1$. et $r \leq \frac{R}{2}$; posons $s = |z|$; on va étudier la courbe en coordonnées polaires : $s^2 = m^2 r^2 + p^2 - 2mpr \cos(m-1)t$, $z_1 = mr' \cos t - p' \cos mt + i(mr' \sin t - p' \sin mt)$ et $\tan(\text{Arg} z_1) = tg\varphi = \frac{mr' \sin t - p' \sin mt}{mr' \cos t - p' \cos mt}$; $(1 + \tan\varphi) \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{u(t)}{\Delta^2(t)}$ où $u(t) = m[mr^2 + p^2 - (m+1)pr \cos(m-1)t]$ et $\frac{\partial u}{\partial(m-1)t}$ est du signe de $m(m+1) \sin(m-1)t$.

On a alors le tableau suivant :

$(m-1)t$	0 premier cercle		π second cercle
$ z ^2 = s^2$	$(mr-p)^2$	décroit si $m < 0$, croît si $m > 0$	$(mr+p)^2$
$\frac{\partial u}{\partial(m-1)t}$	+si $m > 0$ ou $m < -1$; - si $m \in [-1, 0[$		
u	$mr(r-p(m-\frac{p}{r}))$		$mr(r+p)(m+\frac{p}{r})$

Le signe de u ne change que si $u(0)u(\pi) < 0$ c'est à dire $\mathbf{P} = (\mathbf{r}^2 - \mathbf{p}^2)(\mathbf{m}^2 - \frac{\mathbf{p}^2}{\mathbf{r}^2}) < 0$, c'est pour cela que les valeurs de \mathbf{p} , $-\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{r}}$, $\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{r}}$ interviennent dans la colonne de m à gauche (toute !) du tableau.

$P = 0$ signifie qu'un des cercles de régionnement est réduit à O ; la discussion est alors immédiate et on a le tableau à double entrée suivant qui donne la classification de toutes les formes possibles ; de plus pour la double génération $p_1 p_2 = r_1 r_2$, $p_1 > r_1$ implique $p_2 < r_2$ ce qui explique les symétries.

Dans le tableau nous notons $P0$ au lieu de $P = 0$, $P+$ pour $P > 0$ et $P-$ pour $P < 0$.

Le numéro de chaque case est noté en oblique, en bas à gauche. les barres \nearrow , ou \searrow indiquent croissance ou décroissance de la fonction à gauche de la barre oblique.

Le préfixe est en bas à gauche de chaque case ; On précise même la sorte d' hypo par son numéro à coté de H quand on le sait c'est à dire quand on connaît la position de m par rapport à -1 ; De même pour péri et épi. (retourner au besoin au tableau de NOMENCLATURE) (H hypo, P ou Pe péri, E ou Ee épi)

Compte tenu de $m = 1 + \varepsilon \frac{R}{r}$, la condition de compatibilité, dans la case est signalée à coté du préfixe. $m < 0$ oblige $\varepsilon = -1$ et $r < R$ type Hypo, $0 < m < 1$ à $\varepsilon = -1$ et $R < r$ type Péri, et $m > 1$ donne $\varepsilon = +1$, type Épi.

Les symétries des formes dans certaines cases ont été justifiées dans E). D'autre part les différences de direction des boucles comme dans les cases 3, 7, 18 par exemple ne sont qu'artificielles et tiennent seulement au choix libre des paramètres du tracé, dans leur intervalle respectif correspondant à la case : par exemple pour 3 et 18, pour la forme des trochoïdes allongées la boucle a son point double plus près du cercle intérieur de régionnement dans la case 3, tandis que dans la case 18 elle est plus proche du cercle de régionnement extérieur (de rayon le plus grand). En effet la forme peut passer d'un type à l'autre selon que dans l'intervalle ouvert d'une demi-période $]0, \frac{\pi}{m-1}[$, il y a une valeur ou non du paramètre t tel que $\tan \varphi$ peut ou non s'annuler. Ceci est donné par $\frac{r-R}{p} \sin t = \sin mt$. Or une étude simple par exemple avec Maple de l'équation $\frac{\sin mt}{\sin t} = Cte = \frac{r-R}{p}$, montre que selon m, R, r, p pourtant compatibles avec les contraintes de la case, les deux possibilités peuvent se présenter.

Dans chaque case du tableau, j'ai reporté le graphique d'une trochoïde, dont les paramètres correspondent à cette case. Chaque graphique a été fait grâce au beau programme Maple V5 fait par Alain Esculier, que je remercie encore, et qui est reproduit en annexe II, afin que les lecteurs puissent refaire les exemples correspondants ou tester des essais personnels. Le fait que le programme n'accepte que R et r entiers, n'est pas gênant, car il suffit de changer d'unité puisque toute nombre informatique est en fait rationnel décimal puisque tout réel est tronqué. Chaque graphe donne outre la courbe, les cercles de régionnement, de base et roulant. Le graphique étant fait sur la feuille Maple, on sauve en Latex, ce qui fait que Maple produit un fichier *.eps associé au graphique correspondant. Comme Maple entoure chaque graphique d'un rectangle qui peut être gênant en particulier dans une petite case d'un tableau, avec un éditeur de texte on ouvre le fichier *.eps considéré et on y remplace la ligne numéro 10 : `\drawborder true def` par `\drawborder false def` ce qui aura pour effet de supprimer le rectangle gênant : on peut aussi utiliser pour chaque graphique, dans maple la commande `plotsetup`. Ensuite j'ai intégré chaque graphique (il y en a 20) dans les cases associées du tableau par la commande (le fichier T_EX comprend au début `\input psfig.sty`, fichier qui permet ce genre d'inclusion graphique)

`\psfig{file=troc241.eps,height=25mm,angle=270}`, ne fixer qu'une dimension permet de s'assurer que le graphe respectera l'égalité des unités sur les deux axes. À vous maintenant de vous exercer pour tester ce programme. Et éventuellement de rajouter des éléments : une flèche dans le sens des t croissants, et même avec l'animation l'avancement du point au fur et à mesure du roulement, en tête de l'arc qui s'agrandit.

Le lecteur astucieux pourra faire des graphes en Maple avec des flèches d'orientation du sens du paramètre t croissant, et l'autorisation de r, R non entier et réintégrer le cas $R = 0$.

Le graphe correspondant à $m = 1$ a été tracé avec un autre programme, puisque celui en annexe ne supportait pas $R = 0$.

Puisque $m = 1 + \varepsilon \frac{R}{r}$ et r du programme Maple, noté r_p est en fait $r_p = r' = \varepsilon r$ et comme $p' = \varepsilon r_p = r_p + h$ on a $p = r + \varepsilon h$. Rappelons que $p \geq 0$ et $r > 0$.

Ceci explique les contraintes de choix dans l'en tête des colonnes : $0 < p < r$ équivaut à $0 > \varepsilon h > -r$ dans le cas raccourci. $p = r$ équivaut à $h = 0$ et enfin $p > r$ correspond à $\varepsilon h > 0$.

Dans l'en tête des lignes $m < 0$ impose $\varepsilon = -1$.

$m \setminus p$	T-Raccourcie $p < r$	Cycloïde $p = r$	T-Allongée $p > r$
$-\infty$ HYPO $-\frac{p}{r}$ $p < R - r$	$s \searrow P + u + \varphi \nearrow$ H1 $m = -1$ H2 1 	$s \searrow P0 u + \varphi \nearrow$ H1 $r < \frac{R}{2}$ 2 	$s \searrow P - u - 0 + \varphi \searrow \nearrow$ H1 $r < \frac{R}{2}$ 3
HYPO $= -\frac{p}{r}$ $p = R - r$	$s \searrow P0 u + \varphi \nearrow$ H2 $r > \frac{R}{2}$ 4 	$s \searrow P0 u = 0 \varphi = Cte$ $m = -1$ H12 $m = -1$ H12 $r = \frac{R}{2}$ 5 	$s \searrow P0 u - \varphi \searrow$ H1 $r < \frac{R}{2}$ 6
$-\frac{p}{r}$ HYPO 0 $p > R - r$	$s \searrow P - u + \varphi \nearrow \searrow$ H2 $r > \frac{R}{2}$ 7 	$s \searrow P0 u - \varphi \searrow$ H2 $r > \frac{R}{2}$ 8 	$s \searrow P + u - \varphi \searrow$ H1 $m = -1$ H2 9
0 P-E $\frac{p}{r}$ $p > r + \varepsilon R$	$s \nearrow P - u - 0 + \varphi \searrow \nearrow$ $P r > R \varepsilon = -1$ 10 	$s \nearrow P0 u + \varphi \nearrow$ $P r > R$ 11 	$s \nearrow P + u + \varphi \nearrow$ $P \varepsilon = -1$ $m = -1$ $E \varepsilon = 1$ 12
$\frac{p}{r}$ P-E $p = r + \varepsilon R$	$s \nearrow P0 u + \varphi \nearrow$ $P r > R \varepsilon = -1$ 13 	$s = Cte$ $P0 u + \varphi \nearrow$ $P + E$ $m = -1 \varepsilon = \pm 1$ Cercle $R = 0 z = 0$ 14 	$s \nearrow P0 u + \varphi \nearrow$ $E \varepsilon = +1$ 15
$\frac{p}{r}$ P+E $+\infty$ $p < r + \varepsilon R$	$s \nearrow P + u + \varphi \nearrow$ $P \varepsilon = -1$ $m = -1$ $E \varepsilon = 1$ 16 	$s \nearrow P0 u + \varphi \nearrow$ $E \varepsilon = 1$ 17 	$s \nearrow P - u - 0 + \varphi \searrow \nearrow$ $E \varepsilon = 1$ 18
Ellipse $m = -1pr$	$s \searrow P + u = Cte > 0 \varphi \nearrow$ $\varepsilon R = -2r$ $\epsilon = -1$ Ellipse 19 	$s \searrow P0 u = 0 \varphi = Cte$ $m = -1$ H12 $m = -1$ H12 $r = \frac{R}{2}$ 20=5 	$s \searrow P + u = Cte < 0 \varphi \searrow$ Ellipse $m = -1$ 21

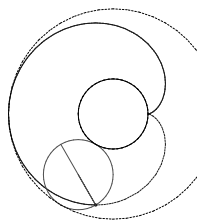
Traisons quelques cas particuliers ou bien exclus du tableau car sporadiques, ou incomplètement élucidés pour ne pas surcharger la case associée :

- **m=0** $z = -p'$, $\varepsilon R = -r$, donc $\varepsilon = -1$ et $r = R$: il s'agit du cercle de centre O_1 et de rayon p . Il s'agit du cas intermédiaire entre Hypocycloïde de type 2 ($r > \frac{R}{2}$) et le cas des Épicycloïdes : cercle base = cercle roulant.
- **m=1** $R = 0$ et $z = e^{it}(r' - p')$ il s'agit du cercle de centre O_1 et de rayon $|r - p|$.
- **m=-1** $\varepsilon \frac{R}{r} = -2$ donc $\varepsilon = -1$, $r = \frac{R}{2}$, cas intermédiaire entre Hypocycloïde de type 1 et hypotcyloïde de type 2. $z = (r + p) \cos t + (r - p) \sin t$. On reconnaît une ELLIPSE de centre O_1 et de demi-axes $\frac{1}{r+p}$ et $\frac{1}{|r-p|}$.

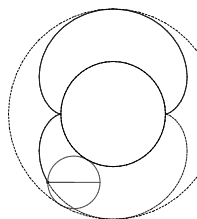
G) ÉTUDE DE QUELQUES CAS PARTICULIERS

G1) **m = 2, R = r** : **ÉPICYCLOÏDE à un rebroussement ou cardioïde**, ou limaçon de PASCAL. l'arc AI= arc IM, les cordes soustendant des arcs égaux sont égales, $IA = IM$, la hauteur issue de A est donc aussi médiatrice de AM : $HA = HM$; M est déduit de H dans $\mathcal{H}(A, 2)$ et IH est tangente commune à base et roulante : H décrit la podaire de la base par rapport au point A . Donc M décrit la podaire de A par rapport au cercle

homothétique de la base dans $\mathcal{H}(A, 2)$. Un calcul immédiat donne que l'affixe de AM est $z - R = 2Re^{it}(1 - \cos t)$, l'équation polaire de la cardioïde dans le repère (A, Ax_1) est $\rho = 2R(1 - \cos\theta)$, c'est donc aussi l'inverse de la parabole d'équation polaire $\rho = 1/[2R(1 - \cos\theta)]$ par rapport à son foyer A , et c'est aussi une conchoïde du cercle $\rho = -2R\cos\theta$, passant par A , pôle.

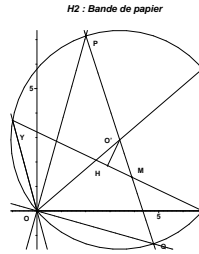


G2) ÉPICYCLOÏDE à deux rebroussements ou néphroïde : $m = 3, r = \frac{R}{2}$: $z = 3re^{it} - re^{i3t}$: Elle est particulièrement redevenue à la mode grâce au moteur rotatif, le moteur WANKEL [6],[8] ; c'est aussi l'enveloppe du rayon réfléchi sur un miroir circulaire, de rayons tous parallèles : cet exercice est traité dans tous les bons cours de spéciales, pour illustrer la recherche de l'enveloppe : c'est la caustique par réflexion que l'on voit tous les matins sur la surface du café au lait matinal, et elle prouve que l'optique géométrique est une approximation réservée aux petits angles d'ouverture : le foyer est l'accumulation de lumière en un des points de rebroussement.

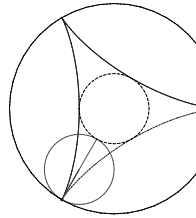


G3) Hypocycloïde à deux rebroussements : H2 ou engrenage ou Mouche de LA-HIRE : démonstration géométrique : $m = -1, \theta = 2t$; l'angle inscrit est la moitié de l'angle au centre en C : donc M décrit OA . Cette remarque permet de démontrer qu'un point M d'une "bande de papier", dont les extrémités A et B s'appuient sur deux axes Ox, Oy décrit une ellipse, dont nous allons retrouver les axes : Soit I le C.I.R. du plan mobile entraîné par la bande ; il est à l'intersection des normales en A et B à Ox et Oy respectivement ; le quadrilatère $O A I B$ est inscriptible (angles en A et B droits) ; Son cercle circonscrit est donc centré au milieu O' de OI vu de A et B sous un angle droit. De plus $(IB, IA) = \theta$ (voir figure). M et le milieu H de la corde AB sont fixes dans le plan mobile. H est la projection sur AB du centre O' ; Puisque l'angle au centre en O' : $(O'B, O'A)$ est constant égal à 2θ , alors le triangle isocèle $O'AB$ est fixe par rapport à AB .

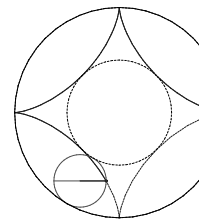
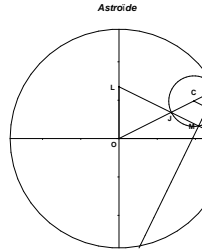
De plus d'après les relations dans un triangle $\frac{a}{\sin A} = 2R$ (R est le rayon du cercle circonscrit) on a ici : $\frac{AB}{\sin \theta} = 2R = OI$, R étant le rayon du cercle circonscrit à IAB : Ce cercle également circonscrit à $ABIO$ est fixe dans le plan mobile, car centré en O' et de rayon constant. La roulante est le cercle (O', R) , la base le cercle $(O, 2R)$ et on sait qu'il y a roulement sans glissement de la roulante sur la base. Les extrémités P et Q du diamètre de la roulante, contenant M décrivent deux $H2$ portées par les droites OP et OQ orthogonales : M est aussi sur la bande de papier PQ et OP, OQ sont les axes de symétrie de l'ellipse lieu de M .



G4) **HYPOCYCLOÏDE** à trois rebroussements, appelée aussi **DELTOÏDE** car ayant la forme d'un Δ : (voir par exemple INT 1983) $\mathbf{m} = -2$, $\mathbf{r}' = -\frac{\mathbf{R}}{3}$; $z = \frac{R}{3}(2e^{it} + e^{-2i})$, $z' = -4\frac{R}{3}e^{-\frac{i}{2}}\sin(\frac{3t}{2})$, l'équation de la tangente en $M(t)$ est donc $X\sin(\frac{t}{2}) + Y\cos(\frac{t}{2}) - \frac{R}{3}\sin(\frac{3t}{2}) = 0$; son équation normale (ou dite d'Euler) est donc de la forme : $x\cos\theta + y\sin\theta - a\cos(3\theta + b) = 0$; cherchons, son équation tangentielle : $\lambda = \frac{\sin\frac{t}{2}}{u} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{v} = -\frac{R}{3}$. Or $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ donc $\lambda = -\frac{R4\lambda^3 u^3 - 3\lambda u}{3w}$, λ étant non nul $3w + R(4\lambda^2 u^2 - 3)u = 0$ or $\lambda(u^2 + v^2) = 1$ par conséquent $3w(u^2 + v^2) + Ru(u^2 - 3v^2) = 0$ qui est de la forme $\boxed{\mathbf{w}(\mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2) + \varphi_3(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}}$, où φ_3 est un polynôme homogène de degré trois de $\mathbb{R}[X, Y]$; Une réciproque élémentaire, prouve que toute courbe ayant une équation tangentielle de cette forme est une H3; On peut montrer [4] que l'enveloppe d'une droite de SIMSON d'un triangle est une H3, tritangente au cercle des 9 points et même des 51 (voir [5]) points.



G5) **ASTROÏDE** : c'est une H4: $\mathbf{m} = -3$, $\mathbf{R} = 4\mathbf{r}$: $z = r(3e^{it} + e^{i3t}) = r(\cos^3 t + i\sin^3 t)$; la condition de roulement est $\theta = 4t$; la tangente en M est MJ , parallèle à la bissectrice de (CM, CI) d'angle polaire $-t$ car $(Ox, CM) = (Ox, OC) + (OC, CI) + (CI, CM) = t - 4t = -3t$; $(Ox, CI) = t$; l'angle polaire de la bissectrice intérieure de (CM, CI) demi-somme des précédents est donc $-t$, or MJ perpendiculaire aussi à MI , a aussi $-t$, comme angle polaire : le triangle JOK est isocèle $OJ = JK = \frac{R}{2}$, de même $JL = \frac{R}{2}$; donc $KL = R$ -on peut aussi démontrer ce résultat analytiquement- L'astroïde est donc l'enveloppe de la bande de papier LK . Remarquons que IM est orthogonale à JM , donc à la barre LK ; ceci était prévisible d'après les propriétés du C.I.R., puisque le point de contact de LK avec son enveloppe est la projection de I sur la barre LK .



H) **ÉQUATION D'EULER DES préfixe-cycloïdes :**

On sait que $\alpha = \frac{(m+1)t}{2}$, l'équation de la tangente en $M(t)$ à la courbe (3) est donc, après développement et avoir posé $(m+1)t = \pi + 2\theta$, $h = \frac{m-1}{m+1}$; $x\cos\theta + y\sin\theta - r'(m+1)\sinh(\theta + \frac{\pi}{2}) = 0$; inversement $x\cos u + y\sin u -$

$b \sin h(u + \frac{\alpha}{h}) + A \cos u + B \sin u = 0$ est l'équation d'EULER d'une astroïde, car s'écrit : $(x + A) \cos u + (y + B) \sin u - b \sin(hu + \frac{\alpha}{h}) = 0$ et en prenant $(-A, -B)$ comme nouvelle origine et un changement d'axe polaire, on peut identifier : $x' \cos(u - \beta) + y' \sin(u - \beta) - b \sin(hu + \alpha) = 0$ $u - \beta = \theta$ et $b \sin(hu + \alpha) = r'(m + 1) \sin h(y + \frac{\pi}{2})$ ce qui permet de préciser m et r' qui caractérisent la courbe cycloïdale.

On peut démontrer aussi que :

- Si $m = \frac{p}{q}$ la classe de la préfixe cycloïde est $p + q$.
- L'équation intrinsèque d'une préfixe-cycloïde est : $(m - 1)^2 s^2 + (m + 1)^2 R^2 = 16 \frac{m^2 a^2}{(m+1)^2}$ où a est le rayon du cercle base.
- Toutes les préfixes-cycloïdes de même m sont semblables $m = \frac{AM}{MT}$.
- Lorsqu'une préfixe-cycloïde roule sans glisser sur une de ses tangentes, le lieu du centre de courbure au contact est une ellipse.
- La podaire d'une préfixe-cycloïde par rapport au centre du cercle base est une rhodonnée.
- Quand une préfixe-cycloïde variable coupe sous des angles donnés trois droites données, son centre décrit une droite et son cercle inscrit est tangent à une conique fixe-il serait bon d'interpréter au moyen du théorème de HUMBERT conséquence du théorème d'Abel sur les intégrales abéliennes.
- Les satellites des planètes décrivent autour de celles-ci des orbites elliptiques, que leur faible excentricité permet d'assimiler à des cercles : dans leur mouvement absolu les satellites décrivent des préfixes cycloïdes au premier ordre près.
- Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une préfixe-cycloïde soit algébrique est que m soit rationnel. Elle est alors unicursale.
- D'après HUMBERT, les seules préfixes-cycloïdes algébriques dont l'arc soit fonction rationnelle des coordonnées sont celles où $\frac{r}{R}$, donc aussi m , est une fraction irréductible de dénominateur pair.

Conclusion :

Cette théorie n'est pas désuète : toute la théorie des engrenages si présents en mécanique (automobile, électroménager,...) utilise abondamment les roulements sans glissement. Huygens (1629-1695) [3] s'est occupé le premier du problème de la détermination du nombre de dents à donner à deux roues dentées engrenant de manière à représenter avec une approximation optimum un quotient $\frac{\omega}{\omega_1}$ de vitesses de rotations constantes au moyen d'un quotient d'entiers, ni trop grands ni trop petits. Il a conçu sa méthode (utilisant les fractions continues) pour réaliser un automate planétaire, simulant dans un but pédagogique les mouvements des diverses planètes autour du soleil : la difficulté provenant du fait que les périodes des planètes sont incommensurables, ou du moins ne peuvent être représentées avec une certaine exactitude que par de très grands nombres, on est obligé de se contenter d'à peu près, et la difficulté se réduit à trouver des rapports exprimés en plus petits nombres, qui approchent autant qu'il est possible de la vérité, et plus que ne pourraient faire d'autres rapports quelconques qui ne seraient pas conçus en termes plus grands. Huygens résoud cette question au moyen de la théorie des fractions continues.

Il y avait un tel automate, dans les années 1950, dans un grenier du Lycée Pasteur à Besançon, j'ignore s'il y est encore ? ou s'il a été détruit, par ignorance de la valeur qu'il représentait !

La théorie des nano (nanomètre=un milliardième de mètre) technologies, anticipée de manière prophétique et visionnaire par Richard Feynmann prix Nobel de physique 1965, lors de son discours [10] prononcé le 29 décembre 1959 lors de la réunion annuelle de la Société Américaine de Physique à l'Institut de Technologie de Californie (Caltech), "There's plenty of room at the bottom" : "Il y a encore beaucoup de place (ou d'espace) en bas", montre avec les nano engrenages qui interviennent dans les nano-moteurs (ceux là ayant la taille de quelques atomes), montre que les considérations de cet article sont loin d'être antiques, archéo-dépassées ! Il suffit pour s'en convaincre de taper "nano engrenages sous google. Tout un site de la nasa y est même consacré (carbon nanotube gear simulation).

Bibliographie

- [1] H. Brocard et T. Lemoyne : courbes géométriques remarquables tome III (Albert Blanchard 1970) p 240-258.
- [2] G. Cagnac, E. Râmis, J. Commeau : traité de mathématiques spéciales tome 4 (Masson 1971) p 174-185.
- [3] J. Chapelon cours d'analyse de l'École Polytechnique 1947-1948 page 316.
- [4] R. Delteil, D. Caire : compléments de géométrie (Baillères 1951) p 23.
- [5] M. Collet, G. Griso : Le cercle d'Euler (Vuibert 1987) p 7.
- [6] J. Lelong-Ferrand, J.M. Arnaudies cours de mathématiques tome 3 (Dunod 1975) p 416-433.
- [7] J. Lemaire : hypocycloïdes et épicycloïdes (Albert Blanchard 1967).
- [8] Problème du concours d'entrée à Polytechnique 1973 : moteur Wankel.
- [9] J. Rivaud : exercices de géométrie tome 1 (Vuibert 1964) p 36-45.
- [10] Site : discours de Feynmann 1958 : <http://www.resonance-pub.com/feymmann.htm>

ANNEXE I : théorie du CENTRE INSTANTANÉ DE ROTATION

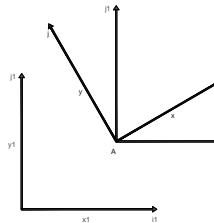
Cette annexe a pour but de donner les outils indispensables, pour apprécier les courbes cycloïdales : En effet leurs propriétés ne se comprennent vraiment qu'en se plaçant dans le contexte du mouvement plan (du cercle roulant) sur plan (du cercle de base).

La théorie du centre instantané de rotation, s'intègre en réalité dans la théorie des "Torseurs", théorie qui donnait une vision synthétique de la cinématique (comment traiter en physique la théorie du Gyroscope - au programme de spéciales, sans parler d'axe instantané de rotation....???) et qu'à mon avis c'est une erreur d'incohérence, d'avoir supprimé du programme des classes préparatoires Scientifiques.

Soit (O_1, i_1, j_1) un repère orthonormé d'axes O_1x_1, O_1y_1 , du plan absolu. (A, i, j) un repère orthonormé d'axes Ax, Ay lié au plan mobile (c'est à dire en mouvement par rapport au premier) mais tel que les deux plans coïncident à chaque instant . Soit k un vecteur unitaire, orthogonal à la direction commune des deux plans, de façon que les deux bases de \mathbb{R}^3 euclidien, constituées par (i_1, j_1, k) et (i, j, k) soient directes.

Nous posons $O_1A(t) = a(t)i + b(t)j$ où a et b sont supposées des éléments de $C^p([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ où $p \geq 1, \alpha < \beta$ étant deux réels donnés. Pour condenser nous noterons J l'intervalle $[\alpha, \beta]$. $\theta(t) = (i_1, i)$ détermination de classe C_p .

M étant un point lié au plan mobile, c'est à dire de coordonnées constantes par rapport à (A, i, j) , nous avons, par Chasles : $OM(t) = OA(t) + x(t)i + y(t)j$, si x et y sont les composantes de AM sur la base (i, j) . Pour condenser l'écriture les dérivées seront notées accentuées, chaque fois que le contexte, ne prètera à aucune confusion. Ainsi, en notant entre parenthèses les composantes absolues, ou coordonnées absolues, nous avons $i = (\cos \theta, \sin \theta), j = (-\sin \theta, \cos \theta), i' = \theta'j = \theta'k \wedge i$ et $j' = -\theta'i = \theta'k \wedge j$:



Ainsi $V(M)$ (vitesse du point M) qui est par définition $OM'(t)$ vaut : $V(M) = OM'(t) = OA'(t) + x'i + y'j + xi' + yj' = V(A) + x'i + y'j + \theta'k \wedge (xi + yj)$ **$V(M) = V(A) + x'i + y'j + \theta'k \wedge AM$** CIR(1), mais puisqu'ici, nous supposons que M est lié au plan mobile, ses coordonnées relatives x, y sont constantes : $x' = 0, y' = 0$ et ainsi **$V(M) = V(A) + \theta'k \wedge AM$** CIR(2).

Nous voulons montrer, que pour chaque t de J où $\theta'(t)$ est non nul il existe un point noté I , considéré comme lié au plan mobile, et que nous appellerons Centre Instantané de Rotation du mouvement (noté CIR), qui a une vitesse absolue nulle.

Nous rappelons que l'équation vectorielle, $X \wedge u = v$ (avec u non nul) est possible si et seulement si $u.v = 0$ et alors la solution générale est $X = \frac{u \wedge v}{u^2} + \lambda u$, où λ est un réel arbitraire. Ici comme $k.AM = 0$, puisque AM est dans le plan, l'équation $V(M) = 0$ s'écrivant $AM \wedge k\theta' = V(A)$ ou $AM \wedge k \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial OA}{\partial t}$ soit $AM \wedge k = \frac{\partial OA}{\partial \theta}$, nous notons que le temps disparaît, la notion de centre instantané (Il existe bien d'après la compatibilité de la formule de division vectorielle utilisée ici) est donc une notion purement géométrique, et non cinématique comme sa définition initiale, pouvait le laisser croire.

D'après la formule de division vectorielle on a $AM = k \wedge \frac{\partial OA}{\partial \theta} + \lambda k$, mais comme AI doit être dans le plan, on a $\lambda = 0$ et **$AI = k \wedge \frac{\partial OA}{\partial \theta}$** CIR(3).

Nous aurions pu dire aussi, que comme le champ des vitesses des points du plan mobile, était constitué de vecteurs coplanaires, il formait un torseur dégénéré, du type glisseur, dont la somme vectorielle est $\theta'k$, l'axe du glisseur, lieu des points de l'espace ayant une vitesse nulle, est la perpendiculaire en I au plan commun. Le point I étant le point lié au plan mobile, qui à l'instant t a une vitesse nulle, a donc sa vitesse d'entraînement nulle.

Par définition, nous appelons BASE, le lieu absolu de I , ROULANTE son lieu relatif, par rapport à un repère lié au plan mobile.

Donnons maintenant la liste des PROPRIÉTÉS DU CIR :

1) I ne dépend que de la géométrie : t a disparu : voir formule CIR(3).

2) M étant un point, quelconque du plan mobile, considéré comme lié au plan mobile, à l'instant t , on a d'après CIR(2) : $V_M = V_M - 0 = V_M - V_I = \theta'k \wedge (AM - AI) = \theta'k \wedge IM$. $\boxed{V_M = \theta'k \wedge IM}$ CIR(4) : la vitesse de M lié au plan mobile, est la même que dans un mouvement de instantané de rotation de centre I : d'où le nom de Centre Instantané de Rotation donné à I , que nous noterons C.I.R. et même CIR pour abrégé.

De plus V_M est orthogonal à IM , par conséquent la normale en M à sa trajectoire absolue est IM . Ce fait est important : dès que l'on connaît I , la tangente en tout M lié au plan mobile est connue et est la normale en M à IM !

3) Cherchons une représentation paramétrique de la Base : Par Chasles nous avons, en utilisant CIR(3) :

$$\boxed{OI = OA + AI = OA + k \wedge \frac{\partial OA}{\partial \theta}} \text{ CIR(5)}$$

Appelons x_1, y_1, a, b les coordonnées respectives de I et de A par rapport au repère absolu, ainsi que z_I et z_A leurs affixes absolues ($z_I = x_I + iy_I$), traduisant la formule CIR(5) en coordonnées nous avons comme représentation

$$\text{de la BASE : } \boxed{x_I = a - \frac{\partial b}{\partial \theta} \mid y_I = b + \frac{\partial a}{\partial \theta} \text{ et } z_I = z_A + i \frac{\partial z_A}{\partial \theta}} \text{ CIR(6)}$$

Ceci rappelle la représentation paramétrique de la développée d'un arc ; En fait (nous verrons ultérieurement, que tout centre de courbure est CIR du mouvement de l'"équerre" .

4) La formule CIR(3) donne la représentation de la roulante, et comme Z_I , affixe absolue de $AI = i \frac{\partial z_A}{\partial \theta}$ et si ζ_I est l'affixe relative de AI nous avons : $\boxed{\zeta_I = Z_I e^{-i\theta} = \frac{\partial a}{\partial \theta} \sin \theta - \frac{\partial b}{\partial \theta} \cos \theta + i(\frac{\partial b}{\partial \theta} \sin \theta + \frac{\partial a}{\partial \theta} \cos \theta)}$ CIR(7).

5) D'après la formule $V_a(I) = V_e(I) + V_r(I) = V_r(I)$, puisque la vitesse d'entraînement de I est nulle, d'après sa définition même, on a : $(\frac{dOI}{dt})_a = (\frac{dOI}{dt})_r$, la base et la roulante sont tangentes en I .

6) De plus la roulante, roule sans glisser sur la base, car orientant dans le même sens, au contact commun I , la base et la roulante, s_1 et s étant respectivement les abscisses curvilignes de I sur la base et la roulante, orientées en leur contact commun I , par le même vecteur τ , tangent en I , la formule du 5) se traduit en : $(\frac{ds_1}{dt})\tau = (\frac{ds}{dt})\tau : ds_1 = ds$.

7) C'est le théorème réciproque qui fait tout l'intérêt de la théorie des engrenages. Si nous avons une courbe mobile, tracée dans le plan mobile, roulant sans glisser sur une courbe fixe, alors le centre instantané de rotation du mouvement d'entraînement du plan mobile, est le point de contact I , où il y a roulement sans glissement. En effet : $s = S_1 + Cte$ et même $s = s_1$ (si on choisit les origines des arcs de telle sorte que l'origine des arcs sur la courbe roulante et sur la base courbe support de roulement se correspondent) implique $s'\tau = s'_1\tau$, $V_a(I) = V_r(I)$, et comme $V_a = V_e + V_r$ on a bien $V_e(I) = 0$.

Ainsi comme on sait, que la normale en M à un arc de classe C_2 roule sans glisser sur la développée, le CIR du plan mobile qu'elle entraîne est le point caractéristique de la normale (alias point de contact avec son enveloppe qui est la développée), centre de courbure en M à l'arc C_2 considéré : c'est le mouvement dit de "l'équerre" (formée par la tangente et la normale en M , qui entraînent un plan mobile ...). De même, dans le mouvement plan sur plan, entraîné et engendré par un cercle de rayon constant, qui roule sans glisser

-sur une droite fixe -BASE- (situation cycloïdale)

-ou sur un cercle fixe -BASE- (situation épi, péri, hypo suivant que le cercle roulant, est extérieur, contient, ou est intérieur au cercle BASE) ; le CIR sera le point I de contact du cercle roulant et de la base.

Comme il a déjà été remarqué en 2) notons que la normale au lieu de tout point M lié au cercle roulant, sera IM . (la répétition faisant la base de la bonne pédagogie, j'insiste sur ce point car il est important).

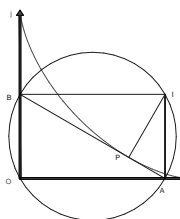
APPLICATIONS

1) Recherchons l'enveloppe d'une courbe fixe Γ de classe C_1 , tracée dans le plan mobile (imaginez une feuille de papier calque, sur laquelle vous avez dessiné une courbe). Soit M , un des points caractéristiques de Γ , pour l'une des positions, paramétrée par un paramètre t , du plan mobile, porteur de Γ ; on sait que I étant le CIR du mouvement, IM est normale à la vitesse qu'aurait M s'il était considéré comme lié au plan mobile, c'est à dire par définition à sa vitesse d'entraînement $V_e(M) = V_a(M) - V_r(M)$; Mais comme ces deux derniers vecteurs sont colinéaires, puisque la trajectoire absolue de M , point caractéristique de $\Gamma(t)$ est l'enveloppe de $\Gamma(t)$, tangente en M à sa trajectoire relative Γ , IM est normale à $V_r(M)$: le point caractéristique M est sur une des normales abaissée de I à Γ .

Réciproquement soit M , un des pieds des normales abaissées de $I(t)$ à $\Gamma(t)$, $V_e(M)$ et $V_r(M)$ sont normaux à MI , donc aussi $V_a(M) = V_e(M) + V_r(M)$: $V_a(M)$ et $V_r(M)$ sont colinéaires, et si $V_a(M)$ est non nulle M est point caractéristique de $\Gamma(t)$. Par prolongement des égalités, ce résultat est encore valable si M est stationnaire sur son enveloppe, ou point de concours local. (par exemple si les courbes $\Gamma(t)$ forment un faisceau).

2) L'astroïde est l'enveloppe d'un segment de longueur constante, dont les extrémités A et B , décrivent deux droites orthogonales Ox et Oy . I est l'intersection des normales en A et B à leurs trajectoires absolues, puisqu'ils sont liés au plan mobile entraîné par ce segment. Le point de contact de AB avec son enveloppe est le pied P de la perpendiculaire abaissée de I à AB . La trajectoire d'un point M lié à la barre est une ellipse, d'axes Ox et Oy et la normale en M à l'ellipse est IM . La base est, puisque $OI = AB$, comme diagonales du rectangle $OABI$, le cercle de centre O et de rayon $a = ||AB||$, la roulante est le cercle de diamètre AB , de rayon $R = \frac{a}{2}$. Il roule sans glisser, intérieurement au précédent, et comme il est de rayon moitié, le point A qui lui est lié décrit une hypocycloïde

à deux rebroussements, qui est le diamètre porté par Ox du cercle base. Soit w le milieu de AB , P est sur le cercle de diamètre Iw , de rayon $\frac{a}{4}$. I_0 étant le point $(a, 0)$ l'arc I_0I vaut $R\theta$ ($\theta = (Ox, OI)$) l'arc MI vaut aussi $R\theta = \frac{R}{2}2\theta$ (les deux cercles étant orientés dans le sens trigonométrique) puisque l'angle (wA, wI) mesure 2θ . Donc le cercle de diamètre wI , roule sans glisser aussi, à l'intérieur du cercle base. Le lieu de P est une hypocycloïde à quatre points de rebroussements. (voir le chapitre sur les courbes cycloïdales)



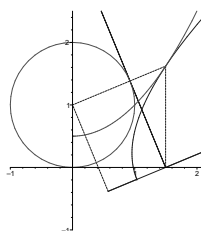
3) Si l'on a un plan mobile entraîné par un secteur d'ouverture constante, dont les cotés, restent en contact avec deux courbes fixes, le CIR du mouvement, plan sur plan ainsi défini, est l'intersection (existante) des normales à chacun des cotés du secteur en son point de contact avec son enveloppe. La normale en S sommet du secteur (lié au plan mobile) est IS . Cet exemple contient le cas des PODAIRES, l'angle est droit et l'une des courbes est réduite à un point, qui est de concours local pour le coté du secteur qui le contient. (faites une figure dans le cas général et particulier des podaires)

4) Étant donnée une courbe C , on appelle conchoïde de C par rapport au point O donné, l'ensemble des points P , tels que les points OMP étant alignés (M appartenant à C) et $MP = constante = L$. Les résultats précédents permettent de dire, comme IM enveloppe O , que le centre instantané du mouvement entraîné par OM est sur la normale en O à OM et aussi sur la normale en M , lié au plan mobile, à C . La normale en P à la conchoïde étant immédiatement IP , ce qui permet de construire la conchoïde, point par point avec en outre un élément de contact.

EXERCICES

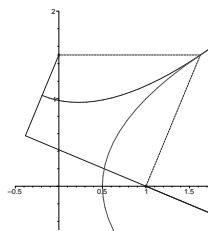
1) A décrit O_1x_1 , Ay est tangente (en M) au cercle C , centré en C sur O_1y_1 , de rayon R , tangent en O_1 à O_1x_1 ; le repère orthonormé (Ax, Ay) entraîne un plan mobile dont on demande la base et la roulante.

Solution : Le CIR I du mouvement est sur la normale en A à O_1x_1 , sa trajectoire absolue et sur CM , normale à Ay en M , son point caractéristique. Par raison d'angles égaux alternes internes en A et C , et symétrie par rapport au diamètre AC , le triangle IAC est isocèle : la base est donc la parabole de foyer C , de directrice O_1x_1 lieu absolu de A . Comme C est à une distance fixe, R , de Ay , son lieu relatif est la droite $x = -R$, dans le repère mobile (Ax, Ay) . La roulante est donc la parabole de foyer A et de directrice $x = -R$. D'après 6) la parabole roulante, roule sans glisser sur la parabole base.

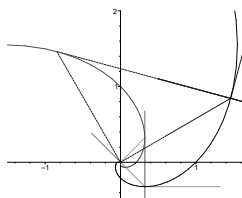


2) Une barre coudée à angle droit en A , (AB, Ax) , AB étant de longueur constante a , B décrivant O_1y_1 , et Ax contenant un point fixe O , à distance a de O_1y_1 , entraîne un plan mobile: I , CIR de ce mouvement plan sur plan, est sur la normale en O à Ax , et sur la normale en B à O_1y_1 trajectoire absolue de B . Les deux triangles rectangles OHB (H projection orthogonale de O sur O_1y_1) et OAB ayant l'hypothénuse OB commune et un coté de l'angle droit $AB = OH = a$ égaux, ont des angles aigus égaux : Le triangle IBO est isocèle car les angles complémentaires des précédents sont égaux. $IO = IB$ la base est la parabole de foyer O et de directrice O_1y_1 . La roulante est la parabole de foyer B , fixe par rapport au plan mobile et de directrice Ax . Les deux paraboles sont égales ayant même paramètre a . Le symétrique de A par rapport à la tangente commune en I est H qui est fixe : Le lieu de A est la podaire de la parabole base par rapport au point H , c'est donc une cubique circulaire (voir [2]) et comme les tangentes au point double de la cubique en question, sont les tangentes à la parabole, menées de H sur la directrice, donc orthogonales,

la cubique lieu de A est une strophoïde droite ... (c'est à dire une cubique circulaire telle que les tangentes au point double soient orthogonales).

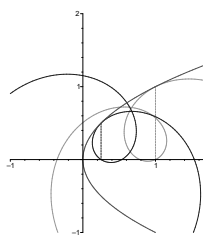


3) Considérons, le plan mobile engendré, par la tangente et la normale au point courant M , d'une spirale logarithmique de pôle O : le CIR du mouvement plan sur plan, ainsi défini est, puisque la normale roule sans glisser sur la développée, le centre de courbure I en M à la spirale ; Mais comme la tangente en M , fait (propriété de la spirale logarithmique) un angle constant V , avec l'axe radial OM , cet axe radial est lié au plan mobile, mais comme il enveloppe O , point de concours local, I est aussi sur la normale à OM en O point caractéristique, c'est à dire sur l'axe ortho-radial : le centre de courbure en M est donc l'intersection de la normale en M avec l'axe orthoradial. Il est alors immédiat de démontrer que la développée d'une spirale logarithmique est une spirale logarithmique, semblable, dans la similitude de centre O , d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\cot V$.



4) On suppose que $O_1A = \frac{1}{2}gt^2i_1$ et $(O_1x_1, Ax) = wt$, avec les notations de la formule CIR(6) on a $a(t) = \frac{1}{2}gt^2$, $b(t) = 0$, $\theta(t) = wt$, et le report dans la formule CIR(6) donne la représentation de la base : $x_I = \frac{1}{2}gt^2$, $y_I = gt$, $(y_I)^2 = 2gx_I$: la base est une parabole d'axe O_1x_1 .

La formule CIR(7) donne comme représentation de la roulante $x = gt \frac{\sin wt}{w}$, $y = gt \frac{\cos wt}{w}$. On reconnaît la spirale d'Archimède, d'équation polaire $r = g \frac{(\pi/2 - \varphi)}{w^2}$. La roulante est une spirale d'Archimède qui roule sans glisser sur la parabole base.



ANNEXE II : programme Maple V5 permettant le tracé des trochoïdes, comme dans le tableau des formes ou dans les exemples.

(Le programme complet avec animation du roulement sans glissement, pourra être envoyé par internet à tout lecteur en faisant la demande par mail)

restart: with(plots):

```

graf_cloide:=proc(R,r,h,t0,trait,epais,col)
plot([(R+r)*cos(t)-(r+h)*cos((r+R)/r*t),(R+r)*sin(t)-(r+h)*sin((r+R)/r*t),t=0..t0],
thickness=epais,linestyle=trait,color=col)
end:
cercle:=proc(R) plot([R*cos(t),R*sin(t),t=0..2*Pi],color=black,linestyle=2) end:
# pour un autre pointillé changer linestyle = 1 ou 2 ou 3 ou 4
cercle_mobile:=proc(R,r,h,t0,c)
local A,AM0,cer,M0,diam,courbe,AM1;
A:=[(R+r)*cos(t0),(R+r)*sin(t0)]; # centre cercle mobile
AM0:=[-(r+h)*cos(t0+R/r*t0),-(r+h)*sin(t0+R/r*t0)];
AM1:=[r*cos(t0+R/r*t0),r*sin(t0+R/r*t0)]; cer:=plot([op(A+[r*cos(t),r*sin(t)]),t=0..2*Pi],color=c): # cercle
mobile
### WARNING : the definition of the type 'symbol' has changed'; see help page for details
M0:=plot([A+AM0],style=point,symbol=circle,color=blue): # point mobile
diam:=plot([A-AM1,A+AM1],[A,A+AM0],color=c);
courbe:=graf_cloide(R,r,h,t0+0.00001,1,2,blue); # portion de *cloïde parcourue
# 0.00001 sinon graphe vide si t0=0
display([cer,M0,diam,courbe]);
end:
# =====
# --> épicycloïde, [(R1,r1) tq R1 >= r1 > 0] ou [(R1,r2) avec r2 = -(R1+r1)
# --> hypocycloïde [(R1,r1) tq R1 > -r1 > 0] ou (R1,r2) avec r2 = -(R1+r1)
# h "longueur" portée sur le rayon pour raccourcir ou rallonger
# KK fixe une position intermédiaire
# -----
hypo_epi:=proc(R::integer,r::integer,h,KK) # KK nombre entre 0 et 30
local n,k,roulante,base,courbe,ppm :
n:=30: # -- nombre de frames de l'animation -----
if r > R then ppm:=2*Pi*ilcm(R,r)/R else ppm:=2*Pi*ilcm(R,r)/R fi:
base:=plot(R,0..2*Pi,coords=polar,color=black,thickness=2);
courbe:=graf_cloide(R,r,h,ppm,3,1,blue):
roulante:=cercle_mobile(R,r,h,KK*ppm/n,red):
display([base,cercle(R+2*r+h),cercle(R-h),roulante,courbe],
scaling=constrained,axes=none);
end:

```

Exemple d'appel :

Comme 4-ième paramètre on met un entier k compris entre 0 et 30, cela va la k -ième image de l'animation :

```
hypo_epi(3,-1,0,22);
```