Quadrature n° 101 (2016) 1-2

À la HERSCHEL

par L. G. VIDIANI*

Résumé.

Le but de ce petit article est de rappeler ce qu'est le dénumérant et d'expliquer ce que signifie ce développement " à la HERSCHEL ".

I Le dénumérant

Dans le remarquable *Analyse combinatoire* (PUF 1970) de Louis Comtet qui nous a quitté hélas le 11 octobre 2012, on lit dans le tome premier page 168 à la rubrique 10 *Dénumérants et polynômes de Bell* : *En déduire les développements "à la Herschel"*. D'après les renseignements dont nous disposons, ces développement auraient été établis vers 1818 par Sir John Frederick William Herschel (1792-1871), mathématicien et scientifique britannique, fils de l'astronome William Herschel (1738-1822). En quoi consistent ces développements ?

Introduisons tout d'abord la notion de dénumérant d'un entier n, noté ici D_n. Nous supposerons que les entiers n_j, $j = 1...k$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. Nous considérons alors la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{1-x^{n_1}} \cdots \frac{1}{1-x^{n_k}} = \Big(\sum_{p_1=0}^{+\infty} x^{n_1 p_1}\Big) \cdots \Big(\sum_{p_k=0}^{+\infty} x^{n_k p_k}\Big).$$

Les séries qui interviennent sont toutes de rayon de convergence 1, distance de l'origine O aux pôles qui sont tous de même module 1. Nous regroupons les termes qui donnent le même exposant n, grâce au théorème de Mertens sur le produit des séries convergentes , et nous obtenons le coefficient D_n de x^n dans ce développement. D_n est ainsi le nombre de façons d'écrire n sous la forme $n = n_1 p_1 + \cdots + n_k p_k$. On l'appelle le **dénumérant** de n. Il peut être interprété, comme le nombre de façons de payer n euros avec des pièces de n_j euros, $j = 1...k$. On peut aussi le relier aux partitions d'entiers.

* lg_vidiani@club-internet.fr

Figure 1. William Herschel

II Le développement "À la Herschell"

Mais il y a une autre façon de développer f en série entière, et c'est là qu'intervient l'idée de Herschell. Justement cette deuxième expression permettra, par confrontation de calculer le dénumérant en fonction de n. Au lieu de décomposer en éléments simples et de regrouper (ce qui est lourd et long) on appelle p le plus petit commun multiple des n_j et ainsi

$$\frac{1}{1-x^{n_j}} = \frac{1}{1-x^p} \cdot \frac{1-x^p}{1-x^{n_j}} = \frac{A_j(x)}{1-x^p},$$

où $A_j(x) = \dfrac{1-x^p}{1-x^{n_j}}$ est un polynôme. Ainsi $f(x) = \frac{A_1(x)...A_k(x)}{(1-x^p)^k}$, qui est bien plus facile à développer en série entière puisqu'il suffit de multiplier par le polynôme numérateur le développement en série entière de $\dfrac{1}{(1-x^p)^k}$. On obtient ce dernier en substituant

$u = x^p$ dans la dérivée $k-1$ ième du développement $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \dots$.

C'est cette technique qui est appelée "à la Herschel". Dans le cas où les n_j sont premiers entre eux deux à deux, on a $p = n_1 \dots n_k$ et par exemple

$$A_1(x) = \frac{1 - x^{n_1 \dots n_k}}{1 - x^{n_1}} = \frac{1 - (x^{n_1})^{n_2 \dots n_k}}{1 - x^{n_1}}$$
$$= 1 + x^{n_1} + \dots + (x^{n_1})^{n_2 \dots n_{k-1}}.$$

III Un cas particulier

Traitons le cas $k = 3$ et $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 3$. Le dénumérant D_n est alors nombre de façons d'écrire n sous la forme $p_1 + 2p_2 + 3p_3$ et c'est aussi le coefficient de x^n dans le développement en série entière "à la Herschel" de

$$f(x) = \frac{(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x^2+x^4)(1+x^3)}{(1-x^6)^3}.$$

Or $\frac{1}{1-u} = 1 + u + \dots + u^{n+2} + \dots$, Puis par dérivation terme à terme :

$$\frac{1}{(1-u)^2} = 1 + 2u + \dots + (n+2)u^{n+1} + \dots$$

$$\frac{2}{(1-u)^3} = 2 + 6u + \dots + (n+2)(n+1)u^n + \dots$$

Et par la substitution $u = x^6$, il vient :

$$\frac{1}{(1-x^6)^3} = 1 + 3x^6 + \dots + \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^{6n} + \dots$$

On reconnaît un coefficient binômial. On pourrait développer le numérateur à la main, ou utiliser un logiciel de calcul formel. Avec Maple, ni *expand*, ni *sort* n'ordonnent suivant les puissances croissantes ; on utilise donc la commande *series* :

$$series((1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)*(1+x^2+x^4)\dots$$
$$\dots*(1+x^3),x,13);$$

qui donne :

$$f(x) = (1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 4x^6$$
$$+5x^7 + 4x^8 + 3x^9 + 2x^{10} + x^{11} + x^{12})\times$$
$$(1 + 3x^6 + \dots + (n+1)(n+2)/2\; x^{6n} + \dots).$$

Comme prévu le polynôme numérateur est réciproque comme on le constate puisque les coefficients sont symétriques.

Il ne reste plus qu'à utiliser une congruence modulo 6 pour calculer les valeurs du dénumérant.

$$D(6m) = \frac{(m+1)(m+2)}{2} + 4\frac{m(m+1}{2} + \frac{(m-1)m}{2}$$
$$\dots = 3m^2 + 3m + 1.$$

C'est vrai pour m = 0, m = 1 etc.

$$D(6m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2} + 5\frac{m(m+1)}{2}$$
$$\dots = (m+1)(3m+1).$$

$$D(6m+2) = (m+1)(m+2) + 2m(m+1) = (m+1)(3m+2).$$

$$D(6m+3) = 3\frac{(m+1)(m+2)}{2} + 3\frac{m(m+1)}{2}$$
$$\dots = (m+1)(3m+3).$$

$$D(6m+4) = 2(m+1)(m+2) + (m+1)m = (m+1)(3m+4).$$

$$D(6m+5) = 5\frac{(m+1)(m+2)}{2} + \frac{(m+1)m}{2}$$
$$\dots = (m+1)(3m+5).$$

On peut condenser ces formules sous la forme :

$$D(6m+r) = (m+1)(3m+r) + \delta(r)$$

où δ est la fonction de Dirac : $\delta(0) = 1$ et $\delta(r) = 0, r = 1 \dots 5$.

Références

[1] Comtet Louis, *Tome 1*, Presses Universitaires de France, page 168 exercice 10, 1970

[2] Gomez, Salvy, Zimmermann, *Calcul formel mode d'emploi*, Masson 1995, p 109-111, 1995.

[3] Collectif, de Mathématiques spéciales, Numéro 337.

[4] Polya, Szego, *Problems and Theorems in Analysis I* , ex 1 page 1 et 123 ; ex 8 p 2 et 174 ; ex 27 p 4-5 et 180, Springer Verlag, 1972.

[5] J. Rivaud, *Exercices avec solution Analyse tome 3* , p 106-107, Vuibert , 1973.

[6] A. Tissier, *Agrégation Interne de mathématiques, Mathématiques générales, exercices avec solution* , p 325-326, Bréal, 1991.

Sitographie

http ://algo.inria.fr/dumas/GoSaZi95/Answers/tableindex.html (les exercices sur le dénumérant sont à l'entrée D ; Un nombre transcendant http ://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php ?5,278340

Le livre de Louis Comtet, *Analyse combinatoire approfondie*, est disponible sur Google books.