Équations Fonctionnelles (en Hommage à Jean BERRARD) 4 X 25 08h12 version lundi 13 octobre 2025 11:16 (article écrit suivant la suggestion de Serge Belhassen à la suite d'une EF intégrale posée sur le forum) UPS Math

VIDIANI Georges FONTAINE LES DIJON georges.vidiani@orange.fr

Monsieur l'Inspecteur Général Jean BERRARD (voir (1)), organisa les 25-26 novembre 1975 à Grenoble d'abord, puis à ANNECY les 28-29 novembre 1975, un stage d'Analyse dont le but était des thèmes (quatre) de réflexions sur la continuité, puis proposait 9 exercices originaux, (dont je donne les énoncés en Annexe) dont 'intention était de surprendre par leur singularité et d'inciter à réfléchir (inéquations fonctionnelles, équations fonctionnelles…). Parmi la cinquantaine de documents manuscrits ou tapuscrits, traces de ce stage, je ne donne la solution que de II, III, et VIII, cités dans mon article « Équations fonctionnelles » paru dans le site « Culture Math », https://www.georges-vidiani.com/article-culture-math/ en numéro 16. https://www.georges-vidiani.com/wp-content/uploads/2020/11/16-Equations-Fonctionnelles.pdf . Article de 14 pages en TEX, répertoriés EF 16 en bas de la page 11. Le lecteur remarquera, que l'auteur a su très tôt s'imprégner de l'esprit de la POO : « **chaque objet doit porter sa propre référence »**, puisque la localisation de ces documents y est signalée, ce qui lui a permis de répondre très rapidement à un collègue lors d'un échange, en octobre 2025, sur une autre équation fonctionnelle (intégrale) sur le forum UPS math

---

ANNEXE : les 9 exercices proposés par Jean BERRARD à ANNECY 28-29 11 1975

Thèmes de réflexion :

Soit $a \in \mathbb{R}$. On notera : $I_\varepsilon(a) =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, et $\{I_\varepsilon(a), \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\}$.

Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}$, et f une application de A dans $\mathbb{R}$. Supposons ici pour simplifier que A soit un intervalle quelconque de $\mathbb{Q}$. Soit $a \in A$. On dira que f est continue en a pour la topologie induite sur $\mathbb{Q}$ si : $\forall I_\varepsilon\big(f(a)\big) \quad \exists\, I_\alpha(a) \quad f(I_\alpha(a) \cap A) \subset I_\varepsilon\big(f(a)\big)$.

Dans ce cadre-là, on constate :

1°) $f : \begin{matrix} A & \to & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & \frac{1}{4}(6x - x^3) \end{matrix}$ où $A = \{x; x \in \mathbb{Q}, 0 \le x \le 2\}$

f est continue en tout point de A et n'admet pas de borne supérieure sur A, intervalle fermé borné de $\mathbb{Q}$.

2°) $f : \begin{matrix} A & \to & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & \frac{1}{x^2-2} \end{matrix}$ où $A = \{x; x \in \mathbb{Q}, 0 \le x \le 2\}$

F est continue en tout point de A et n'admet pas de borne supérieure sur A, intervalle fermé borné de $\mathbb{Q}$.

3°) $f : \begin{matrix} B & \to & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & x^2 \end{matrix}$ où $B = \{x; x \in \mathbb{Q}, 1 \le x \le 2\}$

f est continue en tout point de B, dérivable en tout point de B et ne vérifie pas le théorème des valeurs intermédiaires. (« Adapter à $\mathbb{Q}$ » la définition de dérivabilité comme on l'a fait pour la continuité).

4°) $f : \begin{matrix} A & \to & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & \begin{cases} 0 \; si \; 0 \le x \le \sqrt{2} \\ 1 \; si \; \sqrt{2} \le x \le 2 \end{cases} \end{matrix}$ où $A = \{x; x \in \mathbb{Q}, 0 \le x \le 2\}$

f est continue et dérivable en tout point de A, sa dérivée vaut 0 en tout point et la fonction n'est pas constante.

EXERCICES D'ANALYSE :

I) Soit $\varphi : \begin{matrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & \frac{1}{2}(x + d(x, 2\mathbb{Z})) \end{matrix}$ où d$(x, 2\mathbb{Z})$-$|x - 2n|, n \in \mathbb{Z})$

Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^+ \; \varphi\,(a-1) \leq \varphi(x+a) - \varphi(x) \leq \varphi(a)$

II) Trouver toutes les applications f de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^+ \qquad \boldsymbol{f(x + a^2) \geq f(x) + a}$$

III) Trouver toutes les applications f de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^+ \qquad \boldsymbol{|f(x + a) - f(x)| \leq a^2}$$

IV) Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, de dimension quelconque (finie ou non).
Soit f une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.
Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) f est continue en tout point de E
(2) f est continue à l'origine
(3) f est bornée sur la boule unité

Remarque : si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ est continue. Si E est de dimension infinie, ce n'est pas le cas. Ainsi par exemple soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ Des polynômes à coefficients réels, muni de la norme : $P \in E \; \|P\| = Max\,\langle |P(x)|, 0 \leq x \leq 1\rangle$. Pour f prenons l'application qui à P fait correspondre P(3). Soit P_n la suite de polynômes : $x \longmapsto \left(\frac{x}{2}\right)^n$. Cette suite converge vers 0 dans E et f(P_n) tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

V) Une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, f est convexe si : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \; \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \leq \lambda \leq 1 \; (f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. Montrer que toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, convexe est continue.

VI) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue et vérifiant :
$\forall x \in \mathbb{R}^* \; |f(x)| \leq |x|$

1°) Montrer que : $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \alpha > 0 \;:\; |x| \leq \propto \Longrightarrow |f(x)| \leq \epsilon$

2°) Soit A $\in \mathbb{R}_+^* \; et \;\; \propto \in \mathbb{R}, 0 < \propto < A$. Soit $D = [-A, -\propto] \sqcup [A, \propto] \; et \; k = \sup_{x \in D} \left|\frac{f(x)}{x}\right|$. Montrer que 0<k<1.

3°) Soit f_n l'itérée n-ième de f, i.e. : $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots . \circ f}_{n \; fois}$. Montrer que pour tout X, la suite $f_n\,(x)$ converge vers 0.

4°) Soit A $\in \mathbb{R}_+^*$ - Montrer que (propriété de convergence uniforme) :
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \sup_{x \in [-A, +A]} |f_n(x)| \leq \varepsilon$

VII) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable en tout point de $\mathbb{R} - \langle a \rangle$. On suppose que $\lim_a f' = \ell$, avec $\ell \in \mathbb{R}$.

1°) f est-elle dérivable en a ?
2°) Si oui, a-t-on $f'(a) = \ell$?

VIII) Étude des bijections f de E dans E ($\boldsymbol{E \subset \mathbb{R} \; et \; E \neq \emptyset}$) telles que pour tout x de E $\boldsymbol{f(x) + f^{-1}(x) = 2x}$.

- **E peut-il être borné ?**
- **Si E= $\mathbb{R}$, trouver les fonctions f affines polynômes**
- **Chercher les fonctions affines par morceaux.**

- **Démontrer que si f(x)-x n'est pas constant, f n'est pas monotone.**
- **Donner des exemples de fonctions f (rechercher des couples (E, f) solutions.**
-

IX (Mr Vibes) Soit $I = [0,1]$ un intervalle de $\mathbb{R}$; à tout réel autre que 1, défini par son développement décimal illimité propre, on associe f(x) ainsi défini : on partage la partie après la virgule en tranches de deux chiffres et on permute les chiffres de chaque tranche. On pose f(1)=1 : f est ainsi une application de I dans I.

1°) Montrer que f est bijective et que $f \circ f = I_{d_I}$

2°) La topologie de I est celle induite de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

a) Les ouverts de I sont-ils tous des ouverts de $\mathbb{R}$?

b) On considère l'ensemble $U = \{x | \ x \in I \ et \ f(x) = x\}$ Citez quelques éléments de U. x_0 étant un élément de U, peut-on trouver un intervalle ouvert contenant x_0, et inclus dans U ? Donner un exemple de suite de CAUCHY dans U, non convergente dans U.

c) F est-elle continue en tout point de I ?

3°) Quelle est l'image par f de l'intervalle]0,1350,01351[?

Même question pour les intervalles]0,1349,01350[et]0,1349,01351[

Reprendre 2°c)

4°) D_2 étant l'ensemble des décimaux s'écrivant avec deux décimales au plus, donner la représentation graphique de la restriction de f à $D_2 \cap I$.

SOLUTIONS DES EXERCICES (en gras) II, III et VIII (in)équations fonctionnelles

- **Solution de II) Trouver toutes les applications f de $\mathbb{R}$ $dans$ $\mathbb{R}$ vérifiant**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^+ \qquad f(x + a^2) \geq f(x) + a$$

Pour $y \neq x, \ y > x, posons \ k = y - x > 0$ alors $\sqrt{k}$ $existe$ et on prend $a^2 = \frac{k}{n}$ $avec \ n \in \mathbb{N}^*$; (a est bien quelconque !)

$$n \ inégalités \begin{cases} f\left(x + \frac{k}{n}\right) - f(x) \geq \frac{\sqrt{k}}{n} \\ f\left(x + \frac{2k}{n}\right) - f(x + \frac{k}{n}) \geq \frac{\sqrt{k}}{n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f\left(x + \frac{nk}{n}\right) - f(x + \frac{(n-1)k}{n}) \geq \frac{\sqrt{k}}{n} \end{cases}$$

On ajoute membre à membre et par télescopage diagonal descendant il reste : $f(x + k) - f(x) \geq \sqrt{n} * \sqrt{k}$ Soit $f(y) - f(x) \geq \sqrt{n} * \sqrt{k}$ ce qui est absurde quand $n \to +\infty$, vu le caractère borné du membre de gauche.

AUCUNE FONCTION f NE PEUT CONVENIR.

Remarque : f croissante, dérivée à droite et à gauche infinie ; s'il y avait une fonction réalisant l'égalité, les autres en différencierait d'une fonction croissante ; voir exemple de HANS HAHN Mon. Math. Phys ? 1905.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Hans_Hahn_(mathématicien) (il y a son portrait).

Voir la note de bas de page p 81 du livre d'Henri LEBESGUE « Leçon sur l'intégration » Gauthier-Villars, deuxième édition, nouveau tirage 1950 ; Henri Lebesgue dans cette note, dit que cet exemple « a été construit en réponse à une question que j'avais posée dans la première édition de ce livre ». Depuis d'autres exemples ont été donnés, en

particulier par M. Arnaud DENJOY (idole de JPG). Voir aussi M. RUZIEWICZ (Fund. Mat., t. I) ; Voir aussi cours d'Analyse de FAVARD tome I page 280.
https://fr.wikipedia.org/wiki/Arnaud_Denjoy
https://www.numdam.org/item/AST_1975__28-29__1_0.pdf (par Choquet)
Son livre « mémoire sur la dérivation et son calcul inverse Gauthier-Villars 1954 a 1107 pages et est à la BU d'Orsay.

- **Solution de III** Trouver toutes les applications f de $\mathbb{R}$ $dans$ $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^+ \qquad |f(x+a) - f(x)| \leq a^2$$

$Pour\ y > x\ posons\ y - x = k$, avec les mêmes notations que dans l'exercice précédent, on a :

$$n\ inégalités \begin{cases} \left|f\left(x+\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leq \frac{k^2}{n^2} \\ \left|f\left(x+\frac{2k}{n}\right) - f(x+\frac{k}{n})\right| \leq \frac{k^2}{n^2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left|f\left(x+\frac{nk}{n}\right) - f(x+\frac{(n-1)k}{n})\right| \leq \frac{k^2}{n^2} \end{cases}$$

Par inégalité triangulaire $\sum_{i=0}^{n-1} \left|f\left(x+\frac{(i+1)k}{n}\right) - f(x+\frac{ik}{n})\right| \leq \frac{k^2}{n}$

Donc

$$|f(x) - f(y)| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x+\frac{(i+1)k}{n}\right) - f(x+\frac{ik}{n})\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left|f\left(x+\frac{(i+1)k}{n}\right) - f(x+\frac{ik}{n})\right| \leq \frac{k^2}{n}$$

n tendant vers plus l'infini : $|f(x) - f(y)| = 0$ et par l'axiome de séparation f(x)=f(y)

LA SEULE SOLUTION EST f CONSTANTE ;

- **Solution de VIII**

  Étude des bijections f de E dans E ($E \subset \mathbb{R}$ et $E \neq \emptyset$) telles que pour tout x de E $f(x) + f^{-1}(x) = 2x$. (1)

  - **(VIII,1) E peut-il être borné ?**
  - **(VIII,2) Si E= $\mathbb{R}$,** trouver les fonctions f affines, polynômes
  - **(VIII,3)** Chercher les fonctions affines par morceaux.
  - **(VIII,4)** Démontrer que si f(x)-x n'est pas constant, f n'est pas monotone.
  - **(VIII,5)** Donner des exemples de fonctions f (rechercher des couples (E, f) solutions.

La relation s'interprète géométriquement : si M= (x, f (x)) et M'= (x, $f^{-1}(x)$), alors le milieu de la corde MM' est sur la première bissectrice y=x.

Généralités :

1) **<u>Remarques préliminaires :</u>**
   - **Il revient au même d'étudier les applications de E dans E, telles que $(\forall x \in E) f(f(x)) + x = 2\, f(x)$ et f surjective. (2)**

En effet si f satisfait à (1), elle satisfait à (2) et réciproquement si f satisfait à (2), elle est bijective de E sur E et vérifie (1).
Mais notons que la relation (1) est d'interprétation plus aisée.

- **Il est immédiat que si (E, f) est une solution de (1), (E, f^{-1}) est également solution. Enfin remarquons que id_E répond à la question et que dans ce cas E peut être un sou ensemble, non vide, quelconque de $\mathbb{R}$. (en particulier borné).**
- **2) <u>Étude générale de f (f≠ id_E).</u>**
- **Supposons qu'une telle application existe, alors $\forall x \in E, f(x) + f^{-1}(x) = 2x$**
- **Donc $(\forall n \in \mathbb{Z})\ f(f^n(x)) + f^{-1}(f^n(x)) = 2f^n(x)$: $f^{n+1} + f^{n-1} = 2f^n$**

Soit $f^{n+1} - f^n = f^n - f^{n-1} = \cdots \ldots = f - id_E$
$\sum_{m=1}^{n}(f^m - f^{m-1}) = f^n - id_E = n(f - Id_E)$. Et finalement

$(\forall n \in \mathbb{Z}), (\forall x \in E)\ f^n(x) = x + n(f(x) - x)$

- **Conséquences : l'étude d'une solution $f \neq id_E$ conduit donc à :**
  Soit $a \in E$ tel que $a \neq f(a)$ $\forall n \in \mathbb{Z}, f^n(a) = a + n(f(a) - a)$ <u>Propriété arithmétique</u>
  Donc si $f(a) > a$), suite croissante, si $f(a) < a$) suite décroissante.

  Remarquons que réciproquement, à partir d'une progression arithmétique $\dot{a} = \{a + n\alpha\}\ n \in \mathbb{Z}$, on peut trouver une solution f.
  En effet la restriction de f à $\dot{a}$ est immédiatement déterminée.
  $f_{|\dot{a}}(x) = x + \alpha$
  Et si on ne trouve rien de mieux, on peut toujours utiliser l'identité pour compléter sur E-$\dot{a}$. Notons encore qu'à partir d'une même progression $\dot{a}$, il y a de nombreuses possibilités $f_{|\dot{a}}(x) = x + k\alpha$, $k \in \mathbb{Z}$.
  L'ensemble $\dot{a} = \{f^n(a)\} \mid n \in \mathbb{Z}$ est inclus dans E. Comme $f^n(a) = a + n(f(a) - a)$

  Pour a choisi tel que : a≠ $f(a)$, <u>l'ensemble E n'est pas borné</u>, alors qu'il pourrait l'être en prenant $f = id_E$.
  On en déduit une particularité de la représentation graphique en générale :
  Du point $A = [a, f(a)]$ de la représentation graphique, nous en déduisons une suite de points $A_n = [f^n(a), f^{n+1}(a)]$, en posant $A_0 = A = [a, f(a)]$

  $\overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{OA_{n-1}} + n\vec{V}$ où $\vec{V} = [f(a) - a](\vec{\imath} + \vec{\jmath})$
  La représentation graphique est donc invariante dans la succession φ des deux symétries $\varphi = S(\Delta, \vec{j}) \circ \left(\Delta, \vec{\imath} - \vec{\jmath}\right)$

(VIII,1) Borné ? Il suffit de prendre f(x)=x pour tout x, alors toute partie bornée, où f est ainsi définie convient (par exemple un singleton).
Autre point de vue : f$(x) + f^{-1}(x) = 2x$ on compose avec $f^{(n)}(x)$), $f^{(n+1)}(x) + f^{(n-1)}(x) = 2f^{(n)}(x)$), *pour tout n entier relatif,* $f^{(n+1)} + f^{(n-1)} = 2f^{(n)}$ *ou* $f^{(n+1)} - f^{(n)} = f^{(n)} - f^{(n-1)} = \cdots = f - id_E$, *donc* $\sum_{m=1}^{n}(f^{(m)} - f^{(m-1)}) = n(f - id_E)$
Donc pour tout x de E $f^{(n)}(x) - x = n(f(x) - x)$ **donc si f est différent de l'identité de E : E n'est pas borné !**

(Remarques : si (E, f) solution (E, f^{-1}) aussi ;
Si x est un point de E, f(x), $f^2(x)$), $f^{-1}(x)$),...., $f^n(x)$), pour tout n de $\mathbb{Z}$, aussi)

(VIII,2) Affines ? **On pose f(x)=ax+b donne pour a non nul donc $f^{-1}(x)) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$**

Donc $f(x) + f^{-1}(x) = \left(a + \frac{1}{a}\right)x + b - \frac{b}{a} = 2x$

L'identification donne $\left(a + \frac{1}{a}\right) = 2$ et $b\left(1 - \frac{1}{a}\right) = 0$ soit $(a-1)^2 = 0$, soit $a = 1$.

Les solutions affines sont f(x)= x+ b, b constante arbitraire ;

(VIII,2) f polynôme ?

Première solution : Si était polynomiale $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = f(x)$, *de degré n>1, on reporte dans (2)* $(\forall x \in E)\ f\big(f(x)\big) + x = 2\,f(x) :\ \sum_{i=0}^{n} a_i f(x)^i + x = 2f(x)$.

Le degré du membre de gauche est $n^n > n$ degré du membre de droite : contradiction. Donc seule possibilité n=1, f est affine. Les seules solutions polynomiales sont les fonctions affines.

(Remarques utiles : $\frac{f(x)+f^{-1}(x)}{2} = x$, posons $\frac{f(x)-f^{-1}(x)}{2} = \lambda(x)$ ($\lambda(x) = 0$ donne $f(x) = f^{-1}(x)$ ou $f^2(x) = x$, ***qui soit dans la formule encadrée jaune au premier tiers de la page 5, avec n=2 donne f(x)=x, f identité, soit par la formule (2) qui donne alors le même résultat)***

et par demi-somme et demi-différence : $f(x) = x + \lambda(x)$ et $f^{-1}(x)) = x - \lambda(x)$; et comme $f \circ f^{-1}(x) = x$,

$x = x - \lambda(x) + \lambda(x - \lambda(x))$ soit $\lambda(x) = \lambda(x - \lambda(x))$, pour tout x et par récurrence immédiate (*) $\lambda(x) = \lambda(x + k\lambda(x))$, pour tout k∈ $\mathbb{Z}$.

$$f\big(x + k\lambda(x)\big) = x + k\lambda(x) + \lambda(x) = x + (k+1)\lambda(x)$$

Pour que f soit bijective, il ne faut pas que $f\big(x + k\lambda(x)\big) = f\big(y + k'\lambda(y)\big)$, (avec k différent de k') ce qui exigerait

$x + (k+1)\lambda(x) = y + (k'+1)\lambda(y)$. Avec $x + k\lambda(x) \neq y + k'\lambda(y)$.

y étant choisi il faut prendre $\lambda(y) \notin \frac{x-y+\mathbb{Z}\lambda(x)}{\mathbb{Z}}$. En particulier cela est certain si $a \neq b, \lambda(b) = \lambda(a)$, $b \notin \langle a + \mathbb{Z}\lambda(x)\rangle$)

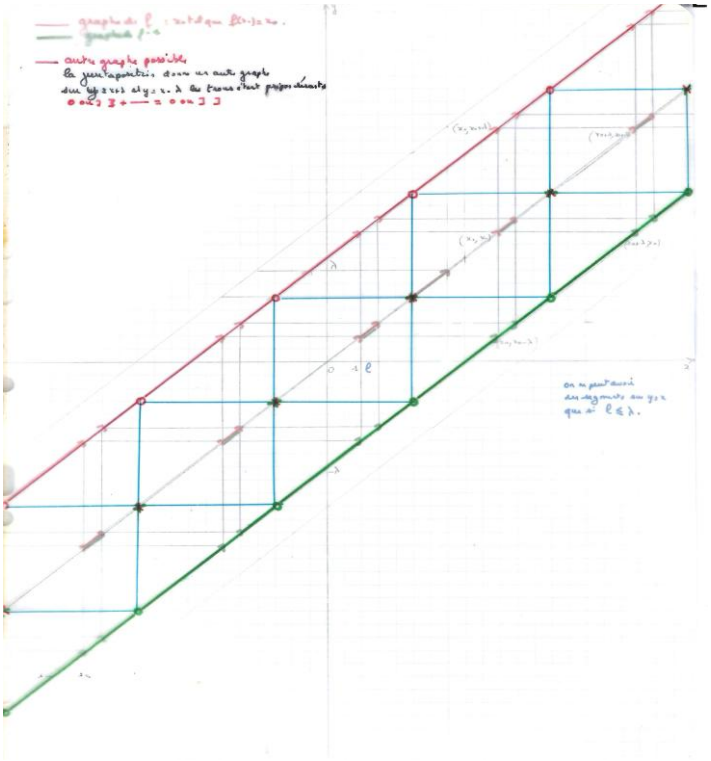
Seconde solution : ***On doit avoir $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = f(x) = x + \lambda(x)$, soit $Q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i - x = \lambda(x)$ =(d'après (*))***

$\lambda(x + k\lambda(x)) = Q(x + k\lambda(x))$; Q(x)=0 donne aussi Q $(x + k\lambda(x))$ et puisque f est différent de l'identité, car $\lambda(x) \neq 0$, donc Q est constant (polynomial il aurait une infinité de racines) donc $a_n = 0, a_1 = 1$.

$\lambda(x) = constante$; les seules solutions sont les précédentes : les fonctions affines ;

(VIII,3) Chercher les fonctions affines par morceaux.

Le calque ci-joint, donne des exemples de solutions : (fichier documents stage Berrard ; 5 exemples)



On peut voir aussi que $\boldsymbol{f(x) = x + 2.(-1)^{E(x)}}$ Où E est la « partie entière » est solution :

$y = x + 2.(-1)^{E(x)}$, en échangeant x et y, on a la fonction inverse $x = y + 2.(-1)^{E(y)}$

(VIII,4) Démontrer que si f(x)-x n'est pas constant, f n'est pas monotone.

f monotone, implique f(x)=x+ h, où f est une constante : en effet $\begin{cases} f(x_1) + f^{-1}(x_1) = 2x_1 \\ f(x_2) + f^{-1}(x_2) = 2x_2 \\ \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} + \frac{f^{-1}(x_2)-f^{-1}(x_1)}{x_2-x_1} = 2 \end{cases}$

On a $2 = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{\Delta f} = \varphi\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)$ où $\varphi(x) = x + \frac{1}{x}$ or (étude) $\varphi(x) \geq 2$ et ne peut être égal à 2 que pour x=1 et par suite $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 1$. On prend $x_2 = x \; et \; x_1 = 0$, par suite
f(x)-f (0) =x-O ou f(x)=x+ constante.
Autrement dit si f(x)-x n'est pas constant, f n'est pas monotone.

(Remarque : Au besoin en changeant f en -f on peut supposer f croissante.
Si $\frac{\Delta f}{\Delta x} > 0$ *alors* $\frac{\Delta f}{\Delta x} < 2$ *et* $\frac{\Delta x}{\Delta f} < 2$ *ce qui implique* $\frac{1}{2} < \frac{\Delta f}{\Delta x} < 2$*)*

(VIII,5) Donner des exemples de fonctions f (rechercher des couples (E, f) solutions.
Tout collègue trouvant des exemples originaux peut me les faire connaître (mon adresse mail est au début)

a) $E = \mathbb{R}\,; f(x) = \begin{cases} x + q \; si \; x \in \mathbb{Q}, q \in \mathbb{Q} \\ x + r \; si \; x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \; r \in \mathbb{Q} \end{cases}$

b) $E = \mathbb{R}\,; f(x) x + k(-1)^{E(x)}$, E(x) désignant la partie entière de x, k quelconque entier. (par exemple k=4)

c) $E = \mathbb{Z} \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]; f(x) = \begin{cases} x \; si \; x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] - \{0\} \\ \begin{cases} x+3 \; si \; x \in 3\mathbb{Z} \\ x \; si \; (x-1) \in 3\mathbb{Z} \end{cases} \\ x+3 \; si \; (x-2) \in 3\mathbb{Z} \end{cases}$

Comment trouver plus généralement les applications f satisfaisant à (1) $\boldsymbol{f(x) + f^{-1}(x) = 2x.}$
Soit E un sous ensemble non vide de R.
Une solution (E, f) satisfait à $(\forall x \in E), f^n(x) = x + n[f(x) - x]$ pour tout entier n.

Soit $x_1 \in E$, deux cas sont possibles :

a) Il n'existe aucun réel T≠ 0, tel que pour tout entier n, $x_1 + nT$ soit élément de E (C'est le cas particulier si E est borné) ; On posera alors $\boldsymbol{f(x_1) = x_1.}$
b) Il existe un réel T≠ 0, tel que pour tout entier n, $x_1 + nT$ soit élément de E.
Posons $\dot{x_1} = \{x_1 + nT | n \in \mathbb{Z}\}$ et fixons-nous un nombre k $(k \in \mathbb{Z})$
Pour tout x de la classe de x_1 , posons f(x)=x +k T.
La restriction de f à $\dot{x_1}$ satisfait à (1)
Et dans l'ensemble $E - \dot{x_1}$, on refait le même raisonnement.

Pour l'exemple c) on a pris $x_1 = 0, T_1 = 3, k_1 = 1$
Puis dans $E - \dot{x_1}$ $x_2 = 0, T_2 = 3, k_2 = 0$
Enfin dans E-$\{\dot{x_1} \cup \dot{x_2}\}$ $x_3 = 2, T_3 = 3, k_3 = -1.$

BIBLIOGRAPHIE ET SITOGRAPHIE

(1) https://www.archicubes.ens.fr/lassociation/mémoire-normalienne/notices/berrard-jean-1943-s
(2) https://www.libramemoria.com/defunts/berrard-jean/4f5b9e9c523448c892069a31bf0250f9
(3) https://www.apmep.fr/IMG/pdf/AAA05044.pdf exercices 1 et 2
(4) ? https://www.clcv.org/storage/app/media/coproprietaires/Decision-de-l-assemblee-generale-et-atteinte-aux-modalites-de-jouissance-des-parties-privatives.pdf
(5) Rapport d'inspection par Mr BERRARD, sur l'inspection de l'Auteur, le 15 mars 1977 de 15 à 16h au lycée d'État mixte Berthollet à Annecy (Académie de Grenoble) en classe de spéciales M' (28 élèves) ; la leçon était sur les arcs rectifiables.
