

ENVELOPPES

(Les enveloppes de droites, ne sont plus au programme des classes préparatoires aux grandes écoles depuis la réforme 1995 ! Ce qui n'a pas empêché le problème de Centrale II MP 1998 de porter entièrement sur le sujet !)

§ 1 Théorème direct

§ 2 Examen de la réciproque

§ 3 Propriétés

§ 4 Enveloppe de cercles

§ 5 Enveloppe d'une famille de droites sous la forme d'EULER

§ 6 Généralisation (initiateur ARNOLD) de la notion d'enveloppe :

Legendrienne et Lagrangienne :

Voir dans la sitographie tout ce qui est avant le « relais technologique ».

§ 7 La notion d'enveloppe peut apparaître même en industrie et sciences humaines : le **relais technologique de François Meyer** : voir dans la sitographie tout ce qui concerne cette notion.

§ 1 Théorème direct

Nous voulons donner un cadre rigoureux, à la notion intuitive, de l'enveloppe d'une famille de courbes dépendant d'un paramètre réel.

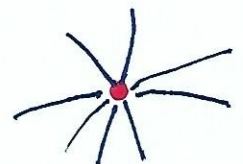
Soit F une famille de courbes $(C_\lambda)_{\lambda \in I}$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, d'équation dans un repère affine du plan $f(x, y, \lambda) = 0$ où f est continument différentiable sur un ouvert W , qu'on peut ramener à un pavé $I_x \times I_y \times I$ de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$.

Définition de l'enveloppe de la famille des $(C_\lambda)_{\lambda \in I}$

C'est l'ensemble noté E , des points du plan inclus dans l'ensemble

$$A = \left\{ M \mid M \in U_{\lambda \in I}(C_\lambda), \text{réunion de points isolés et de supports d'arcs} \right\} :$$

paramétrés (J, g) de classe C_1 tels que



(a) Si M est un point isolé de (E) : $M \in (C_\lambda) \forall \lambda \in I' \subseteq I$. **M est dit point de concours local.**

(exemples : $x + \lambda y = 0$ (faisceau de droites) ; $x^2 + y^2 - 1 + \lambda y = 0$ (faisceau de cercles) ;

exemple discret : la cochléoïde, perspective de l'hélice circulaire vue d'un de ses points, inverse de la quadratrice, a comme équation polaire $\rho = \frac{\sin \theta}{\theta}$, a ses tangentes en tous les points situés sur une même droite passant par O , qui concourent en un point symétrique du

sommet A (1,0). Cette propriété est due à Césaro 1878
https://fr.wikipedia.org/wiki/Ernesto_Cesàro.)

(b) Tout arc (J, g) de l'enveloppe (E) vérifie :

(b1) $\forall t \in J \exists \lambda \in I$ tel que $g(t) \in C_\lambda$ soit non singulier ou stationnaire de C_λ
 (ce qui écarte les points multiples ou de rebroussement)
 C_λ et (J, g) étant tangents en $g(t)$
 « L'enveloppe est tangente en chacun de ses points à un arc de la famille »

(b2) $\forall t \in J : t \mapsto \lambda$ continue "non localement constante" sur un intervalle ouvert non vide inclus dans J .

(b3) $\forall \lambda \in I$ Il existe un point isolé (dit de « concours local ») ou un arc (J, g) de E . toute courbe de la famille est tangente à un des arcs de E , ou contient un point de concours local.

Cette définition est évidemment lourde, mais :

• **Explication de la nécessité des précisions pour (b1)**

Le « quel que soit t » écarte le cas où les C_λ seraient toutes tangentes à (J, g) en un même point (voir figure) ; le « non singulier » est pour éviter les complications, la généralisation serait en effet délicate (voir l'examen de la réciproque), il faudrait prendre des précautions pour distinguer par le contact des diverses branches aboutissant à un point multiple,....et par passage à la limite celui des points de rebroussement.

• **Explication de la nécessité des précisions pour (b2)**

Le « non constant » évite la situation d'« écrasement » : cette propriété écarte le cas des courbes C_λ dites « stationnaires » (figure) que l'on rencontre par exemple dans la famille de cercles $(x - \cos \lambda)^2 + y^2 = a^2$; les deux cercles « extrêmes » obtenus pour $\lambda = 0$ et $\lambda = \pi$, Ne font pas partie de l'enveloppe. Si on imaginait avec la persistance rétinienne, une simulation du mouvement de cette famille de cercles (par exemple avec la commande animée, assez rapide en Maple), les cercles extrêmes resteraient « allumés ». (« Cette courbe C_λ tangente à l'enveloppe change continûment quand on se déplace sur l'enveloppe ») ; Remarque cette famille de cercles intervient dans le problème d'ENS ULM 1961 dans un problème très intéressant d'une part de localisation de valeurs propres d'une matrice tri diagonales (et non « tri continentale du « che ») la dernière question très intéressante (et difficile) porte sur une décomposition prémisses, préambule, préliminaire à la théorie des automates (voir corrigé RMS Janvier 1962. (faire un petit programme maple de visualisation de cette situation).

• **Explication de la nécessité des précisions pour (b3)**

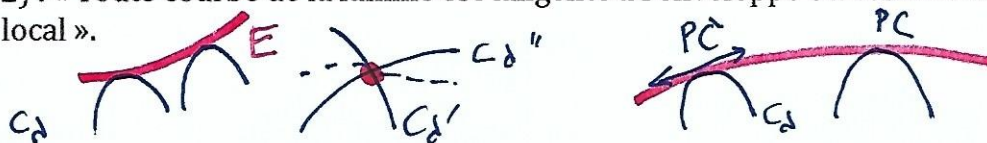
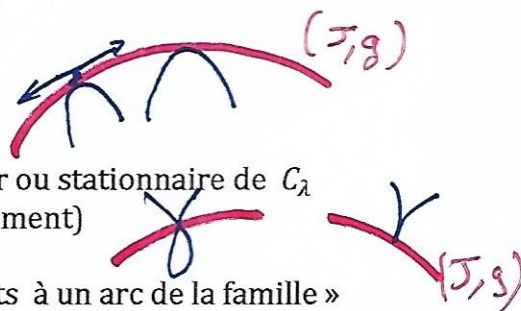
Elle est faite pour écarter les courbes C_λ « exotiques », qui d'ailleurs créeraient des situations (b2) . « Toute courbe de la famille est tangente à l'enveloppe ou contient un points de concours local ».

Définitions

On appelle **POINT CARACTÉRISTIQUE** (en abrégé **PC**) d'une courbe C_λ de la famille, tout point de contact de C_λ avec un des arcs (J, g) cités dans (b1).

L'**ENVELOPPE** de la famille des C_λ est donc la réunions de l'ensemble des PC et des points de concours local éventuels.

On appelle « équation adjointe » à $f(x, y, \lambda) = 0$ l'équation $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0$.



THÉORÈME direct : Tout point de l'enveloppe vérifie le système

(H) $(f(x, y, \lambda) = 0, \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0)$

- (a) Tout point de concours local (x_0, y_0) , vérifie le système (H) car pour tout $\lambda \in I, f^*(\lambda) - f(x_0, y_0, \lambda) = 0$ est constante, par conséquent en dérivant par rapport à λ , on obtient

$$\frac{\partial f^*}{\partial \lambda}(\lambda) = 0 = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda) = 0.$$



Exemple d'un faisceau linéaire (ex droites ou coniques) avec des notations évidentes.

$f(x, y, \lambda) = F(x, y) + \lambda G(x, y) = 0$; par exemple $ux + vy + h + \lambda(u'x + v'y + h') = 0$,

pour un faisceau de droites ; $x^2 + y^2 - 1 + 2\lambda x = 0$, pour un faisceau de cercles, ramené à un cercle et à l'axe radical Oy. On suppose que $F \cap G$ réduit à un nombre fini de points (1 pour un faisceau de droites non parallèles (dans ce cas leur point commun serait à l'infini, que l'on peut considérer comme point ordinaire en utilisant les coordonnées homogènes $x = \frac{x}{y}, \dots$), 4 en les comptant avec leur multiplicité éventuelle dans le cas de contact, pour un faisceau de coniques) ; (voir Oral 263 RMS juin 98 p 1136-1137 : si F et G sont polynomiaux premiers, il n'y a qu'un nombre fini de points d'intersection est démontré BEZOUT https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Bézout) ; Alors tout point de $F \cap G$, est un point de concours local.

- (b) Tout point caractéristique, vérifie le système (H).

Soit $M_{\lambda_0} = (x_0, y_0)$, un point caractéristique de C_{λ_0} ; supposons le sur un arc (J, g) de l'enveloppe, associé au paramètre $t_0 \in J : (x_0, y_0) = (g_1(t_0), g_2(t_0))$.

Raisonnons par l'absurde, si $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda) \neq 0$ avec $f(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$

D'après le théorème des fonctions implicites (dont toutes les hypothèses sont satisfaites : les rappeler), il existe un pavé ouvert $\lll p = I_1 \times I_2 \times I'$, contenant (x_0, y_0, λ_0) et inclus dans W, tel que pour tout $f(x, y, \lambda) = 0$ admette une solution et une seule en $\lambda, (x, y) \in I_1 \times I_2 \mapsto \lambda = \psi(x, y) \in I'$, qui soit en outre C_1 dans $I_1 \times I_2$.

Par continuité de g, il existe un sous intervalle J' inclus dans J, tel que pour tout $t \in J', (g_1(t), g_2(t)) \in I_1 \times I_2$. Alors $\lambda = h(t) = \psi(g_1(t), g_2(t))$ est par composition C_1 sur J' .

Encore pour tout $t \in J' : f(g_1(t), g_2(t), h(t)) = 0$ et par dérivation de fonction composée

$$\frac{\partial f}{\partial x}(g_1(t), g_2(t), h(t)) g'_1(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g_1(t), g_2(t), h(t)) g'_2(t) + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(g_1(t), g_2(t), h(t)) h'(t) = 0$$

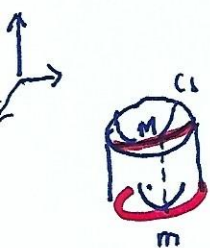
Comme $\frac{\partial f}{\partial x}(g_1(t), g_2(t), h(t)) g'_1(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g_1(t), g_2(t), h(t)) g'_2(t)$ qui traduit le produit scalaire du vecteur tangent en $M(t)$ à (J, g) avec le vecteur gradient de f, orthogonal en M à C_λ , est nul d'après (b1), il reste, puisque par continuité dans J'

$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(g_1(t), g_2(t), h(t)) h'(t) \neq 0$, donc $h'(t) = 0$, h serait constante dans J' , ce qui contredirait (b2).

Donc tout point caractéristique ou de concours local, vérifie le système (H).

Interprétation géométrique

Si on considère la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$, les courbes C_λ sont les projections sur xOy des sections de cette surface par les plans horizontaux $z = \lambda$. L'équation du plan tangent en un point quelconque est $(X - x)f'_x + (Y - y)f'_y + (Z - z)f'_z = 0$; Les points de la surface vérifiant le système H sont les points où le plan tangent est vertical (parallèle à Oz) : La courbe « H » apparaît comme la projection sur xOy du contour apparent de la surface parallèlement à Oz ; Selon les cas (figure) il fait ou ne fait pas partie de l'enveloppe.



§ 2 Examen de la réciproque

(1) D'après encore le théorème des fonctions implicites, si le jacobien $Jac = \frac{D(f, f'_\lambda)}{D(x, y)}$

est non nul en un point $(x_0, y_0, \lambda_0) \in W$, alors par continuité il est non nul dans un voisinage de ce point, inclus dans W , et alors il existe un sous intervalle $I' \subseteq I$ tel que le système (H), soit résoluble en (x, y) et il existe deux fonctions C^1 dans I' $\lambda \mapsto x(\lambda)$ et $\lambda \mapsto y(\lambda)$ telles que $(x(\lambda), y(\lambda), \lambda)$ vérifie (H) pour tout $\lambda \in I'$.

Pour tout $\lambda \in I'$ on a alors
$$\begin{cases} F(\lambda) = f(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0 \\ G(\lambda) = \frac{\partial f(x(\lambda), y(\lambda), \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

Cela implique que $0 = F'(\lambda) = x' f'_x(x, y, \lambda) + y' f'_y(x, y, \lambda) + f'_\lambda(x, y, \lambda)$ et en tenant compte de l'équation adjointe $f'_\lambda(x, y, \lambda) = 0$, il reste $x' f'_x(x, y, \lambda) + y' f'_y(x, y, \lambda) = 0$, soit $\text{gradient}(f)(x, y, \lambda) \cdot \frac{dOM}{d\lambda} = 0$. Comme $\text{gradient}(f)(x, y, \lambda) \neq 0$, comme c'est la première ligne de Jac, représente (par ses composantes covariantes, si le repère n'est pas orthonormé) un vecteur normal en M à C_λ .

■ Si M_0 , n'est pas singulier sur l'arc, par continuité de x' , y' , il existe un sous intervalle I'' , de I' où $(x', y') \neq 0$, et donne un vecteur tangent à l'arc $(I'', x(\lambda), y(\lambda))$, qui fait donc partie de l'enveloppe d'après l'orthogonalité traduite par $\text{gradient}(f)(x, y, \lambda) \cdot \frac{dOM}{d\lambda} = 0$.

■ Si M_0 est stationnaire sur l'arc, alors nous savons (cours) qu'il est isolé. Or (Ronéo Branches infinies page 3), la tangente en M_0 est la limite de la tangente (qui existe car « arc $C1$ ») en un point voisin. En se limitant aux vecteurs unitaires tangents T , la relation $\text{gradient}(f)(x, y, \lambda) \cdot T(\lambda) = 0$, valable pour $\lambda \in I'' - \{\lambda_0\}$, se prolonge par continuité en M_0 .
Donc tous les arcs donnés par le système (H) font localement partie de l'enveloppe.

(2) Il n'est plus du tout de me même, comme nous allons le voir si le jacobien

$Jac = \frac{D(f, f'_\lambda)}{D(x, y)}$ est nul ; On ne peut absolument rien dire dans le cas général.

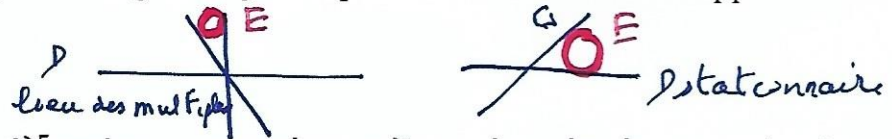
Nous analysons les différents cas les plus fréquent qui peuvent se présenter et nous les reportons dans un tableau. Avec figure en face du cas et commentaire après.

Cas où $J=0$; la première colonne du tableau est celle des hypothèses sur f .

$$\left[\begin{array}{ll} f'_x = f'_y = 0 & H \text{ contient le lieu des points multiples des } C_\lambda \\ C_{\lambda_0} \text{ stationnaire} & H \text{ contient la courbe stationnaire} \end{array} \right]$$


□ Le premier cas, correspond aux points singuliers (en général « points multiples » ; H contient le lieu des points multiples des C_λ , qui peut (voir figure, si un des arcs arrivant au point multiple est tangent à E), faire partie ou non de l'enveloppe.

Exemples :



✿ Les courbes $y^3 = (x - \lambda)^5$ ont pour enveloppe l'axe des abscisses, qui est en même temps lieu des points multiples.

✿ Les courbes $\lambda^2 y^3 \left(\frac{3}{5}\right)^5 \left(x + \frac{2}{3}\lambda\right)^5$ admettent comme enveloppe l'axe des x lieu de leurs points singuliers, sauf l'origine, et la droite $y=x$ sauf l'origine. La courbe de la famille passant par l'origine se réduit en effet à cinq fois l'axe Oy.

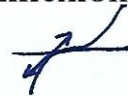


□ Le second cas, correspond aux courbes de la famille dites « stationnaires ». Une courbe C_{λ_0} est dite stationnaire si $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, y, \lambda_0) = 0$. Elles font partie de H mais pas en général de l'enveloppe.

Le jacobien J est bien nul le long d'une courbe stationnaire. En effet d'il ne l'était pas $f'_x(x, y, \lambda_0)$ et $f'_y(x, y, \lambda_0)$ qui constituent la première ligne de J ne sont pas simultanément nuls. Par exemple supposons que ce soit $f'_y(x, y, \lambda_0) \neq 0$, et d'après le théorème des fonctions implicites on pourrait résoudre localement en y, $f(x, y, \lambda_0) = 0$, ce qui donnerait dans un intervalle I, ouvert pour x et g de I vers $\mathbb{R}$ dérivable tels pour tout x de I : $f(x, g(x), \lambda_0) = 0$. En dérivant cette relation par rapport à x, ainsi que $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, y, \lambda_0) = 0$, on constate que les deux colonnes de J sont liées, donc il est nul (contrairement à l'hypothèse) : car $f'_x(x, g(x), \lambda_0) + g'(x)f'_y(x, g(x), \lambda_0) = 0$ et $f''_{\lambda x}(x, g(x), \lambda_0) + g'(x)f''_{\lambda y}(x, g(x), \lambda_0) = 0$.

♣ Considérons la famille des tangentes à la courbe $y=g(x)$: $g'(\lambda)(x - \lambda) + g(\lambda) - y = 0$.

En dérivant cette équation par rapport à λ , nous obtenons $g''(\lambda)(x - \lambda) = 0$. Outre la solution $x = \lambda$ qui donne le point caractéristique, nous trouvons des droites stationnaires : $g''(\lambda) = 0$, qui correspondent aux points d'inflexion éventuels de la courbe donnée et qui ne font pas partie de l'enveloppe.



Si l'on prend la famille de droites sous la forme d'Euler, enveloppe des droites D_t $x \cos t + y \sin t - p(t) = 0$, t étant le paramètre, cette anomalie ne s'aperçoit plus, mais c'est qu'en un point d'inflexion t présente en général, un extrémum et ne peut servir de paramètre pour représenter un voisinage de ce point.



◆ Si l'on considère le famille de cercles $(x - a \cos t)^2 + y^2 = a^2$, l'équation adjointe est $\sin t (x - a \cos t) = 0$. On trouve deux cercles stationnaires correspondant à $t = 0$ et $t = \pi$; ils ne font pas partie de l'enveloppe constituée par les deux segments horizontaux $y = \pm a, -a \leq x \leq a$. Si la famille de cercles était lumineuse (en néon ?) animée (par un animate suffisamment rapide, en Maple par exemple) la persistance rétinienne montrerait l'ensemble H « illuminé », constitué ici des deux segments horizontaux et des deux cercles stationnaires. (voir à ce sujet la référence ENS 1961 dans « Explication de la nécessité des précisions pour (b2) » ; cette zone intérieure localise les valeurs propres de la matrice tri diagonale évoquée dans ce problème.



♥ Considérons les paraboles $y = \lambda^2(x - \lambda)^2$; l'équation adjointe est $\lambda(x - \lambda)(x - 2\lambda) = 0$; L'enveloppe se compose de la courbe $y = \left(\frac{x}{2}\right)^4$ et de l'axe des x obtenu en prenant soit $\lambda = 0$, soit $x = \lambda$; ici la courbe stationnaire fait partie de l'enveloppe.

♠ Quelques exemples en vrac de cas où il y a des courbes stationnaires : $f(x, y, \lambda) = h(x, y)^4 + (\lambda - 1)^2 g(x, y)$; $f(x, y, \lambda) = (x^2 + y^2 + \lambda x)^2 + (\lambda - 1)^2(x^2 + y^2)$; $f(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - a^2(2 + \cos \lambda) = 0$, cercles concentriques dont deux sont stationnaires.

■ Il ne faut surtout pas croire qu'en un point de concours local, le jacobien soit nul en général :

Pour un faisceau de droites $x + \lambda y = 0$, $J = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Voici d'autres exemples en vrac où vous constaterez que le jacobien n'est pas toujours nul ; $(x^2 + 1) + \lambda y = 0$; $(x^3 + x) + \lambda y = 0$; $a(x, y) * g(\lambda)b(x, y) = 0$

Avec $a(x_0, y_0) = b(x_0, y_0) = 0$;

Exercices :

TP 19 Grand **MP1** (les initiés savoureront) page 3 trente exos variés

Quadrature 17 : Bel exo : **enveloppe de la droite joignant les extrémités de la grande et petite aiguilles d'une montre ou d'une horloge.**

Développées



Nous laissons au lecteur le soin de traiter les exemples de développées (enveloppe des normales) d'ellipse, hyperbole, parabole, de courbes cycloïdales, et $y = \ln(x)$ et faire le lien avec le lieu $\Leftrightarrow$ centres de courbure.

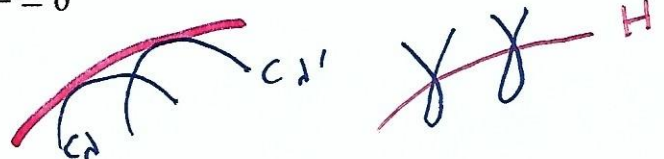
§3 Propriétés

■ **Théorème 1 : Si deux courbes C_λ « voisines » ont un point commun, un de leurs points commun tend vers un point de H.**

En effet le système de recherche des points communs à C_λ et à $C_{\lambda+\Delta\lambda}$ est

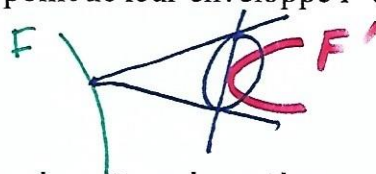
$$\begin{cases} (1) f(x, y, \lambda) = 0 \\ (2) f(x, y, \lambda + \Delta\lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) f(x, y, \lambda) = 0 \\ (3) \frac{f(x, y, \lambda + \Delta\lambda) - f(x, y, \lambda)}{\Delta\lambda} = 0 \end{cases} \text{ qui implique par continuité de } f'_\lambda \text{ et}$$

$$\text{prolongement } \begin{cases} (1) f(x, y, \lambda) = 0 \\ (4) \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} = (H)$$



Mais H pouvant contenir d'autres points que ceux de l'enveloppe, on peut trouver par exemple des lieux de points singuliers (qui peuvent – voir dessin – faire partie éventuellement de l'enveloppe) ; d'autre part, il ne faut pas croire que tout point caractéristique est obligatoirement limite de points d'intersection à deux courbes « voisines » : en effet deux courbes C_λ et C_μ même « voisines » ne se coupent pas nécessairement : par exemple les courbes définies par $y = (x - \lambda)^3$, ne se coupent pas (translatées parallèlement à Ox, de $y = x^3$ qui correspond à $\lambda = 0$) et ont pourtant l'axe des x comme enveloppe ; de même on sait que les cercles osculateurs à un arc, ne se coupent jamais (l'un est intérieur à l'autre), quand ils le sont en des points non séparés par un point stationnaire de la courbe associée, et ont pourtant l'arc paramétré comme enveloppe. Autre exemple $f(x, y, \lambda) = 3\lambda^2 x - y - 2\lambda^3 = 0$.

Application : transformation par polaires réciproques par rapport à une conique C. Soit F, une courbe du plan, on appelle transformée par polaire réciproque de F relativement à C, l'enveloppe F' des polaires des points de F par rapport à C. Une conique propre, n'ayant jamais de point singulier, deux droites associées polaires de M et M' se rencontrent en un point unique I, si elles ne sont pas parallèles, et ce point unique tend vers un point de leur enveloppe F' quand M' tend vers M.



■ Problème dit « des courbes C_λ »

Étant donné un point $M_0(x_0, y_0)$, du plan, les courbes C_λ qui contiennent M_0 sont celles dont le paramètre λ est solution de l'équation $f^*(\lambda) = f(x_0, y_0, \lambda) = 0$; Appelons V (comme Vide de solutions) l'ensemble des points M_0 du plan (ensemble éventuellement vide) où l'équation $f^*(\lambda) = 0$, n'a pas de solution. D son complémentaire, et D^2 le sous ensemble de D où $f^*(\lambda) = 0$ a des solutions multiples.

Soit $M_0 \in D$, il y a au moins une valeur λ_0 de λ , telle que $f(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$. Appliquons alors la formule de Taylor, à $f^*(\lambda)$, en λ_0 en supposant que $f(x, y, \lambda)$ est dérivable dans un voisinage ouvert de λ_0 , au moins jusqu'à l'ordre 2 :

$f(x_0, y_0, \lambda) = 0 + (\lambda - \lambda_0) \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda_0) + \frac{1}{2}(\lambda - \lambda_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2}(x_0, y_0, \lambda_0) + \theta \times (\lambda - \lambda_0)^2$ avec θ existant dans $]0, 1[$.

Alors l'ensemble de points où le problème ci dessus évoqué, a au moins une solution double, est constitué par les points qui vérifient $f(x, y, \lambda) = 0, \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0$, c'est l'ensemble H.

■ Théorème 2 : H est aussi l'ensemble des points du plan, pour lesquels le problème dit « des courbes C_λ » a au moins une solution double.

Donnons plusieurs exemples (au besoin rapidement rappeler pourquoi la condition de racine double s'exprime selon la colonne de droite).

Exemples d'ensemble H immédiats

Hypothèse sur f	Conclusion sur H
$A(x, y)\lambda^2 + B(x, y)\lambda + C(x, y)$	$B^2 - 4AC = 0$
$A(x, y)\lambda^3 + B(x, y)\lambda + C(x, y)$	$4B^3 + 27C^2A = 0$
$A(x, y) \cos \lambda + B(x, y) \sin \lambda = C(x, y)$	$A^2 + B^2 = C^2$
$A(c, y) \cosh \lambda + B(x, y) \sinh \lambda = C(x, y)$	$A^2 - B^2 = C^2$
$x^2 + y^2 - 2(p + \lambda)x = \lambda^2$	$-y^2 + 2px = 0$ cercles bi tangents à la parabole
$g(\rho, \theta, \lambda) = 0$ C_λ en « polaires »	$g(\rho, \theta, \lambda) = 0 \cap \frac{\partial g}{\partial \lambda}(\rho, \theta, \lambda) = 0$

Pour la dernière ligne, la condition de racine double exprimée plus haut est en fait indépendante du système de coordonnées choisies pour représenter C_λ , que ce soit les coordonnées cartésiennes ou polaires ou autres !

■ Théorème 3 : L'ensemble H pour une famille de courbes à deux paramètres λ et μ : $f(x, y, \lambda, \mu) = 0$ liés par une relation $g(\lambda, \mu) = 0$, est caractérisé par

$f(x, y, \lambda, \mu) = 0$	$g(\lambda, \mu) = 0$	$J = \frac{D(f, g)}{D(\lambda, \mu)} = 0$ (jacobien)
-----------------------------	-----------------------	--

f et g sont supposés dérivables dans des ouverts de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement. En effet si le jacobien J était non nul, sa seconde ligne étant non nulle, au moins un des deux $\frac{\partial g}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial g}{\partial \mu}$ serait non nul localement. Par exemple le second ; d'après le théorème des fonctions implicites, on pourrait résoudre $g(\lambda, \mu) = 0$ localement sous la forme $\mu = s(\lambda)$ avec s localement dérivable.

On serait ramené à une famille à un seul paramètre explicite : $f^*(x, y, \lambda) = f(x, y, \lambda, s(\lambda)) = 0$; et de plus $g^*(\lambda) = g(\lambda, s(\lambda)) = 0$; d'après le théorème des fonctions composées, f^* et g^* , étant constantes en λ , on aurait $f^{*'} = \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial \mu} s'(\lambda) = 0$ et $g^{*'} = \frac{\partial g}{\partial \lambda} + \frac{\partial g}{\partial \mu} s'(\lambda) = 0$; J serait nul, contrairement aux hypothèses, ayant ses deux colonnes liées.

Remarquons qu'en développant le jacobien, dans le cas de deux paramètres, l'ensemble H peut s'écrire $\emptyset$:

$f(x, y, \lambda, \mu) = 0$	$g(\lambda, \mu) = 0$	$\frac{f'_\lambda}{g'_\lambda} = \frac{f'_\mu}{g'_\mu}$
-----------------------------	-----------------------	---

Exercice : Enveloppe de $\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\mu} - 1 = 0$ avec $\lambda^3 + \mu^3 = 0$

Exercice : (Lespinard II 345 et III 524-526, Dollon (Vuibert) Agreg 1952 320-325, Sèvres circa 1950) enveloppe des cotés d'un triangle équilatéral inscrit dans une ellipse.

Remarque 1 : **cas du paramètre dénombrable (Flory)** Si le paramètre est dénombrable λ_k , comme par exemple les tangentes à $\rho = \frac{\sin \theta}{\theta}$ aux points d'angle polaire $\theta = \theta_0 + k\pi$, remplacer λ_k par λ continu ou rechercher les points de concours locaux par la théorie des faisceaux.

Remarque 2 : Jean Favard, (cité dans la Bib, p 175) remarque qu'exceptionnellement une famille de courbes à plusieurs paramètres peut avoir une enveloppe ; c'est par exemple, le cas pour les cercles tangents à une courbe donnée (deux paramètres) ; Je remarque que cette contrainte justement cache une relation implicite et cachée et non connue entre les deux paramètres, ..)

Applications aux équations tangentielles

Il s'agit en fait de trouver l'enveloppe de la droite $ux+vy+w=0$, avec $(u, v, w) \neq (0,0,0)$ étant reliés par la relation homogène $F(u,v,w)=0$, où F est C^1 dans un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Φ

Soit $\frac{x}{F'_u} = \frac{y}{F'_v} = \frac{1}{F'_w}$

Ces relations permettent avec $F(u,v,w)$, en éliminant u,v,w d'obtenir une équation de H sous la forme $\Phi(x, y) = 0$

Exemple : rechercher la courbe d'équation tangentielle $\sqrt{u} + \sqrt{v} = \sqrt{w}$; le système encadré donne $\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{u}}} = \frac{y}{\frac{1}{\sqrt{v}}} = -\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{w}}}$ soit $x = -\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{u}}, y = -\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{v}}$ et le report dans $F(u,v,w)=0$ donne $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -1$ soit $\boxed{xy + x + y = 0}$; H est une hyperbole équilatère $(x+1)(y+1)=1$ (si le repère est orthonormé).

On peut aussi traiter les équations tangentielles de coniques, de quadriques propres (de matrices A) : c'est une forme quadratique de matrice A^{-1} .

On peut aussi traiter de l'équation tangentielle de l'hypocycloïde à trois rebroussements H3 (Cagnac II p 408, Râmis IV p 185) ; elle est de la forme $w(u^2 + v^2) - \Phi_3(u, v) = 0$ où Φ_3 est un polynôme homogène de degré 3 à deux variables ; on la rencontre en outre comme enveloppe des droites de Simson d'un triangle https://fr.wikipedia.org/wiki/Droite_de_Simson et sous forme allongée dans le retournement de la sphère à propos de la surface Romaine <https://www.mathcurve.com/surfaces/romaine/romaine.shtml> https://fr.wikipedia.org/wiki/Surface_romaine.

François Apéry Models of the Real Projective Plane (Vieweg 1987) p 77 ; (Julien Lemaire <https://www.idref.fr/032665148> 1864-1937 Hypocycloïdes et Épicycloïdes page 82 Albert Blanchard 1967 PS Lemoyne se prénomme Timoléon).

■ **Théorème 4 : Enveloppe d'une famille de courbes C_λ définie par une représentation paramétrique $\begin{cases} x = x(u, \lambda) \\ y = y(u, \lambda) \end{cases}$. Les deux fonctions étant de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Les points de H vérifient en outre $\boxed{\frac{D(x,y)}{D(u,\lambda)} = 0}$.**

En effet, si ce jacobien étiit non nul en un point $P_0(u_0, \lambda_0)$ de l'enveloppe de la famille d'arcs paramétrés, par continuité il serait également non nul dans un voisinage ouvert de ce point : d'après le théorème des fonctions implicites, on pourrait

résoudre le système $\begin{cases} x(u, \lambda) = g_1(t) \\ y(u, \lambda) = g_2(t) \end{cases}$ où $Om = g(t)$ est une représentation d'un arc

paramétré de l'enveloppe. Il existe deux applications $\begin{cases} t \mapsto u(t) \\ t \mapsto \lambda(t) \end{cases}$ dérivables dans un intervalle ouvert J contenant t_0 tel que $u_0 = u(t_0), \lambda_0 = \lambda(t_0)$.

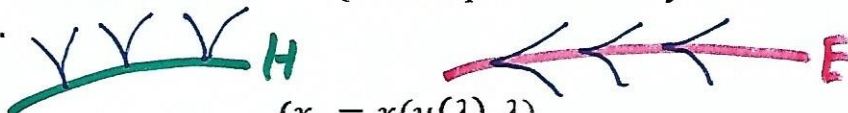
Comme $g(t) = OP(u(t), \lambda(t))$, $g'(t) = \frac{\partial OP}{\partial u} u' + \frac{\partial OP}{\partial \lambda} \lambda'$, pour que l'arc paramétré de E (J,g) soit tangent en P_0 , à la courbe C_{λ_0} , il faut et il suffit dans le cas où P_0 est non singulier sur C_{λ_0} que les deux vecteurs $g'(t_0)$ et $\frac{\partial OP}{\partial u}(u_0, \lambda_0)$ soient colinéaires : or d'après la propriété (b2) (propriété des arcs paramétrés de l'enveloppe) λ' est non nul dans $J' - \{t_0\} \subset J' \subseteq J$ (en supposant que $t \mapsto \lambda(t)$ a ses zéros isolés dans J), alors $0 = \det\left(g'(t), \frac{\partial OP}{\partial u}\right) = \det\left(\frac{\partial OP}{\partial u} u' + \frac{\partial OP}{\partial \lambda} \lambda', \frac{\partial OP}{\partial u}\right) = \lambda' \det\left(\frac{\partial OP}{\partial \lambda}, \frac{\partial OP}{\partial u}\right) = \lambda' \frac{D(x,y)}{D(u,\lambda)}$

Ce qui implique $\frac{D(x,y)}{D(u,\lambda)} = 0$ dans l'intervalle J' . D'ailleurs comme λ' , n'est pas nulle sur tout J , par continuité $\frac{D(x,y)}{D(u,\lambda)}(u(t), \lambda(t))$ est nul en t_0 , même si t_0 est un zéro isolé de λ' .

L'ensemble E est donc inclus dans l'ensemble $H1$ des points tels que

$$x = x(u, \lambda), y = y(u, \lambda) \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_\lambda & y'_\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Mais ce dernier ensemble peut contenir (cas où $\frac{\partial OP}{\partial u}$ est nul) es lieux de points singuliers de C_λ , et il n'y a pas nécessairement contact (mais il peut aussi il y avoir contact, voir les figures ci contre).



Remarquons qu'en un point de concours local M_0 $\begin{cases} x_a = x(u(\lambda), \lambda) \\ y_a = y(u(\lambda), \lambda) \end{cases}$ pour tout $\lambda \in I' \subseteq I$, le jacobien est nul, puisque c'est un cas particulier du précédent avec $g(t) = \text{Constante} = M_0$.

□ Exemples : rechercher l'enveloppe des familles d'arcs paramétrés

suivants : (1) $\begin{cases} x = a \frac{\cos u}{1+\lambda} \\ y = a \frac{\sin u}{1+\lambda} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = u^2 + \lambda^2 \\ y = u^3 + \lambda^3 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x = \cos u + \lambda \cos(2u) \\ y = \sin u + \lambda \sin(2u) \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x = a \cos \lambda \cos^3 u \\ y = a \sin \lambda \sin^3 u \end{cases}$



§4 Enveloppe d'une famille de cercles

(BIB : ens 1960 Valeurs propres, Math d'ailleurs « la chèvre »)

Soit $x^2 + y^2 - 2a(\lambda)x - 2b(\lambda)y + c(\lambda) = 0$, une famille de cercles avec les applications a, b, c de classe C^1 sur I .

On appelle **déférente** le lieu des centres $C(\lambda) = (a(\lambda), b(\lambda))$ des cercles de la famille. La déférente a pour représentation paramétrique $x = a(\lambda), y = b(\lambda)$.

(DA)

(1) La courbe adjointe est une droite $-2a'(\lambda)x - 2b'(\lambda)y + c'(\lambda) = 0$, elle n'est une vraie droite que si $(a'(\lambda), b'(\lambda)) \neq (0,0)$, c'est à dire si $(a(\lambda), b(\lambda))$ est un point non stationnaire de la déférente.

Alors, son vecteur normal étant (a', b') elle est orthogonale à la tangente Δ_λ au point $C(\lambda)$ de paramètre λ de la déférente.



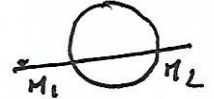
(2) Géométriquement cette propriété peut se retrouver rapidement ; les points caractéristiques des C_λ sont limites de points communs à deux cercles C_λ et $C_{\lambda+\Delta\lambda}$ « voisins » quand $\Delta\lambda$ tend vers zéro. Or ces points communs sont sur l'axe radical aux deux cercles, qui tend vers une normale à la tangente en $C(\lambda)$, à la déférente, puisque l'axe radical est perpendiculaire à la droite des centres : attention les points commun peuvent ne pas être réels (voir le théorème 1 des propriétés de E).

(3) Enveloppe d'une famille de cercles contenant un point donné O : ce point est point de concours local : l'autre point caractéristique $M(\lambda)$ est sur la normale menée de O à la tangente en $C(\lambda)$ à la



déférente. L'enveloppe est donc constituée par le point de concours local O, et de l'homothétique dans l'homothétie de centre O et de rapport 2 de la podaire de la déférente par rapport au point O (podaire par rapport à O d'une courbe F= lieu des projections orthogonales de O sur les tangentes à F).

(4) Enveloppe d'une famille de cercles ayant une puissance constante par rapport à O soit $c(\lambda) = \text{constante}$. La droite adjointe qui a pour équation $a'x + b'y = 0$, passe par O. $OM_1 \cdot OM_2 = c(\lambda) = \text{constante}$: l'enveloppe est anallagmatique, c'est à dire invariante globalement dans l'inversion de centre O et de puissance $c(\lambda) = \text{constante}$. Rappelons que l'inversion de centre O se caractérise en complexes par la relation $z' = \frac{k}{\bar{z}}$ (k sur z barre)



(5) Enveloppe des cercles osculateurs d'un arc de classe C^2 ; comme M le point courant est déjà caractéristique, la Droite Adjointe (DA) est la perpendiculaire en M_λ à la droite $M_\lambda C(\lambda)$, tangente en $C(\lambda)$ à la déférente qui est la développée de la courbe F lieu de M_λ .



(6) (Bouligand p174, Rivaud 3 p 147, Râmis IV 192) À quelle condition, une famille de cercles $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, où a,b,c,R sont des fonctions de classe C^1 d'une variable t, est-elle la famille des cercles osculateurs à un arc ? : ne se coupent pas, leur axe radical leur est extérieur, et porte les points imaginaires de l'intersection ; à la limite quand t' tend vers t, ces points tendent vers les points caractéristiques et doivent devenir réels ; l'axe radical devient tangent (car il ne peut être sécant). Les points caractéristiques sont confondus, or ils vérifient l'équation adjointe : $(x - a)a' + (y - b)b' = RR'$, droite adjointe qui doit être tangente au cercle : d'où la condition $R'^2 = a'^2 + b'^2$

(exprimant que la distance du centre du cercle à la droite adjointe est égale à R).

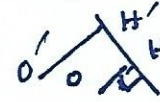
Le diamètre perpendiculaire à cette tangente est $\frac{x-a}{a'} = \frac{y-b}{b'}$ et représente justement l'équation de la tangente en (a,b) à la déférente, lieu des centres. Le diamètre est normal à l'enveloppe de la famille de cercles et le centre de ce cercle est bien centre de courbure de l'enveloppe. Exemple $(x - \cos t)^2 + (y - \sin t)^2 = t^2$, la condition encadrée est réalisée ; ces cercles enveloppent donc une développante de cercles, lieu de leurs centres, c'est à dire une développante du cercle trigonométrique.

§5 Enveloppe d'une famille de droites dont l'équation est mise sous la forme d'EULER :

Rappelons que la courbe (C) est connue par l'équation de ses tangentes D_t mise sous la forme $x \cos t + y \sin t - p(t) = 0$ où p est une fonction de classe C^k sur un intervalle In k étant 1 ou 2 si nécessaire. On rappelle aussi que si $z = x + iy$, $x \cos t + y \sin t = \text{Re}(ze^{-it})$. t représente l'angle polaire d'un vecteur unitaire porté par OH, H étant la projection orthogonale de O sur la droite D_t , $p(t) = \overrightarrow{OH} \cdot \vec{u}$ représente alors la mesure du vecteur $\overrightarrow{OH}$ orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}$. On remarque aussi que $\rho = p(\theta)$ est l'équation polaire de la podaire (lieu de H) de la courbe © par rapport au point O.

Nous rappelons aussi (voir le cours sur « droites et plans ») que si l'on effectue une rotation d'angle α (de centre O bien sûr) sur l'axe polaire, la nouvelle équation d'EULER de D_t est $x \cos(t - \alpha) + y \sin(t - \alpha) - p(t) = 0$; si c'est une rotation

d'angle α de la droite que l'on effectue, la droite transformée a pour équation $x \cos(t + \alpha) + y \sin(t + \alpha) - p(t) = 0$.



Quand on change l'origine O et O' : $\overrightarrow{OO'}$ ayant pour anciennes composantes (a,b), comme $\overrightarrow{O'H'} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HH'}$, en multipliant scalairement par $\vec{u}$ on a : $\overrightarrow{O'H'} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{O'O} \cdot \vec{u} + \overrightarrow{OH} \cdot \vec{u} + \overrightarrow{HH'} \cdot \vec{u} = -a \cos t - b \sin t + p(t) + 0$ et l'équation de D_t dans le repère translaté d'origine O' est $x \cos t + y \sin t - (p(t) - a \cos t - b \sin t) = 0$.

Si cette fois on fait une translation de la droite, dans la direction du vecteur $\vec{V} = (a, b)$ alors $\overrightarrow{OH'} = \overrightarrow{OH} + \vec{V}$ donc $p(t)$ est remplacé par $p(t) + \vec{V} \cdot \vec{u} = p(t) + a \cos t + b \sin t$.

Coordonnées du point caractéristique : Intersection de D_t et de la droite adjointe D'_t , d'équation $-x \sin t + y \cos t - p'(t) = 0$ ou

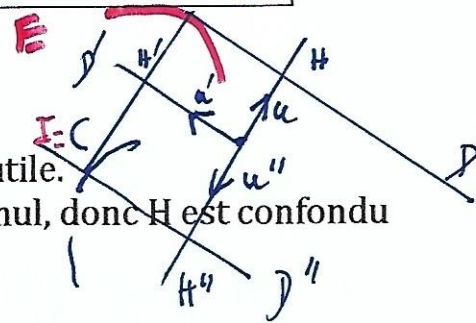
$$x \cos(t + \frac{\pi}{2}) + y \sin(t + \frac{\pi}{2}) - p'(t) = 0 \text{ (donc directement perpendiculaires)}$$

elles vérifient le système $\begin{cases} x \cos t + y \sin t = p(t) \\ -x \sin t + y \cos t = p'(t) \end{cases}$, système cramérien puisque de déterminant 1, et les formules de Cramer donnent

$$x = \begin{vmatrix} p & \sin t \\ p' & \cos t \end{vmatrix} = p \cos t - p' \sin t \quad y = \begin{vmatrix} \cos t & p \\ -\sin t & p' \end{vmatrix} = p \sin t + p' \cos t$$

On constate en outre que $\boxed{z = x + iy = (p + ip')e^{it}}$

On remarque aussi que $OM^2 = p^2 + p'^2$, ce qui peut être utile. (le Jacobien de la théorie de la réciproque est 1, donc non nul, donc H est confondu avec l'enveloppe).



Rayon de courbure en M à C :

D'_t est la normale en M à C, donc la développée de E est l'enveloppe de D'_t ; le centre de courbure I en M à E est donc le point caractéristique de D'_t c'est à dire $D'_t \cap D_t''$; il suffit de remplacer dans les formules qui donnent les coordonnées de M t par $t + \frac{\pi}{2}$ et p par p' pour avoir celles de I. Par exemple $z_I = (p' + ip)ie^{it} = (-p'' + ip')e^{it} = (-p' \sin t - p \cos t) + i(p' \cos t - p'' \sin t)$.

Orientons E au moyen du vecteur tangent u' , et la développée au moyen de $u'' = (-\cos t, -\sin t)$.

Alors le rayon de courbure algébrique R, en M à E vaut $R = \overrightarrow{MI}_{u''} = \overrightarrow{HH''}_{u''} = \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OH''}_{u''} = -\overrightarrow{OH}_{u''} + \overrightarrow{OH}_{u''} =_{car u'' = -u} p(t) + p''(t)$. Puisque rappelons le

$$p(t) = \overrightarrow{OH}_u \text{ et } p''(t) = \overrightarrow{OH''}_{u''} ; \text{ Ainsi } \boxed{R = p + p''}$$

□ On a des remarques qui peuvent être utiles : $OI^2 = p'^2 + p''^2$;

$$R = \frac{ds}{d(t+\frac{\pi}{2})} = p + p'' \text{ donc } ds = (p + p'')dt ;$$

Comme la développée de E est l'enveloppe de D', toute développante de E est l'enveloppe de $\int D$ d'équation $x \sin t + y \cos t - \int p(t)dt = 0$;

Les trajectoires orthogonales des droites D_t , toute développante de E est l'enveloppe de $\int D$, donc développante de l'enveloppe des D_t . Ceci peut servir (exercice Râmis Géométrie p 169, Rivaud III p 153, Tétrél, Bréal 05) pour trouver l'équation intrinsèque de développantes de développantes de cercles.

On peut finir en cherchant les enveloppes de droites dans l'espace (par exemple l'axe polaire d'une courbe gauche, le lien avec les développables) ; le lien avec le théorème de Malus, les caustiques et la théorie de la réfraction et le lien avec le calcul des variations. On peut faire des incursions dans le domaine des enveloppes de plans et de surfaces dépendant d'un paramètre.

BIBLIOGRAPHIE et SITOGRAPHIE commentées

- VLADIMIR ARNOLD
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Vladimir_Arnold
- Il a par exemple été le premier à calculer les groupes de cohomologie du groupe de tresses, mais surtout, il a élaboré une théorie des singularités d'applications legendriennes et lagrangiennes qui

généralise celle des **enveloppes** en géométrie élémentaire.

On trouve les définitions de ces immersions lagrangienne et legendrienne respectivement en haut des pages 20 et 21 de la thèse « Un cas particulier de la conjecture de Weinstein en grande dimension » soutenue le 11 juillet 2017 (de 110 pages)

De Guillaume ROUX

https://drive.google.com/file/d/1JISpwVRBfeV9s2ideGZcHoOxAIQ5F9_L/view

De Marc Serrero

évidemment, ce n'est pas "précis" ; mais

si tu regardes dans les travaux d'Arnold, tant en mécanique (méthodes mathématiques de la mécanique classique) qu'en théorie des catastrophes (chez Birkhauser), tu trouves ce qu'il veut dire :

Legendre, ça fait "référence à" la transformée legendre-fenchel qu'il utilise souvent ;

Lagrange, ça fait référence à la géom-symplectique, c'est à dire au fond, au calcul-variationnel, et passage eq-Lagrange vers eq-Hamilton, via précisément une transformation de Legendre

De Maxime Bourrigan

« Lagrangienne » et « legendrienne » sont des termes de géométrie symplectique et de contact.

Une variété symplectique est un couple (M, ω) , où ω est une 2-forme différentielle fermée non dégénérée (ce qui implique que M est de dimension paire). Il y a deux exemples prototypiques : le fibré cotangent d'une variété (le plus important ici) muni de la différentielle de la forme de Liouville et les sous-variétés algébriques lisses de l'espace projectif complexe.

Une sous-variété $L \subseteq M$ est alors isotrope si $\omega(v, w) = 0$, quels que soient les vecteurs v, w tangents à L en un même point. Elle est lagrangienne si elle est isotrope et de dimension maximale (c'est à dire $\dim M/2$).

La géométrie de contact est un genre de cousine en dimension impaire de la géométrie symplectique : c'est un peu plus subtil à définir : une forme de contact sur une variété de dimension $2n+1$ est une 1-forme différentielle α telle que la forme $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ soit partout non nulle. La subtilité est que ce qui intéresse les contacticiens n'est pas tellement la forme de contact elle-même, mais plutôt le champ d'hyperplans $\ker(\alpha)$.

Une sous-variété legendrienne est une sous-variété L de dimension n dont l'espace tangent est, en tout point, inclus dans le champ d'hyperplans de contact (à cause de la condition sur $\alpha \wedge (d\alpha)^n$, c'est la dimension maximale pour que ce soit possible). Un exemple prototypique consiste à partir du fibré cotangent d'une variété, et à se restreindre à l'hypersurface des vecteurs de norme 1, avec la forme de Liouville.

Pour ce que j'en comprends, la question la plus basique dans ce contexte pour la théorie des singularités lagrangiennes, et qui généralise la question des caustiques, est celle de comprendre les singularités de la projection $L \rightarrow M$, où $L \subseteq T^*M$ est une sous-variété lagrangienne du cotangent de M . Arnol'd a donné une liste des singularités qui peuvent apparaître génériquement. Il en parle brièvement dans l'appendice 12 des méthodes mathématiques pour la mécanique classique.

Au-delà de la question de la projection de sous-variétés lagrangiennes ou legendriennes, il n'est sans doute pas exagéré de dire qu'Arnol'd a complètement lancé le champ de la topologie symplectique, c'est à dire de l'étude topologique des variétés symplectiques, de leurs sous-variétés lagrangiennes, de leurs champs de vecteurs hamiltoniens, qui reste un sujet très actuel (et assez effrayant pour le profane...).

Les références standard sont à ma connaissance "Introduction to symplectic topology", de Dusa McDuff et Dietmar Salamon pour la géométrie symplectique et "An introduction to contact topology" de

Hansjörg Geiges pour la géométrie de contact. Leur lecture demande quand même une certaine habitude de la géométrie différentielle, donc elle n'est pas vraiment niveau spé.

Il doit être possible de trouver des introductions plus brèves aux questions intéressantes (on trouve

<http://irma.math.unistra.fr/~maudin/Arnold.pdf> (p 12, note p 12, p 10 et 18) du côté de Michèle Audin,
il doit y avoir d'autres textes accessibles).

http://www.numdam.org/article/SB_1984-1985__27__19_0.pdf p 21 et sqq
(caustique « mystique »)

<http://www.mat.ucm.es/serv/revmat/vol8-1/vol8-1f.pdf> (Arnold)

https://fr.wikipedia.org/wiki/Classes_de_Thom-Boardman (Caustiques)

https://fr.wikipedia.org/wiki/Classes_de_Thom-Boardman (p 125 et figure 3 p 127)

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Géométrie de contact](https://fr.wikipedia.org/wiki/Géométrie_de_contact)

A partir de la page 124 de https://www.editions.polytechnique.fr/files/pdf/EXT_1507_7.pdf

-
- **Le relais technologique de François Meyer (Philosophe Doyen de la faculté d'Aix 1912-2004)** https://data.bnf.fr/fr/12110069/francois_meyer/

<http://lejardindepierre.free.fr/wordpress/index.php/2014/11/12/sur-francois-meyer/>

Page 121 graphique 5 de https://www.persee.fr/doc/comm_0588-8018_1985_num_41_1_1611

Jean Pierre Petit les enfants du Diable (Albin Michel 1995) page 31 (graphique avec la courbe enveloppe) et p 29-32.

https://books.google.fr/books?id=FsJYDwAAQBAJ&pg=PT39&lpg=PT39&dq=RElais+technologique+meyer&source=bl&ots=0d1-wsHu1Z&sig=ACfU3U3nO5A3nNLmIkYHaZnhHkmwUdLK6g&hl=fr&sa=X&ved=2ahUKEwi44_vQvpHmAhVnAGMBHbJ0B5wQ6AEwBHoECAgQAQ#v=onepage&q=RElais%20technologique%20meyer&f=false

La courbe « enveloppe » illustre le passage d'une technologie balbutiante, puis plafonnement et relais par une autre (temps-performance)

Nous sommes actuellement, 2019 dans le cas de technologies de l'information : la poste avec ses délais et syndicats se fait doubler par internet et ses mails, le journalisme aux ordres, politiquement correct, pour ne pas perdre ses subventions, se fait doubler par internet.

BIBLIOGRAPHIE ENVELOPPES

- **CAGNAC, RÂMIS, COMMEAU** : traité de mathématiques spéciales tome 4 (Masson 1971) p 143-196.

- **FAVARD Jean Aimé** : cours de géométrie différentielle locale (Gauthier Villars 1957) p 168-178. https://fr.wikipedia.org/wiki/Jean_Favard
<https://www.e-periodica.ch/cntmng?pid=ens-001:1965:11::51> Par Marc Zamansky enseignement mathématique tome XI fascicule 2-3 Mars-Septembre 1965 p 101-103 avec une photo pleine page ; lire aussi <http://peccatte.karefil.com/PhiMathsTextes/AperyFR.htm> et <http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?11,1011003>
 - **MARTIN Pierre** : Application de l'algèbre et de l'analyse à la géométrie Collection U (Armand Colin 1967) p 387-415.
 - **RÂMIS, ODOUX**, Deschamps : Cours de mathématiques spéciale tome 5 application de l'analyse à la géométrie (Masson 1981) ISBN 2-225-69322-6 p 73-79 65-86.
 - **GRASSMANIENNE** (pour enveloppe de droites) voir Agreg 1974 et **BERGER**
-