VIDIANI

Intégral pseudo elliptique de Green Hill

on doit donc avoir.

(on vérifiera lors a) $s - \psi' = \dfrac{-u'}{2(1-u^2)\sqrt{g(u)}} \left[u^2 u_0 - 2u + u_0\right]$ $s =$

or $u' = \sqrt{c}\, K \sqrt{g(u)}$ donc

$$s - \psi' = -\frac{\sqrt{c}\, K}{2(1-u^2)} \left[u^2 u_0 - 2u + u_0\right]$$

$$\frac{K u_0}{2} - \psi' = -\frac{K}{2} \left[u^2 u_0 - 2u + u_0\right]$$ il faut donc prendre

comme argument de l'exponentielle $\varepsilon\sqrt{c}\left(\frac{K t u_0}{2} - \psi\right)$ si

$$u' = \varepsilon\sqrt{c}\, K \sqrt{g(u)}$$

donc quelque soit t on a la relation en termes finis.

$$\boxed{\sqrt{1-u^2} \cdot e^{\varepsilon\sqrt{c}\left(\frac{K t u_0}{2} - \psi\right) i} = \sqrt{1-u u_0} - i\sqrt{u\,(\ldots}}$$

Soit en égalant parties réelles et parties imaginaires des deux m[embres de]

cette relation on a $u = \cos\theta$

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin\theta \cos \varepsilon\sqrt{c}\left(\frac{K u_0}{2} t - \psi\right) = \sqrt{1-\ldots} \\ &\cos\theta \sin \varepsilon\sqrt{c}\left(\frac{K u_0}{2} t - \psi\right) = -\sqrt{\ldots} \end{aligned}}$$

$\alpha = \varepsilon\sqrt{c}\left(\frac{K u_0 t}{2} - \psi\right)$

qui fournit θ par l'intermédiaire de ψ ; on vérifie que $\cos^2\alpha + \ldots$

on a en tirant ψ à l'aide de la relation $\operatorname{tg}\sqrt{c}\left(\psi - \frac{K u_0 t}{2}\right) \ldots$

$$\boxed{\psi = \frac{K u_0 t}{2} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{u(u_0-u)}{(1-u_0 u)c}}}$$

on a alors la relation entre θ et t

$$\boxed{\sin\theta \cos\sqrt{c}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\cos\theta\,(u_0-\cos\theta)}{(1-u_0\cos\theta)c}}\right) = \sqrt{1-u_0\cos\theta}}$$

(relation qui se réduit à une identité en calculant $\cos \operatorname{Arctg} \ldots$

VIDIANI L.G

quatrième ~~feuille~~ feuille.

cf fiche ; livre d'Appel Meca

Intégrale Pseudo elliptique de green Hill

(cf TD 28)

(obtenue en Mécanique à propos du mouvement d'1 corps Pesant)

N

$$u'^2 = k^2 c\, u(u_0 - u)(1 - u_0 u)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{du}{\sqrt{u(u_0-u)(1-u_0u)}} = \varepsilon k \sqrt{c}\, dt \\ \text{Posons } \dfrac{d\psi}{dt} = \dfrac{k(u_0-u)}{1-u^2} \end{array} \right.$$

$$\int \varepsilon k \sqrt{c}\, dt = \int \frac{du}{\sqrt{u(u_0-u)(1-u_0u)}} = I$$

Tome 2

Page

L'intégrale I permettant de tirer $u(t)$ est apparemment ellipt[ique] $g(u) = u(u_0-u)(1-u_0u)$ est du troisième degré en u. Nous allons voir qu'une racine de $g(u)$ soit nulle et que les deux autres soient [...] l'intégrale en question pseudo elliptique : (en green Hill) il e[xiste] une relation finie entre u et t. Conventions : prenons l'origine pour $u = u_0$ et $\psi = 0$ avec $t = 0$ (ce qui a bien lieu dans le [...] établi. Il est essentiel de comprendre ici qu'il est très diffi[cile d'inté]grer I par une méthode élémentaire (voire impossible) en effe[t ...] garde quand même une certaine généralité (car il est toujours [possible de] rendre nulle une des racines du polynome du troisième degré pa[r une] transformation qui centre la variable .. Il faut donc trouve[r de] manière intuitive une relation liant par exemple ψ, θ, t et u [qui] est exacte :

on a $\dfrac{d\psi}{dt} = \dfrac{k(u_0-u)}{1-u^2}$ $\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2 = k^2 c(u_0-u)(1-u_0u)u$ donc

donc $(du)^2 = \dfrac{(d\psi)^2(1-u^2)^2(u_0-u)(1-u_0u)u k^2 c}{k^2(u_0-u)^2}$ $\left(\dfrac{du}{d\psi}\right)^2 = \dfrac{c(1-}{(u_0-}$

vérifions (d'après green-Hill dans Appel page 215 tome 2)

$$\sqrt{1-u^2}\, e^{(st-\psi)i} = \sqrt{1-uu_0} - i\sqrt{u(u_0-u)} \qquad s = \ldots$$

On a en dérivant (en prenant les dérivée logarithmique des [...]

$$(1) \quad i(s-\psi') - \frac{uu'}{(1-u^2)} = \frac{u'\left(\dfrac{-u_0}{2\sqrt{1-uu_0}} - i\dfrac{(u_0-2u)}{2\sqrt{u(u_0-u)}}\right)}{\sqrt{1-uu_0} - i\sqrt{u(u_0-u)}}$$

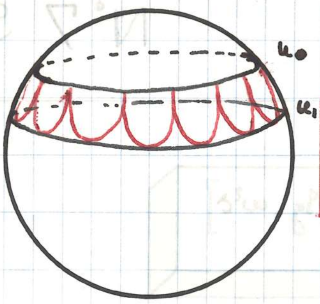
séparons partie réelle et partie imaginaire de $h(u)$

$$h(u) = \frac{-u'}{2\sqrt{g(u)}} \frac{\left(u_0\sqrt{u(u_0-u)} + i(u_0-2u)\sqrt{1-uu_0}\right)}{(1-uu_0+uu_0-u^2)}\left(\sqrt{1-uu_0} + i\sqrt{u(u_0-u)}\right)$$

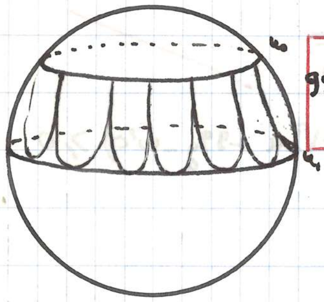
$$h(u) = \frac{-u'}{2(1-u^2)\sqrt{g(u)}}\left[u_0\sqrt{g(u)} - (u_0-2u)\sqrt{g(u)} + i\left[u_0(u(u_0-u)) + (u_0-2u)(1-\right.\right.$$

$$h(u) = -\frac{u'u}{(1-u^2)} - \frac{iu'}{2(1-u^2)\sqrt{g(u)}}\left[\cancel{u_0^2u} - u^2u_0 + u_0 - \cancel{uu_0^2} - 2u + 2u^2\right.$$

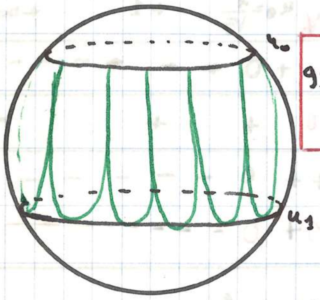
$$h(u) = -\frac{u'u}{(1-u^2)} - \frac{iu'}{2(1-u^2)\sqrt{g(u)}}\left[u^2u_0 - 2u + u_0\right]$$



$99g < \omega^2 c$



$99g = \omega^2 c$



$99g > \omega^2 c$

Les points J sur la sphère de rayon (1) situés sur le parallèle limite supérieur sont stationnaires.

$$\frac{\theta'}{\psi'} = \frac{1}{\theta(1-\sqrt{3}u)} \to \pm\infty \quad u \to u_0$$ donc la courbe lieu de

J admet des points de rebroussement à tangente identique à celle au méridien vertical en J.

suivant que $99g - \omega^2 c > 0$ ou < 0 le parallèle limite inférieur (auquel est tangente la courbe lieu de J sera du côté des $z \leq 0$ ou $z > 0$

D'où ci-contre l'allure du lieu de J suivant les valeurs de $99g - \omega^2 c$. Le cas intermédiaire $99g = \omega^2 c$ correspond au cas où le parallèle limite inférieur est le grand cercle horizontal de la sphère.

B

lorsque $99g = \omega^2 c$ relation finie entre θ et t

on a alors $$3\left(\frac{11u'}{2}\right)^2 = (1-\sqrt{3}u)(-\omega^2 c u^2 + \omega^2 c\sqrt{3}u) = \omega^2 c(1-\sqrt{3}u)(-u+\sqrt{3})u$$

$$u'^2 = \frac{4\omega^2 c}{363} u\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - u\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}u\right) 3$$

$$\boxed{u'^2 = \frac{4\omega^2 c}{121} u\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - u\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}u\right)}$$

on a aussi $\psi' = \dfrac{2\omega\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - u\right)}{11(1-u^2)}$ remplaçons pour la suite des calculs

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = u_0 \qquad \frac{2\omega}{11} = K$$ on a alors

$$\boxed{\begin{aligned} u'^2 &= K^2 c\, u(u_0 - u)(1 - u_0 u) \\ \psi' &= \frac{K(u_0 - u)}{1-u^2} \end{aligned}}$$

c'est à dire.

$$\boxed{3\cdot\left(\frac{11u'}{2}\right)^2 = (1-\sqrt{3}u)\left[-99gu^2 + \omega^2 c\sqrt{3}u + 99g - \omega^2 c\right]}$$

$$\boxed{\psi' = \frac{2\omega(1-\sqrt{3}u)}{11\sqrt{3}(1-u^2)}} \qquad u_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Discussion.

$u'^2 \geq 0 \ \forall u$ donc $(1-\sqrt{3}u)\left[-99gu^2 + \omega^2 c\sqrt{3}u + 99g - \omega^2 c\right] \geq 0$ pour le mouvement réel

on a donc le tableau

u	$-\infty$		-1		u_1	0	u_1	$u_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$		$+1$		$+\infty$
$1-\sqrt{3}u$	+	+	+	+	+	+	+	+ 0	−	−	− − −	−
$-99gu^2+\omega^2c\sqrt{3}u+99g-\omega^2c$	−		−	−	0 −	+ −	+ − 0	+		+		−
$\left(\frac{11u'\sqrt{3}}{2}\right)^2$ α/	− −	− −	−	−	0	+ +	+ +	0	− −	−	− −	
β/	− −	− −	−	−	− −	− −	0 +	0	− −	− −	− −	

$f(u) = -99gu^2 + \omega^2 c\sqrt{3}u + 99g - \omega^2 c$ $\qquad f(0) = 99g - \omega^2 c$

$f(+1) = \omega^2 c(\sqrt{3}-1) > 0$

$f(-1) = \omega^2 c(-\sqrt{3}-1) < 0$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = g(99-33) = 66g > 0$

La racine de $f(u)$ qui se trouve entre -1 et $+1$ peut être positive ou négative

L'autre racine de $f(u)$ est de module supérieur à 1 en effet le produit des racines $u_1 u_2$ de $f(u)$ sont : $\frac{99g-\omega^2 c}{-99g} = -1 + \frac{\omega^2 c}{99g} = u_1 u_2$

leur somme $u_1 + u_2 = \frac{\omega^2 c\sqrt{3}}{99g} > 0$

u varie donc dans l'intervalle $[u_1, u_0]$ $-1 \leq u_1 < u_0$

dans chaque phase du mouvement u varie de façon monotone de u_0 à u_1 puis de u_1 à u_0 etc (Mouvement de Lagrange et Poinsot) pendant le mouvement réel $\psi' = \frac{2\omega(1-\sqrt{3}u)}{11\sqrt{3}(1-u^2)}$ reste positif

et fini. $\theta' = \frac{u'}{1-u^2}$ $\quad \theta'_0 = 0 \quad u'_0 = 0 \quad \psi_0 = 0$ donc

Le système (1) (2) (4) est équivalent au système (1) (2) (3) pourvu que θ ne reste pas constant au cours du mouvement en effet on obtient (4) en multipliant (3) par $\theta' \neq 0$ et en intégrant par rapport à t.

Le système (1) (2) (3) des équations de Lagrange a toujours une solution et une seule satisfaisant à des conditions initiales données.

Pour un mouvement $\theta = C^{te}$ (4) peut donner une indétermination auquel cas il faut se reporter aux équations (1) (2) (3).

θ non stationnaire

(le fait que $\theta'_0 = 0$ à l'instant initial n'entraine pas de difficulté dans l'emploi de (4) pourvu que θ' ne reste pas nul au cours du mouvement).

θ vérifie donc l'équation différentielle.

$$\frac{mc^2}{24}\left[11\,\theta'^2 + 11\psi'^2\sin^2\theta + 2\omega^2\right] = -\frac{Mgc\sqrt{3}}{2}\cos\theta + h$$

en tenant compte des conditions initiales.

$$h = \frac{Mc^2}{24}2\omega^2 + \frac{Mgc\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \psi' = \frac{2\omega(1-\sqrt{3}\cos\theta)}{11\sqrt{3}\sin^2\theta}$$

$$\text{donc}\quad \frac{mc^2}{24}\left[11\,\theta'^2\right] + \frac{mc^2}{24}\frac{4\omega^2(1-\sqrt{3}\cos\theta)^2}{3\sin^2\theta \times 11} + \cancel{\frac{mc^2 2\omega^2}{24}} = \frac{Mgc\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3}\cos\theta) + \cancel{\frac{mc^2\omega^2}{12}}$$

on a alors

$$11\,\theta'^2 = -\frac{4\omega^2(1-\sqrt{3}\cos\theta)^2}{11\cdot 3\sin^2\theta} + \frac{12g}{c}(1-\sqrt{3}\cos\theta)$$

$$\text{soit}\quad 11\,\theta'^2 = \frac{-4\omega^2 c(1-\sqrt{3}\cos\theta)^2 + 12g(1-\sqrt{3}\cos\theta)\,11\times 3\sin^2\theta}{11\cdot 3\sin^2\theta\cdot c}$$

$$3c(11\sin\theta\cdot\theta')^2 = (1-\sqrt{3}\cos\theta)\left[-4\omega^2c + 4\omega^2c\sqrt{3}\cos\theta + 396\,g\sin^2\theta\right]$$

* θ vérifie donc l'équation.

$$\boxed{3c\left(11\frac{d\cos\theta}{dt}\right)^2 = (1-\sqrt{3}\cos\theta)\left[-396\,g\cos^2\theta + 4\omega^2c\sqrt{3}\cos\theta + 396\,g - 4\omega^2c\right]}$$

posons $u = \cos\theta$ on a alors

$$\boxed{3c\,121\cdot u'^2 = (1-\sqrt{3}u)\left[-396\,g\,u^2 + 4\omega^2c\sqrt{3}\,u + 396\,g - 4\omega^2c\right]}$$

4° Équation différentielle donnant θ en fonction du temps

θ est paramètre principal ψ et φ sont des paramètres secondaires du mouvement :

en effet θ étant connu en fonction du temps on a d'après (2) et (1)

$$\varphi' = r_0 - \cos\theta\,\psi'$$

$$11\sin^2\theta\,\psi' + 2\cos\theta\, r_0 = 11\sin^2\theta_0\,\psi'_0 + 2r_0\cos\theta_0$$

soit

$$\varphi' = r_0 - \cos\theta\,\psi'$$

$$\psi' = \frac{11\sin^2\theta_0\,\psi'_0 + 2r_0(\cos\theta_0 - \cos\theta)}{11\sin^2\theta_0}$$

En tenant compte des conditions initiales.

$$\begin{cases} P_0 = \theta'_0 = 0 \\ q_0 = \psi'_0 \sin\theta_0 = 0 \\ R_0 = \varphi'_0 + \psi'_0 \cos\theta_0 = \omega \end{cases}$$

or à l'instant initial $\operatorname{tg}\theta_0 = \sqrt{2}$ $\cos\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\sin\theta_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}$

donc à l'instant initial il faut prendre.

$\theta'_0 = 0$	$r_0 = \varphi'_0 = \omega$	$\psi'_0 = 0$	$\cos\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sin\theta_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}$

donc

$$\varphi' = \omega - \cos\theta\,\psi'$$

$$\psi' = +2\omega\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \cos\theta\right) / 11\sin^2\theta$$

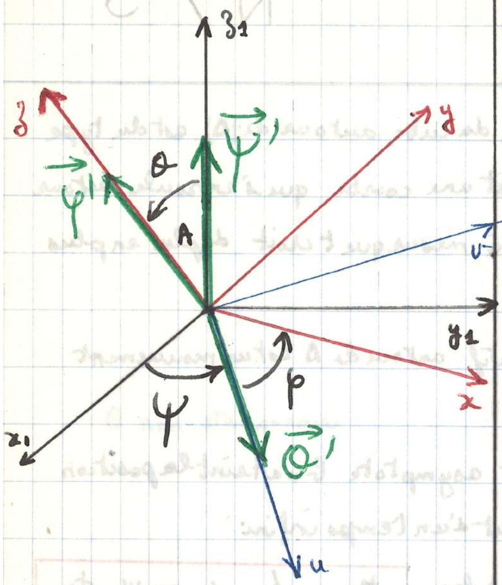
$$\varphi' = \omega - \frac{2\cos\theta\,\omega}{11\sin^2\theta}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \cos\theta\right)$$

$\psi' = \dfrac{2\omega(1 - \sqrt{3}\cos\theta)}{11\sqrt{3}\sin^2\theta}$	$\varphi' = \dfrac{\omega}{11\sqrt{3}\sin^2\theta}(11\sqrt{3}\sin^2\theta + 2\sqrt{3}\cos^2\theta - 2\cos\theta)$

une fois connu θ en fonction du temps ψ et φ s'obtiennent par une simple quadrature. θ est paramètre principal du mouvement.

l'intégrale première (4) de l'énergie cinétique est :

$$\boxed{\frac{mc^2}{24}\left[11\theta'^2 + 11\psi'^2\sin^2\theta + 2(\varphi' + \cos\theta\,\psi')^2\right] = -\frac{Mg\,c\sqrt{3}}{2}\cos\theta + h}$$



P, Q, R étant les composantes de $\vec{\Omega}$ sur (Au, Av, Az)

on a

$$P = \theta' \quad Q = \psi'\sin\theta \quad R = \varphi' + \psi'\cos\theta$$

La force vive du cube à l'instant t est donc puisque (Au Av Az) sont des axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie en A du cube

$$2T = \frac{11mc^2}{12}(P^2+Q^2) + \frac{Mc^2}{6}(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2$$

soit $T = \frac{11mc^2}{24}(\theta'^2 + \psi'^2\sin^2\theta) + \frac{Mc^2}{12}(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2$

$$\boxed{T = \frac{Mc^2}{24}\left[11\theta'^2 + 11\psi'^2\sin^2\theta + 2(\varphi' + \cos\theta\,\psi')^2\right]}$$

La fonction de force dont dépend le problème est $\boxed{U = -Mg\,z_{1G} = -Mg\frac{c\sqrt{3}}{2}\cos\theta}$

* Équations de Lagrange du mouvement :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_{q_i}$$

$$Q_\theta = Mg\frac{c\sqrt{3}}{2}\sin\theta \quad Q_\varphi = 0 \quad Q_\psi = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{mc^2}{24}\left[11\psi'^2\sin 2\theta - 4\sin\theta(\varphi' + \cos\theta\,\psi')\psi'\right]$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = \frac{2mc^2}{24}11\theta' = \frac{11mc^2}{12}\theta'$$

le mouvement admet les deux intégrales premières $\frac{\partial T}{\partial \psi'} = cte$ $\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = cte$

l'équation de Lagrange en θ est

$$\frac{11mc^2}{12}\theta'' - \frac{mc^2}{24}\left[11\psi'^2\sin 2\theta - 4\sin\theta(\varphi' + \cos\theta\,\psi')\psi'\right] = \frac{Mgc\sqrt{3}}{2}\sin\theta$$

soit $11\theta'' - \left[11\psi'^2\sin\theta\cos\theta - 2\sin\theta(\varphi' + \psi'\cos\theta)\psi'\right] = \frac{6g\sqrt{3}}{c}\sin\theta$

Le système des trois équations de Lagrange du problème est équivalent au système

$$\boxed{\begin{aligned} &(1)\quad \varphi' + \cos\theta\,\psi' = \varphi'_0 + \cos\theta_0\,\psi'_0 = r_0 \\ &(2)\quad 11\sin^2\theta\,\psi' + 2\cos\theta(\varphi' + \cos\theta\,\psi') = 11\sin^2\theta_0\,\psi'_0 + 2r_0\cos\theta_0 \\ &(3)\quad 11\theta'' - \left[11\psi'^2\sin\theta\cos\theta - 2\sin\theta\, r_0\right] = \frac{6g\sqrt{3}}{c}\sin\theta \end{aligned}}$$

VIDIANI G | deuxième feuille. | N°7 S

* Discussion.

type révolutif (I)

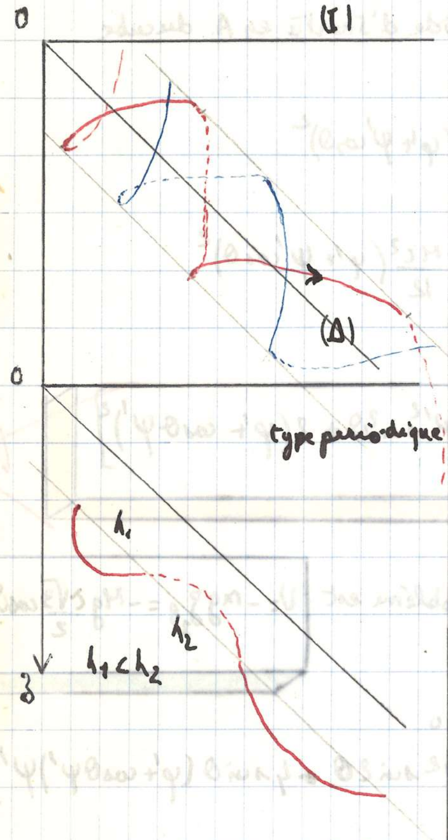
1° si $|\omega| > \sqrt{\frac{3g}{c}}$ le mouvement relatif du cube autour de (Δ) est du type révolutif. Tout point du cube décrit une courbe qui s'enroule autour de (Δ), les spires devenant au fur et à mesure que t croit de plus en plus lâches.

2° si $|\omega| < \sqrt{\frac{3g}{c}}$ le mouvement relatif autour de Δ est un mouvement oscillatoire périodique.

3° si $|\omega| = \sqrt{\frac{3g}{c}}$: on a un mouvement asymptote G n'atteint la position correspondant à $\psi = \pi$ qu'au bout d'un temps infini.

Les coordonnées de G sont données par les formules : (les constantes dépendant des conditions initiales imposées à G

$$\boxed{\begin{aligned} * x_G &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{c}{2}\cos\psi + \text{cte} \\ y_G &= \frac{c}{\sqrt{2}}\sin\psi + \text{cte} \\ z_G &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{c}{2}\cos\psi + \text{cte} \end{aligned}}$$



Conclusion : Le mouvement du cube résulte de la composition de deux mouvements

* un mouvement sinusoïdal du type pendulaire ou révolutif autour de (Δ)

* Un mouvement de chute parabolique le long d'un plan incliné de lignes de pente parallèles à (Δ)

On pourrait généraliser le problème un vitesse de glissement initiale parallèlement à (Δ). suivant qu'elle serait ou non dirigée vers le haut ou vers le bas on aurait les cas analogue du mouvement d'un point matériel lancé dans un champ de pesanteur.

3°/ A est fixe : système différentiel permettant de calculer les angles d'Euler en fonction du temps

Le mouvement du cube est un mouvement de Lagrange et Poisson, l'ellipsoïde d'Inertie en A du cube étant de révolution autour de Oz (porté par AH). Pour calculer la force vive du cube il n'est pas besoin de prendre un système d'axes principaux liés au solide : prenons comme axe Au la perpendiculaire en A à Az située dans le plan Ax_1y_1 et cherchons les composantes sur les axes Au Av Az du vecteur rotation $\vec{R} = \vec{\psi}' + \vec{\varphi}' + \vec{\theta}'$ du trièdre Ax, Ay, Az qui lui est lié au cube. ψ, θ, φ étant les angles d'euler dont dépendent le problème.

L'intégrale première des forces vives donne :
(elle existe les liaisons en A et B étant parfaites.

$$2T = 2U + 2h \qquad \boxed{\frac{2mc^2}{3}\psi'^2 + m\lambda'^2 = Mg\,(\lambda\sqrt{2} + c\cos\psi) + 2h} \quad (1)$$

Ecrivons les équations de Lagrange du mouvement

on a $\varphi_\lambda = \dfrac{\partial U}{\partial \lambda} = \dfrac{Mg}{\sqrt{2}}$ $\quad \varphi_\psi = \dfrac{\partial U}{\partial \psi} = -\dfrac{Mg\,c}{2}\sin\psi$.

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda'} = m\lambda' \quad \frac{\partial T}{\partial \psi'} = \frac{2mc^2}{3}\psi' \quad \frac{\partial T}{\partial \lambda} = \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0$$

d'où les équations de Lagrange du mouvement

$$(2) \qquad \boxed{\underset{2'}{\lambda''} = \frac{g}{\sqrt{2}} \qquad \underset{(2'')}{\psi''} = -\frac{3g}{4c}\sin\psi.}$$

L'emploi de (1) n'est pas sans restriction au voisinage des positions d'équilibre $\psi = 0$ $\psi = \pi$. Le système (2')(1) n'est équivalent au système (2) que si $\psi' \neq 0$ au cours du mouvement (puisque $\lambda' = 0$ ne peut avoir lieu constamment $\lambda' = \dfrac{g}{\sqrt{2}}t + \lambda'_0$.) ~~ssi~~.

Le cas du mouvement stationnaire correspond au cas où B restait constamment dans (V) $(\omega = 0)$ A aurait un mouvement de chute parabolique analogue à la chute d'un point sur un plan incliné de $\dfrac{\pi}{4}$ sur l'horizontale.

Écartons le cas du mouvement stationnaire : En prenant comme instant initial $t_0 = 0$

$$\text{on a} \quad \boxed{\lambda = \frac{g}{2\sqrt{2}}t^2 + \lambda'_0 t + \lambda_0}$$

$\psi' \neq 0 \quad 2\psi'\psi'' = -\dfrac{3g}{2c}\sin\psi\,\psi'$ soit $\psi'^2 = +\dfrac{3g}{2c}\cos\psi + $ cte dépendant des conditions initiales

$$\psi'^2 - \frac{3g}{2c}\cos\psi = \omega^2 - \frac{3g}{2c}\cos\psi_0$$

or nous avons pris $\psi_0 = 0$ à l'instant $t = 0$

$$\psi'^2 = \omega^2 - \frac{3g}{2c}(1 - \cos\psi) \qquad \boxed{\psi'^2 = \omega^2 - \frac{3g}{c}\sin^2\frac{\psi}{2}}$$

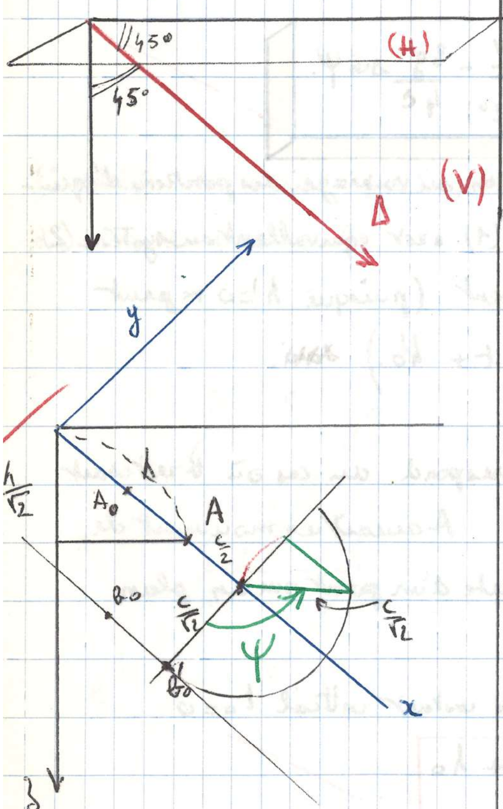
$$\frac{8+3}{12} Mc^2(X^2+Y^2) + \frac{MZ^2}{12}(8-6)c^2 = 1 \quad \text{soit} \quad \frac{11}{12} Mc^2(X^2+Y^2) + \frac{Mc^2}{6}Z^2 = 1$$

$$\boxed{\frac{11Mc^2}{12}(X^2+Y^2) + \frac{Mc^2}{6}Z^2 = 1}$$

Ex

l'ellipsoïde d'Inertie en A est de révolution autour de AH.

2° Le mouvement du cube se ramène à deux mouvements simples discuter.



L'obstacle du mouvement est Δ il est fixe les forces de liaison étant parfaites (en A et B) ne travaillent pas dans le mouvement réel

Calculons la valeur de la chute de G en fonction de $\overline{OA} = h$ et ψ et ψ étant l'angle dont a tourné KG depuis l'instant initial dans son mouvement relatif par rapport à des axes de direction fixe issus de A, dont l'axe des Z est Δ. (K milieu de AB projection de G sur K). En s'aidant de la figure on trouve rapidement

$$Z = \frac{h}{\sqrt{2}} + \frac{c}{\sqrt{2}}\cos\psi \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{c}{2\sqrt{2}} = \boxed{\frac{h}{\sqrt{2}} + \frac{c}{2}\cos\psi + cte}$$

La fonction de force dont dépend le mouvement est Mgz c'est-à-dire

$$\boxed{U = Mg\left(\frac{h}{\sqrt{2}} + \frac{c}{2}\cos\psi\right) + cte}$$

Calcul de la force vive du cube. En prenant comme axes relatifs les axes d'origine A. et dont Δ est l'Axe Az et dont par exemple Ax Ay sont portés à l'instant initial par AC AD. on a puisque le mouvement résulte de la composition de la rotation du cube autour de Δ et d'une translation parallèle à l'axe de rotation

on a $(\vec{V_e} \cdot \vec{V_e}) = 0$ donc

$$2T = 2T_r + MV_e^2 \qquad V_e^2 = h'^2$$

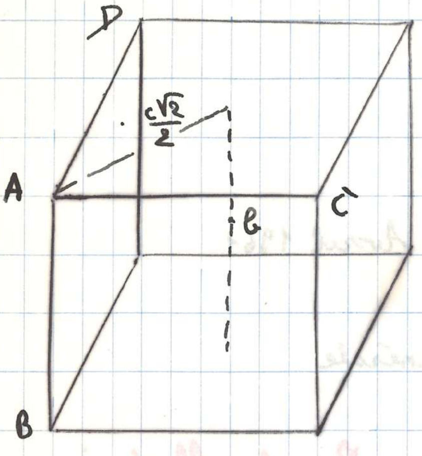
$2T_r = I_\Delta \psi'^2$ car Δ est un axe permanent de rotation.

$$I_\Delta = \frac{2mc^2}{3}$$

on a donc $\boxed{2T = \frac{2mc^2}{3}\psi'^2 + m h'^2}$ $U = Mg\left(\frac{h}{\sqrt{2}} + \frac{c}{\sqrt{2}}\cos\psi\right) + cte$

Oui

* ellipsoïde d'inertie par rapport au sommet A.



en prenant Ax Ay Az orientés par $\vec{AB}\ \vec{AC}\ \vec{AD}$ (le repère Axyz n'est pas un RON).

L'équation de l'ellipsoïde d'inertie en A est de la forme

$$A(x^2+y^2+z^2) - 2B(xy+yz+zx) = 1$$

car les axes Ax Ay Az ont le même rôle par rapport au cube et les produits d'inertie du cube par rapport aux plans Axy Ayz Axz sont évidemment égaux par suite des rôles analogues que jouent les faces correspondantes par rapport au cube.

D'après le théorème de Koenig

$$\boxed{A = I_{Gz} + M\frac{c^2}{4}\cdot 2 = \frac{Mc^2}{2}\left(\frac{1}{3}+1\right) = \frac{2Mc^2}{3}}$$

En vertu du théorème de Koenig le produit d'inertie B par rapport au plan Axy est égal au produit d'inertie par rapport au plan xGy augmenté de la quantité $M\frac{c}{2}\cdot\frac{c}{2}$ le produit d'inertie en G étant nul on a $\boxed{B = \frac{Mc^2}{4}}$

L'équation de l'ellipsoïde d'inertie en A (du cube) rapporté aux axes $\vec{AB}\ \vec{AC}\ \vec{AD}$ est

$$\boxed{\frac{2Mc^2}{3}(x^2+y^2+z^2) - \frac{2Mc^2}{4}(xy+yz+zx) = 1}$$

Ex

que l'on écrit.

$$\frac{2Mc^2}{3}(x^2+y^2+z^2) - \frac{Mc^2}{4}\left[\frac{(x+y+z)^2\cdot 3}{3} - (x^2+y^2+z^2)\right] = 1$$

Prenons comme nouvel axe AZ l'axe porté par $\vec{AH}$ (qui est un axe ternaire du cube) et comme plan AXY le plan normal en A à AH rapporté à ces axes qui sont ses axes principaux l'ellipsoïde d'inertie en A a pour équation.

$$\frac{2Mc^2}{3}(X^2+Y^2+Z^2) - \frac{Mc^2}{4}(3Z^2 - X^2 - Y^2 - Z^2) = 1$$

soit

$$\left(\frac{2Mc^2}{3}+\frac{Mc^2}{4}\right)(X^2+Y^2) + Z^2\left(\frac{2Mc^2}{3} - \frac{2Mc^2}{4}\right) = 1$$

c'est à dire.

IPES.

VIDIANI G

N° 7 S

numérisé et g 6-9-2018 Dicola

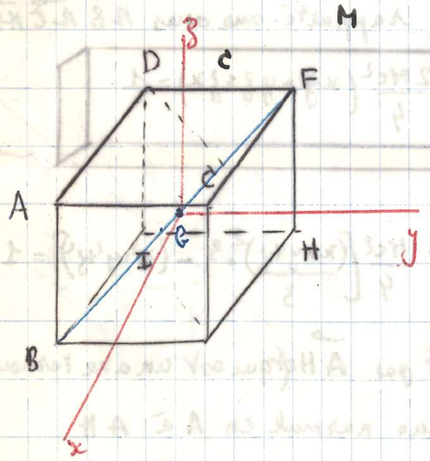
19/20

Vendredi 21 Avril 1961

Mécanique générale

Pseudo elliptique

1° ellipsoïde d'Inertie par rapport au centre de gravité G.



L'ellipsoïde d'inertie en G est une sphère en effet les normales issues de G aux faces du cube sont des axes centraux d'Inertie du cube et par suite des symétries du cube le cube a même moment d'Inertie par rapport à chacun de ces axes soit A ce moment en prenant comme axes les parallèles aux arêtes issues de G. Découpons le cube en tranche carrées d'épaisseur dz parallèles au plan xGy.

Le Moment d'inertie de cette tranche carrée par rapport au plan xGy est $\rho z^2 dz \times c^2$ le moment d'Inertie du cube par rapport à ce plan est

$$I_{xGy} = \rho c^2 \int_{-c}^{+c} z^2 dz = \rho c^2 \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} = \rho c^2 \frac{2c^3}{8.3} = \frac{\rho c^5}{12}$$

or $M = \rho c^3$ donc $\boxed{I_{xGy} = \frac{Mc^2}{12}} = I_{xGz} = I_{yGz}$

par suite $I_{Gx} = I_{Gy} = I_{Gz} = I_{xGz} + I_{yGz} = \frac{Mc^2}{12} + \frac{Mc^2}{12} = \frac{Mc^2}{6}$

donc $\boxed{I_{Gx} = I_{Gy} = I_{Gz} = \frac{Mc^2}{6}}$

L'équation de la sphère d'Inertie en G du cube est par rapport aux axes (Gx, y, z) : $\boxed{\frac{Mc^2}{6}\left[x^2+y^2+z^2\right] = 1}$

dernier appel méca. ex. — $\int$ pseudo ell. de Green Hill

rebroussement $u = u_0$ u_1 nulle $\alpha = b^2 r_0^2 u_0$

$u'^2 = b^2 s_0^2 u(u_0 - u)(1 - u u_0)$ $\dfrac{d\psi}{dt} = b r_0 \dfrac{u_0 - u}{1 - u^2}$ $\left\{ \begin{array}{l} t \text{ à partir de } u = u_0 \\ \psi = 0 \text{ avec } t = 0 \end{array} \right.$ $(\alpha)\ \sqrt{1-u^2}\, e^{(st-\psi)i} = \sqrt{1 - u u_0} - i\sqrt{u(u_0 - u)}$

$s = \dfrac{b r_0 u_0}{2}$ $i = \sqrt{-1}$ vérifier $d L$ $\dfrac{du}{dt}$ et $\dfrac{d\psi}{dt}$ par leur expression en fct de u PR et P Im $= 0$

$\sin\theta \cos(st - \psi) = \sqrt{1 - u_0 \cos\theta}$ de même vérifier $\sin^2\theta\, e^{2(\psi - nt)i} = (u - D)\sqrt{(u' - u)(u_2 - u)} + i\sqrt{u - u_1}\,(Eu^2 - Fu)$

$\sin\theta \sin(st - \psi) = -\sqrt{(u_0 - \cos\theta)\cos\theta}$ n D E F cte réelles convenablement choisies. (seulement nt)

autre chose de cte $\sin^3\theta\, e^{3(\psi - nt)} = (u^3 - D u + D')\sqrt{(u' - u)(u - u_1)} + i\,(Eu^2 - Fu + F')\sqrt{u_2 - u}$

etc $\sin^N\theta\, e^{N(\psi - nt)}$ ...

MECANIQUE GENERALE   60-61   Série 2 - N° 7

LYON (Mr SALLES)

On donne un cube homogène, de côté c et de masse M.

1°) Déterminer l'ellipsoïde d'inertie par rapport à son centre de gravité G ; l'ellipsoïde d'inertie par rapport à son sommet A rapporté aux axes $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$. Quelle est l'équation de cet ellipsoïde rapporté à ses axes principaux ?.

2°) On donne un axe Δ incliné d'un angle de 45° sur le plan horizontal (H), le plan vertical de Δ étant désigné par (V) . On munit le cube en A et B de deux anneaux sans masse que l'on enfile sur Δ . A l'instant initial, le plan ABFH coïncide avec (V), le centre de gravité de G étant au-dessous de Δ . Le cube est alors soumis, à l'instant initial, à une rotation instantanée ω autour de AB. Déterminer le mouvement du cube et montrer qu'il se ramène à deux mouvements simples. Discuter.

3°) On suppose maintenant que A est un point fixe et qu'à l'origine des temps $\vec{AB}$ est une verticale ascendante et que le cube est animé, à cet instant, d'une rotation instantanée ω portée par la diagonale $\vec{AH}$ du cube. Donner le système différentiel permettant de calculer les angles d'Euler en fonction du temps.

4°) Trouver l'équation différentielle donnant Q en fonction du temps ; discuter et préciser la forme de la courbe que décrit l'intersection J de $\vec{AH}$ avec la sphère de rayon 1. Etudier le cas particulier où la valeur maximum de l'angle que fait $\vec{AH}$ avec la verticale est $\frac{\pi}{2}$. Peut-on alors donner une relation finie liant Q au temps t ?. $\int$(Pseudo elliptique GREENHILL)

-