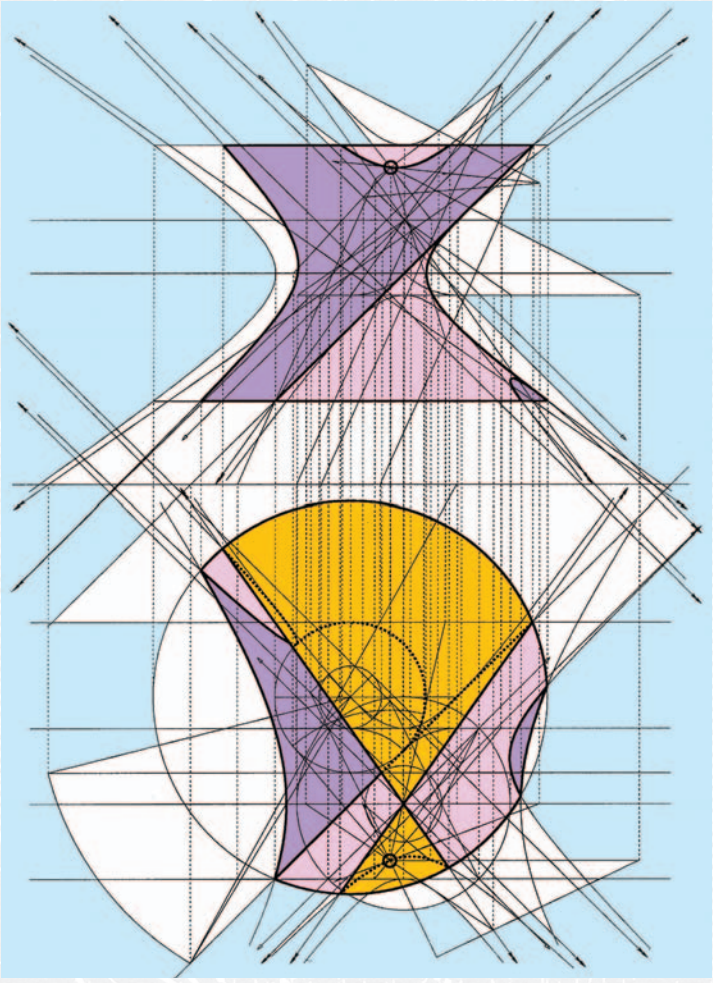
Quadrature

Magazine de mathématiques pures et épicées

La mathématique ouvre plus d'une fenêtre sur plus d'un monde



- Mots, maths et histoire
- Le problème de Sylvester
- Puzzles japonais : Sudoku, Hitori et Edel
- Notes de lecture
- La fonction de Van der Waerden
- La face cachée des nombres
- Coin des problèmes
- Le roi lorel

n° 67

Magazine trimestriel
Janvier–Mars 2008
ISSN 1142-2785 – 8 Euros

EDP SCIENCES

La fonction de Van der Waerden et son graphe

par Lazare Georges Vidiani*

L'existence de fonctions nulle part dérivables est une conséquence, niveau Math Sup, du théorème de Baire-Osgood qui peut s'énoncer ainsi : dans un ensemble E compact (ou, autre variante, dans un métrique complet), toute intersection d'ouverts partout denses est elle-même partout dense. Ceci équivaut, par complémentarité, à dire que E n'est pas réunion de fermés d'intérieur vide. On montre que l'ensemble D des fonctions continues qui admettent une dérivée en un point, est inclus dans une réunion de fermés d'intérieur vide. L'ensemble $E = C([a, b], S)$, où S est un espace vectoriel normé, est donc tel que $E - D$ n'est pas vide ([5, 7, 9, 11]).

Cependant, l'exemple que nous allons donner a l'avantage d'être explicite, simple et riche en propriétés diverses.

Van der Waerden

Bartel Leendert Van der Waerden (Amsterdam, 2 février 1903 – Zurich, 12 janvier 1996) est un mathématicien néerlandais qui a longtemps vécu aux États-Unis[1] [1]. Son œuvre est importante en algèbre et en géométrie algébrique. Il est célèbre pour l'exemple de fonction continue sans dérivée (1930) dont il va être ici question, ainsi que pour la conjecture qui a longtemps porté son nom. Émise en 1926 et démontrée vers 1983 par le Russe Dynkin et l'Américain Falilman, elle affirme que le permanent $\mathrm{perm}(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} a_1^{\sigma(1)} \dots a_n^{\sigma(n)}$ de toute matrice bistochastique A vérifie $\mathrm{perm}(A) \geq \frac{n!}{n^n}$, l'égalité n'ayant lieu que pour la matrice dont tous les éléments sont égaux à $\frac{1}{n}$.

Ses travaux algébriques servirent de base au groupe Bourbaki (1936) qui fut également inspiré par sa façon de travailler, en commun, comme sur le texte *Modern Algebra* que Van der Waerden écrivit en collaboration avec Artin et Noether.

La fonction

Pour tout réel x, on pose $w(x) = \mathrm{Min}(|x - n|, n \in \mathbb{Z})$, la distance de x à l'entier le plus voisin de x.

Il est immédiat que $w(x + 1) = w(x)$, donc que w est 1-périodique, que pour x dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $w(x) = |x|$, donc que w est paire, positive et majorée par $\frac{1}{2}$, et que, plus généralement, $w(x) = |x - [x + \frac{1}{2}]|$, où $[y]$ désigne la partie entière du réel y.

La fonction w est affine par morceaux, de pente $(-1)^s$, sur les intervalles notés $J(s, 0) = [s\frac{1}{2}, (s + 1)\frac{1}{2}]$, $s \in \mathbb{Z}$. À ce stade, il est important de bien noter que ces intervalles sont les plus grands intervalles d'affinité.

Elle est continue car il y a raccordement à gauche et à droite aux points $n + \frac{1}{2}$, puisque $w(\frac{1}{2} - 0) = |\frac{1}{2}| = w(\frac{1}{2})$ et $w(\frac{1}{2} + 0) = w(\frac{1}{2} - 1 + 0) = |-\frac{1}{2}|$. Par contre, tous les points $\frac{s}{2}$, avec s entier relatif, sont des points anguleux car il y a saut, de pente de valeur absolue 2, en ces points. On peut même préciser que le minimum 0 est atteint pour (et seulement pour) les entiers relatifs, que le maximum $\frac{1}{2}$ est atteint si et seulement si $x = \frac{1}{2} + k$.

Pour tout p entier positif, la fonction définie par $w(px)$ est paire, continue et $\frac{1}{p}$ périodique. Ses points anguleux sont les seuls points de non dérivabilité et les seuls où la fonction atteint ses extrema, 0 (atteint pour $\frac{k}{p}$) et $\frac{1}{2}$ (atteint pour $\frac{2k'+1}{2p}$), d'abscisses $\frac{k''}{2p}$ (k'' pair pour un minimum, k'' impair pour un maximum). Elle est affine de pente $p(-1)^s$ sur les intervalles $[\frac{s}{2p}, \frac{s+1}{2p}]$.

Pour $p = 2^n$, la période est $\frac{1}{2^n}$, les points anguleux sont tous les points $\frac{k}{2^{n+1}}$, et elle n'est affine

* lg_vidiani@club-internet.fr. Divers compléments, tels que les codes sources utilisés pour les calculs évoqués dans l'article, peuvent être directement demandés à l'auteur. L'appendice est de Michel Lafond (NDLR).

[1] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Van_der_Waerden.html

(et alors de pente $2^n(-1)^s$) que sur les intervalles $J(s,n) = [\frac{s}{2^{n+1}}, \frac{s+1}{2^{n+1}}]$, $s \in \mathbb{Z}$, de largeur $\frac{1}{2^{n+1}}$.

En prévision de la recherche des extrema de la fonction de Van der Waerden, nous étudions la fonction f_1 définie par

$$f_1(x) = w(x) + \frac{1}{2}w(2x).$$

Elle est paire et 1-périodique. Obtenue en superposant les graphes des deux fonctions w et $\frac{1}{2}w(2x)$ sur les intervalles $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ et $[\frac{3}{4}, 1]$ où elles sont toutes les deux affines, elle est donc aussi affine par morceaux. Elle vérifie $0 \leq f_1(x) \leq \frac{1}{2}$, 0 étant atteint sur $\mathbb{Z}$, et $\frac{1}{2}$ sur $[k + \frac{1}{4}, k + \frac{3}{4}]$.

Nous montrons sur la figure 1 le graphe de $w(x)$, $w(8x) = w(2^3x)$ et de $f_1(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$, égal à une période pour w et f_1 et contenant huit périodes pour $w(8x)$.

Il est utile de remarquer que $\int_0^1 w(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$ et que $\int_0^1 w(2^k x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$.

Nous définissons maintenant la fonction f de Van der Waerden par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} w(2^n x).$$

En fait, l'exemple original de 1930 était $\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} w(a^n x)$ avec $a = 10$.

D'après Jack B. Brown de l'université Auburn (Alabama), co-auteur de [2], Whitney étudia en 1951 la fonction généralisée $W_{a,b}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} w(b^n x)$, avec $b > a > 2$, qui est encore plus pathologique $f = W_{2,2}$.

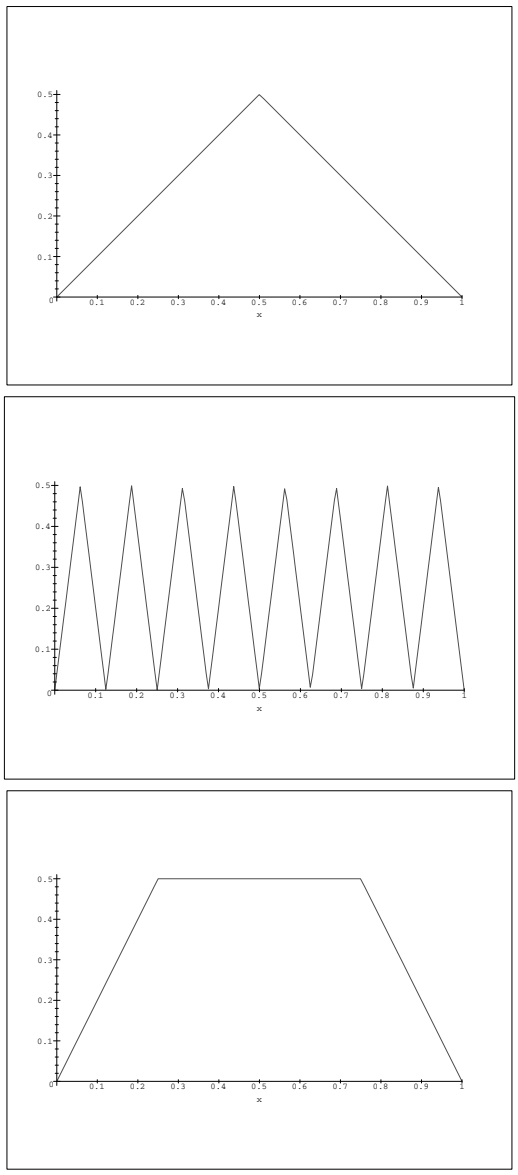


Figure 1. Graphes de $w(x)$, $w(8x)$ et de $f_1(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

Premiers résultats

La série de terme général $u_n(x) = 2^{-n} w(2^n x)$ vérifie $0 \leq u_n(x) \leq 2^{-n-1}$, donc converge normalement, donc uniformément. Comme $\mathbb{R}$ est complet, la fonction f, somme uniforme d'une série de fonctions continues, est continue partout, et donc intégrable. Elle est aussi 1-périodique et, comme w, paire et symétrique par rapport à $x = \frac{1}{2}$.

En outre, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}(1+2^{-1}+\ldots+2^{-n}+\ldots) = 1$.

Comme $w(2^n x)$, f admet $x = \frac{1}{2}$ comme axe de symétrie et $f(1-x) = f(x)$.

Comme il y a convergence uniforme, on peut permuter $\int$ et $\sum$, ce qui donne immédiatement $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-2} = \frac{1}{2}$.

Non dérivabilité

Nous allons montrer que f n'est dérivable en aucun point.

Rappelons qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f soit dérivable en x est que $A_{h,k} = \frac{f(x+h)-f(x-k)}{h+k}$ ait une limite finie, lorsque (h, k) tend vers $(+0, +0)$ avec $h + k \neq 0$.

Pour démontrer que f n'est pas dérivable en x, il suffit d'exhiber deux suites x_p, y_p tendant vers x, et telles que $A_{y_p - x, x - x_p}$ n'ait pas de limite.

Prenons pour cela $x_p = 2^{-p}[2^p x]$ et $y_p = x_p + 2^{-p}$, valeurs 2-adiques approchées, respectivement par défaut et par excès, à la précision 2^{-p}, de x.

Posons $I_p = [x_p, y_p]$. L'intervalle I_p, de largeur 2^{-p}, est un intervalle $J([2^p x], p-1)$, et n'est inclus dans un intervalle $J(s,n) = [\frac{s}{2^{n+1}}, \frac{s+1}{2^{n+1}}]$ d'affinité de $w(2^n x)$ que si $2^{-p} \leq 2^{-n-1}$, c'est-à-dire pour :

• $n \leq p - 1$ et le plus grand, comme ils sont emboîtés, est pour $p = n + 1$, alias $n = p - 1$.

D'aprés l'étude de w faite plus haut, on a alors : $\frac{w(2^n y_p)-w(2^n x_p)}{y_p-x_p} = 2^n(-1)^{[2^{n+1}x]}$;

• pour $n \geq p$, $w(2^n x)$ est nul aux deux bornes de I_p, car alors $2^n 2^{-p}[2^p x]$ et $2^n 2^{-p}[2^p x] + 2^{n-p}$ sont entiers.

On pose $\alpha_p = [2^p x] - 2[2^{p-1}x]$ décimale 2-adique d'ordre p de x, décimale qui est constante sur $J(s, p-1)$. Par suite $r_p = \frac{f(y_p)-f(x_p)}{y_p-x_p} = \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{\alpha_k}$, donc $r_{p+1} - r_p = (-1)^{\alpha_p}$ et r_p ne peut avoir de limite lorsque p tend vers l'infini, puisqu'elle n'est même pas une suite de Cauchy : la fonction de Van der Waerden n'est dérivable nulle part.

Remarques

1. La fonction de Van der Waerden n'est monotone sur aucun sous-intervalle, car sinon elle y serait à variations bornées, et y serait dérivable presque partout.

2. La courbe de Van der Waerden, de paramétrage $(x, f(x))$, n'est pas rectifiable, car sinon f serait à variations bornées donc, d'après le théorème de Lebesgue, dérivable presque partout.

3. Il existe bien d'autres fonctions non dérivables, comme la fonction de Darboux $\sum \frac{\sin(n!x)}{n!}$ ou la fonction de Weierstrass $\sum v^n \cos(xu^n)$ avec $u > 1$ entier impair, et $v \in]0, 1[$ et $uv > 1 + \frac{3\pi}{2}$ qui, donné en 1874 dans une lettre à Du Bois Reymond, fut à la source d'une crise qui obligea à définir plus rigoureusement les bases de l'analyse.

Équation fonctionnelle dont elle est la seule solution bornée

La fonction de Van der Waerden vérifie l'équation fonctionnelle

$$F(x) - \frac{1}{2}F(2x) = w(x).$$

Comme cette équation est linéaire, les solutions sont de la forme $F = f + G$, où G est solution de l'équation homogène associée $G(2x) = 2G(x)$. La fonction G vérifie $G(2^n x) = 2^n G(x)$. S'il y avait un seul point x tel que $G(x)$ soit non nul, G ne serait pas bornée sur $\mathbb{R}$. La fonction f est donc la seule solution bornée sur $\mathbb{R}$ de l'équation fonctionnelle $F(x) - 2^{-1}F(2x) = w(x)$, cas particulier de l'équation $F(x) - bF(ax) = g(x)$ qui, pour $0 < b < 1$, a une solution bornée et une seule. En appliquant l'excellente méthode d'itération exposée dans [10], on obtient $\sum_0^\infty b^k g(a^k x)$.

Pour $g = \cos$ et pour $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, on retrouve la fonction classique de Weierstrass donnée plus haut.

Elle est hölderienne

Comme la fonction w est dérivable sauf sur l'ensemble dénombrable de points $\mathbb{Z}$ et que, sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $|w'(x)| = 1 \leq 1$, l'inégalité des accroissements finis nous donne [4], pour tous x_1 et x_2 de $\mathbb{R}$: $|w(x_2) - w(x_1)| \leq |x_2 - x_1|$.

Puisque $0 \leq w(x) \leq 1/2$, on a : $|w(x_2) - w(x_1)| \leq 1/2$.

Par suite, pour tout α de $]0, 1[$, on a :

$$|w(x_2) - w(x_1)| = \\ |w(x_2) - w(x_1)|^{1-\alpha}|w(x_2) - w(x_1)|^\alpha \leq 2^{\alpha-1}|x_2 - x_1|^\alpha.$$

Cette inégalité est d'ailleurs la meilleure, car elle est atteinte pour $x_2 = \frac{1}{2}$ et $x_1 = 0$.

Toutes les séries utilisées ci-dessous convergeant absolument, on a :

$$|f(x_2) - f(x_1)| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}(w(2^k x_2) - w(2^k x_1))\right| \\ \leq 2^{1-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k+\alpha k}|x_2 - x_1|^\alpha = 2^{1-\alpha}|x_2 - x_1|^\alpha \sum_{k=0}^{\infty}(2^{1-\alpha})^k \\ = 2^{1-\alpha}|x_2 - x_1|^\alpha \frac{1}{1 - 2^{\alpha-1}}.$$

Ainsi,

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq \frac{2^{1-\alpha}}{1 - 2^{\alpha-1}}|x_2 - x_1|^\alpha,$$

et cela $\forall \alpha \in]0, 1[$. On dit que f est $\frac{2^{1-\alpha}}{1-2^{\alpha-1}}$ *hölderienne* d'exposant α, pour tout α de $]0, 1[$.

Recherche des extrema

Pour la recherche des extrema de la fonction de Van der Waerden, j'utilise, détaille et approfondis les résultats initiés par Kahane et De Rham [3, 6].

Recherche des minima relatifs

Cherchons les minima relatifs de la fonction de Van der Waerden et, à cette fin, posons $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} w(2^k x)$.

On a l'importante « formule de Zoom » suivante :

$$f_{n+2}(x) = f_n(x) + 2^{-n-1} f_1(2^{n+1}x).$$

Elle subdivise (« zoom » de l'échelle e à l'échelle $e \times 2^{-2}$) chaque intervalle d'affinité de f_n de pente m en quatre intervalles égaux d'affinité de f_{n+2}, de pentes d'affinité $(m, m, m, m)+(2, 0, 0, -2)$ (quadruplet des pentes d'affinité de f_1).

Un raisonnement par récurrence, fait sur $[0, \frac{1}{2}]$ grâce à la symétrie par rapport à $\frac{1}{2}$ et à la 1-périodicité, vérifié pour les premières valeurs de n et basé sur la formule de Zoom, montre qu'à chaque étape, les nouvelles pentes pour f_{2n} sont déjà obtenues (et reproduisent l'enchaînement précédent), sauf pour la première pente, $2n + 1$, dans l'intervalle d'extrême gauche, d'origine 0 et $-2n + 1$ pour l'intervalle précédent $\frac{1}{2}$.

Un maximum relatif est obtenu pour une pente positive suivie d'une pente d'affinité négative.

Un minimum relatif est obtenu pour une pente négative suivie d'une pente d'affinité positive : un minimum relatif pour f_k restant un minimum relatif pour $f_{k'}$ pour $k' \geq k$, la suite de pentes (n, p) $(n < 0, p > 0)$ devenant pour f_{k+1} $(n + 1, n - 1, p + 1, p - 1)$.

Désignons par $m(n)$ le nombre de minima de f_n dans $[0, \frac{1}{2}]$.

Nous constatons que la première abscisse, 2^{-n}, n'est obtenue qu'à partir de f_{2n}, certaines autres, comme $(2k + 1)2^{-n}$ avec $k > 0$, l'étant dès f_{2n-2}. Par exemple, $\frac{3}{8}$ et $\frac{5}{8}$ sont déjà obtenus pour f_4.

Effectuons quelques essais pour voir (le premier -1 qui apparaît à gauche est en gras). L'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ étant subdivisé, pour f_{2n}, en 4^n intervalles égaux et adjacents, l'enchaînement des pentes d'affinité est :

- pour f_0 : 1 (1 minimum en 0, $m(1) = 1$, un intervalle d'affinité) ;
- pour f_2 : $3, 1, 1, \mathbf{-1}$ (2 minimum : en 0 et $\frac{1}{2}$, $m(2) = 2$, quatre intervalles d'affinité) ;
- pour f_4 : $5, 3, 3, 1, 3, 1, 1, \mathbf{-1}, 3, 1, 1, -1, 1, -1, -1, -3$ (4 minima, $m(4) = 4$, seize intervalles d'affinité) ;
- et pour f_6 : $7, 5, 5, 3, 5, 3, 3, 1, 5, 3, 3, 1, 3, 1, 1, \mathbf{-1}, 5, 3, 3, 1, 3, 1, 1, -1, 3, 1, 1, -1, 1, -1, -1, -3, 5, 3, 3, 1, 3, 1, 1, -1, 3, 1, 1, -1, 1, -1, -1, -3, 3, 1, 1, -1, 1, -1, -1, -3, 1, -1, -1, -3, -1, -3, -3, -5$ ($m(6) = 11$, 64 intervalles d'affinité).

Je lance l'avis de recherche suivant : établir une formule pour $m(n)$ sachant (nous l'avons montré) que $m(2k + 1) = m(2k)$. [2]

[2] À peine cet avis de recherche était-il exprimé que je le communiquai à Michel Lafond, collègue, voisin et ami donnant depuis vingt ans une âme au Rallye de Bourgogne, qui m'envoya une réponse par courrier électronique. La demande était résolue et de quelle manière ! Il a réussi (voir l'appendice) à relier $m(2n)$ aux nombres de Catalan bien connus en « parenthésage » et en triangulation : $m(2n) = 1 + \frac{1}{2}C_{2n}^n = 1 + \frac{1}{2}(n+1)\,\text{catalan}(n)$. Je modifie donc mon avis de recherche en demandant quelle propriété des nombres de Catalan – voir par exemple la liste dans la référence 4 du site `http://garsia.math.yorku.ca/MPWP/qtanalogs/catalan/` – permettait de prévoir leur intervention dans le nombre de minima d'une somme partielle de la série de Van der Waerden.

Un raisonnement par récurrence méticuleux, initié par la simulation précédente, permet de prouver que si pour f_{2p}, la pente (impaire) k est dans le s-ième intervalle d'affinité (en partant de la gauche), alors dans f_{2p+2}, grâce à la formule de Zoom, a comme pente d'affinité :

$$\begin{cases} k+2 & \text{à la place } 4s+1 \\ k & \text{à la place } 4s+2 \\ k & \text{à la place } 4s+3 \\ k-2 & \text{à la place } 4s+4 \end{cases}.$$

Cette dernière remarque est à la base du transfert de cette récurrence :

Un nouveau -1 (celui le plus à gauche) apparaît seulement dans f_{2p+2} pour $k = 1$ dans f_{2p}. Le rang dans f_{2n} de ce premier -1, qui donne le minimum le plus à gauche, est 2.2^n (4 pour f_2, 8 pour f_4, 16 pour f_6). La fonction f_{2n} a 4^n intervalles d'affinité dans $[0, \frac{1}{2}]$, de largeur $\frac{1}{2^{2n+1}}$. Le premier minimum a pour abscisse $\frac{2.2^n}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2^n}$ ($\frac{1}{2}$ pour f_2, $\frac{1}{4}$ pour f_4, $\frac{1}{8}$ pour f_6). Tous les minima de f_{2n} ont une abscisse « binaire » de la forme $k2^{-n}$.

Cette constatation étant faite, nous sommes en mesure de préciser les minima de f.

Comme $w(\text{entier}) = 0$, pour tout point binaire $a = k2^{-n}$, on a $f_{n-1}(a) = f_n(a) = \ldots = f(a)$. Nous venons de voir que pour $p \geq 2n$, f_p admet en a un minimum relatif. Comme $f \geq f_p$ et $f(a) = f_p(a)$, f admet aussi en a un minimum relatif.

Réciproquement, si f admet un minimum relatif en x de $[a, a']$, avec $a = p2^{-n}$, $a' = (p + 1)2^{-n}$, les relations $f(x) \geq f_{n-1}(x)$, $f(a) = f_{n-1}(a)$ et $f(a') = f_{n-1}(a')$ impliquent $x = a$ ou $x = a'$, puisque f_{n-1} est affine non constante sur $[a, a']$. Par conséquent, l'ensemble des points où f admet un minimum relatif est l'ensemble des nombres binaires $p2^{-n}$. C'est un sous-groupe additif, dénombrable de $\mathbb{R}$, qui est dense sur $\mathbb{R}$ car 2^{-n} tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

Recherche du maximum absolu

La relation $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k} f_1(4^k x)$ nous permet d'obtenir le maximum absolu de f.

Nous avons vu que f_1 est maximum (et alors égal à $\frac{1}{2}$) en x si et seulement si les décimales 2-adiques de x vérifient $x_1 + x_2 = 1$. Donc, $f_1(4^k x)$ est maximum pour l'ensemble des x dont les décimales 2-adiques vérifient $x_{2k+1} + x_{2k+2} = 1$. Ainsi, l'ensemble des points où f atteint son maximum, égal à $\frac{2}{3} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}$, est l'ensemble des x dont les décimales 2-adiques vérifient $x_{2k+1} + x_{2k+2} = 1$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots$ Par exemple $0,101\,010\,101\,010\ldots$ ou $0,010\,101\,010\,10\ldots$ C'est un ensemble de mesure nulle, dénombrable, discontinu (les composantes

connexes sont des singletons), et enfin parfait (c'est-à-dire fermé sans points isolés).

Recherche des maxima relatifs

Pour déterminer les maxima relatifs, nous remarquons que :

$$f(x) = f_{2n-1}(x) + \sum_{k=n}^{\infty} 4^{-k} f_1(4^k x). \qquad (R)$$

Pour que x soit un point où f admette un maximum relatif, il suffit que f_{2n-1} soit constante au voisinage de x, et que $f_1(4^k x) = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire soit maximum en x. Pour cela, d'après un raisonnement par récurrence analogue au précédent, il faut et il suffit que $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2n} = n$, et que $x_{2k+1} + x_{2k+2} = 1$, pour $k \geq n$. Ceci assure par récurrence que, pour $k \geq n$, on a : $x_1 + x_2 + \ldots x_{2k} = k$.

Réciproquement, soit x un point où f a un maximum relatif. Il admet, puisqu'il n'est pas binaire (ce serait un point de minimum relatif), un développement 2-adique unique $x = [x], x_1 x_2 \ldots$ Raisonnons par l'absurde et supposons que, contrairement au résultat précédent, il n'existe qu'un nombre fini de valeurs de k, telles que $x_1 + \ldots + x_{2k} = k$. Une amélioration rapide du raisonnement par récurence initial nous donne $f'_{2k-1}(x) = k - (x_1 + \ldots + x_{2k})$, expression que nous nommons S_k. L'hypothèse que S_k ne s'annule pas, pour k suffisamment grand ($k \geq n$), implique, puisque $S_{k+1} = S_k + 1 - x_{2k+1} - x_{2k+2}$, que S_{k+1} est de même signe, que nous pouvons supposer être positif, que S_k. Cela signifie que pour $k \geq n$, si nous appelons I_k le segment rectiligne du graphe de f_{2k-1} qui se projette, sur l'axe des x, dans un segment $[p2^{-n}, (p+1)2^{-n}]$ contenant x, nous avons I_{k+1} à gauche de I_k. Donc, par prolongement des inégalités, $(x, f(x))$ est à gauche de I_n, et, comme I_n est une corde du graphe de f (les points anguleux du graphe de f_p, sont des points du graphe de f), $f(x)$ ne serait pas un maximum relatif. Ceci contredirait l'hypothèse.

Il existe donc une infinité de valeurs de p telles que $S_p = 0$.

On peut même prendre une de ces valeurs, notée n, telle que l'intervalle contenant x, où f_{2n-1} est constante (ne pas oublier que $f'_{2k-1}(x) = S_k$), $f(x)$ soit maximum absolu de f. Alors, par la relation (R), cela exige que $f_1(4^k x) = 1$, soit $x_{2k+1} + x_{2k+2} = 1$ pour $k \geq n$, et implique, par récurrence, que $S_k = 0$ pour $k \geq n$. L'ensemble des points où f admet un maximum relatif est l'ensemble des x dont le développement 2-adique (nécessairement propre puisque ce ne sont pas des nombres binaires, qui eux donnent les minima relatifs) a ses décimales qui vérifient pour k suffisamment grand $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2k} = k$. On peut vérifier que c'est un ensemble dense, de mesure nulle.

Le fait que les deux ensembles de maxima relatifs et de minima relatifs soient denses prouve qu'il n'y a aucun intervalle où f soit monotone. On pourra consulter [8] pour une démonstration plus directe de ce fait.

La figure 2 montre le graphe de f_{10}. On y voit en germe les divers extrema de f. La courbe de Van der Waerden est parfois dénommée « courbe du blanc-manger » en raison du pouding qui porte ce nom et auquel elle fait irrémédiablement penser[3].

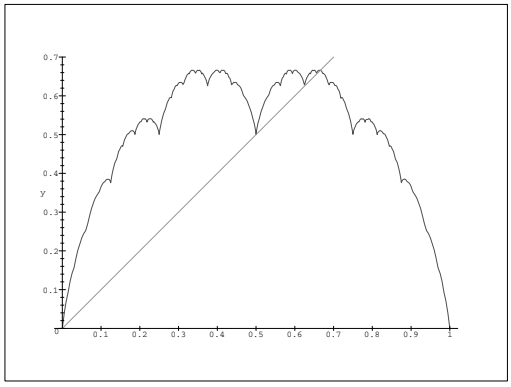


Figure 2. Graphe de la somme partielle d'ordre 10 de la fonction de Van der Waerden.

Recherche des points fixes

Cerise sur le blanc-manger, l'idée que j'ai eue de tracer aussi la première bissectrice met en évidence quelques points fixes $0, \frac{1}{2}$, mais aussi d'autres... Graphiquement, il semble que l'ensemble des minima relatifs contiennent celui des points fixes.

Le mathématicien n'aime pas les évidences graphiques : elles aident l'intuition mais ne sont pas des preuves !

J'ai d'abord commencé par quelques comparaisons numériques pour déceler les décimales de nombres x tels que $f(x)$ soit voisin de x. Ces comparaisons numériques, jointes à un « zoom » graphique sur $[0.6, 0.7]$, m'ont permis de déceler $\frac{1}{2} = 2^{-1}$, $\frac{5}{8} = 5 \times 2^{-3}$ et $\frac{2}{3}$, et de voir graphiquement que ces points, sauf le dernier, correspondaient à des minima relatifs.

Alain Esculier, à qui j'emprunte les diagrammes de la figure 3, trouve des résultats comparables aux miens.

La précision de ces zooms confirme, d'une part, le passage de la première bissectrice par uniquement des minima relatifs, et, d'autre part, l'évaluation de

[3] `http://www.mathcurve.com/fractals/blancmanger/blancmanger.shtml`

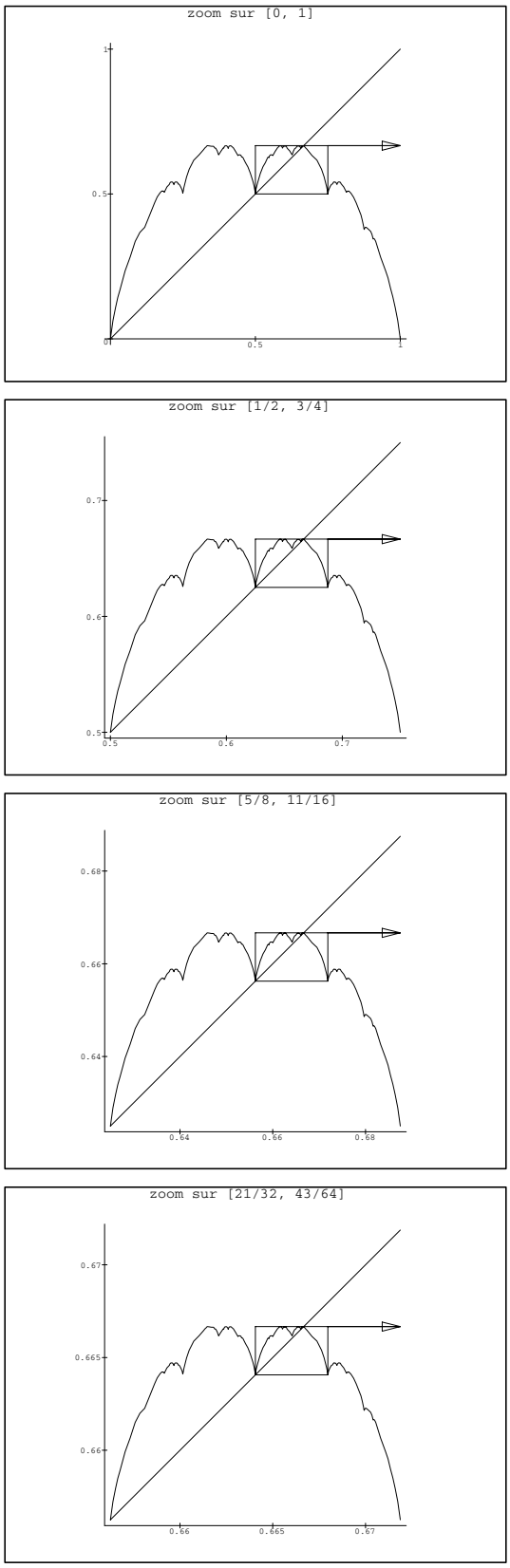


Figure 3. Zooms de la fonction de Van der Waerden.

leur abscisse. Sachant que ce sont des point binaires $p2^{-n}$, on repère : $0.640 \approx \frac{41}{64}$, $0.656 \approx \frac{21}{32}$, $0.664 \approx \frac{85}{128}$, $0.666 \approx \frac{341}{512} \cdots$

Nous allons vérifier que ces valeurs sont bien les abscisses de points fixes.

On utilise systématiquement les faits suivants :

$$\begin{aligned} &w(\text{entier}) = 0, \\ &w(n+x) = w(x) \text{ et} \\ &w(\frac{1}{2}+h) = w(\frac{1}{2}-h). \end{aligned}$$

Le calcul donne :

$$f(\frac{1}{2}) = w(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\,;$$

$$\begin{aligned} f(\frac{5}{8}) &= w(\frac{5}{8}) + \frac{1}{2}w(\frac{10}{8}) + \frac{1}{4}w(\frac{20}{8}) \\ &= w(\frac{3}{8}) + \frac{1}{2}w(\frac{2}{8}) + \frac{1}{4}w(\frac{1}{2}) \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\frac{21}{32}) &= w(\frac{21}{32}) + \frac{1}{2}w(\frac{21}{16}) + \frac{1}{4}w(\frac{21}{8}) \\ &\quad + \frac{1}{8}w(\frac{21}{4}) + \frac{1}{16}w(\frac{21}{2}) \\ &= w(\frac{11}{32}) + \frac{1}{2}w(\frac{5}{16}) + \frac{1}{4}w(\frac{5}{8}) \\ &\quad + \frac{1}{8}w(\frac{1}{4}) + \frac{1}{16}w(\frac{1}{2}) \\ &= \frac{11}{32} + \frac{5}{32} + \frac{3}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{21}{32}. \end{aligned}$$

Enfin,

$$f(\frac{2}{3}) = \sum \frac{1}{2^n} w(\frac{2^{n+1}}{3})$$

et, comme $2^k \equiv (-1)^k$ modulo 3 et que w est 1-périodique et paire, il reste

$$f(\frac{2}{3}) = \frac{1}{3}\sum \frac{1}{2^n} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Nous verrons que ce point fixe, exotique par rapport aux points binaires abscisses des minima relatifs, est en fait le point d'accumulation de la suite extraite des minima, constitutée de points fixes de f.

Analysons maintenant, les propriétés qui se dégagent des quelques points fixes que nous avons ainsi mis en évidence.

Il est logique d'effectuer un développement en base 2 de leur numérateur :

$\frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{5}{8} = \frac{1+2^2}{2^3}$

$0.656\,250 \approx \frac{21}{32} = \frac{1+2^2+2^4}{2^5} = x_4$

$0.640\,625 \approx \frac{41}{64} = \frac{1+2^3+2^5}{2^6} = x_5$ (nous verrons que cette extrapolation est parasite, mais au moment de la recherche tout était possible)

$0.664\,062\,5 \approx \frac{85}{128} = \frac{1+2^2+2^4+2^6}{2^7} = x_6$

$0.666\,015\,625 \approx \frac{341}{612} = \frac{1+2^2+2^4+2^6+2^8}{2^9} = x_9.$

Une loi semble se dégager : est-ce que, par hasard, les minima relatifs particuliers

$$\begin{aligned} x_{2p} &= \frac{1+2^2+2^4+\ldots+2^{2p}}{2^{2p+1}} \\ &= \frac{1+4+4^2+\ldots+4^p}{2\times 4^p} \\ &= \frac{4^{p+1}-1}{3\times 2\times 4^p} \\ &= \frac{2-2^{-2p-1}}{3} \to \frac{2}{3} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x_{2p+1} &= \frac{1+2^3+2^5+\ldots+2^{2p-1}}{2^{2p}} \\ &= \frac{1+8(1+4+4^2+\ldots+4^{p-2})}{4^p} \\ &= \frac{1+8(4^{p-1}-1)}{3\times 4^p} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{5}{3\times 4^p} \to \frac{2}{3} \end{aligned}$$

ne seraient pas aussi points fixes ? Remarquons qu'ils tendent bien vers le point d'accumulation $\frac{2}{3}$ prévu.

Il nous reste à le vérifier, ce que nous allons faire pour la suite x_{2p}, puis la suite x_{2p+1}.

Nous constatons que $x_{2p} = \frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{2^{2p+1}}$ (avec $p \geq 0$) et, compte tenu des propriétés de symétrie et de période de la fonction w citées plus haut, on a :

$$\begin{aligned} w(x_{2p}) &= \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{32}-\ldots-\tfrac{1}{2^{2p+1}} \\ \tfrac{1}{2}w(2x_{2p}) &= \tfrac{1}{2}w\left(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}+\ldots+\tfrac{1}{2^{2p}}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}+\ldots+\tfrac{1}{2^{2p}}\right) \\ &= \tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{32}+\ldots+\tfrac{1}{2^{2p+1}} \\ \frac{1}{2^2}w(2^2x_{2p}) &= \tfrac{1}{4}w\left(2+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{32}+\ldots+\tfrac{1}{2^{2p-1}}\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{32}-\ldots-\tfrac{1}{2^{2p-1}}\right) \\ &= \tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{32}-\ldots-\tfrac{1}{2^{2p+1}} \\ \frac{1}{8}w(8x_{2p}) &= \tfrac{1}{8}w\left(4+1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}+\ldots+\tfrac{1}{2^{2p-2}}\right) \\ &= \tfrac{1}{8}\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}+\ldots+\tfrac{1}{2^{2p-2}}\right) \\ &= \tfrac{1}{32}+\ldots+\tfrac{1}{2^{2p+1}} \\ &\vdots \\ \frac{1}{2^{2k}}w(2^{2k}x_{2p}) &= \tfrac{1}{2^{2k}}w\left(\text{entier}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{32}+\right. \\ &\qquad\qquad \left.\ldots+\tfrac{1}{2^{2p+1-2k}}\right) \\ &= \tfrac{1}{2^{2k}}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{32}-\ldots-\tfrac{1}{2^{2p+1-2k}}\right) \\ &= \tfrac{1}{2^{2k+1}}-\tfrac{1}{2^{2k+3}}-\ldots-\tfrac{1}{2^{2p+1}} \\ \frac{1}{2^{2k+1}}w(2^{2k+1}x_{2p}) &= \tfrac{1}{2^{2k+1}}w\left(\text{entier}+1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}+\right. \\ &\qquad\qquad \left.\ldots+\tfrac{1}{2^{2p-2k}}\right) \\ &= \tfrac{1}{2^{2k+1}}\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}+\ldots+\tfrac{1}{2^{2p-2k}}\right) \\ &= \tfrac{1}{2^{2k+3}}+\ldots+\tfrac{1}{2^{2p+1}} \\ &\vdots \\ \frac{1}{2^{2p}}w(2^{2p}x_{2p}) &= \tfrac{1}{2^{2p}}w\left(\text{entier}+\tfrac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2^{2p+1}} \\ \frac{1}{2^{2p+1}}w(2^{2p+1}x_{2p}) &= \frac{1}{2^{2p+1}}w(\text{entier}) = 0. \end{aligned}$$

Il est permis de sommer par paquets de deux (cardinal borné) puisque le terme général tend vers zéro. La somme est d'ailleurs finie, puisque les termes sont nuls à partir du rang $2p+1$.

On trouve bien, après réduction comme indiquée dans les lignes précédentes,

$$f(x_{2p}) = \frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{2^{2p+1}} = x_{2p}$$

et x_{2p} est bien point fixe.

De la même façon, nous constatons que

$$x_{2p+1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{2^{2p-3}}+\frac{1}{2^{2p}}$$

et, compte tenu des propriétés de symétrie et de période de la fonction w citées plus haut, on a (si $p = 2$, la seconde ligne est nulle ; si $p \leq 4$, la dixième aussi) :

Voir l'équation page 36.

Il est permis de sommer par paquets de deux (cardinal borné), puisque le terme général tend vers zéro. La somme est d'ailleurs finie, puisque les termes sont nuls à partir du rang $2p$.

On trouve, après réduction comme indiquée dans les lignes précédentes,

$$\begin{aligned} f(x_{2p+1}) &= \frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{2^{2p-3}}+\frac{1}{2^{2p}}+\frac{1}{2^{2p}} \\ &= x_{2p+1}+\frac{1}{2^{2p}} \end{aligned}$$

et x_{2p+1} n'est pas point fixe.

En fait, on peut agir beaucoup plus rapidement grâce à l'équation fonctionnelle

$$f\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{4}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}f(x) \qquad (**)$$

que nous établirons un peu plus tard.

On remarque que

$$x_{2p} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}x_{2p-2}$$

$$
\begin{aligned}
w(x_{2p+1}) &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{32} - \ldots - \tfrac{1}{2^{2p-3}} - \tfrac{1}{2^{2p}} \\
\frac{1}{2}w(2x_{2p+1}) &= \tfrac{1}{2}w\left(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \ldots + \tfrac{1}{2^{2p-4}} + \tfrac{1}{2^{2p-1}}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \ldots + \tfrac{1}{2^{2p-4}} + \tfrac{1}{2^{2p-1}}\right) \\
&= \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{32} + \ldots + \tfrac{1}{2^{2p-3}} + \tfrac{1}{2^{2p}} \\
\frac{1}{2^2}w(2^2x_{2p+1}) &= \tfrac{1}{4}w\left(2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{32} + \ldots + \tfrac{1}{2^{2p-5}} + \tfrac{1}{2^{2p-2}}\right) \\
&= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{32} - \ldots - \tfrac{1}{2^{2p-5}} - \tfrac{1}{2^{2p-2}}\right) \\
&= \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{32} - \ldots - \tfrac{1}{2^{2p-3}} - \tfrac{1}{2^{2p}} \\
\frac{1}{8}w(8x_{2p+1}) &= \tfrac{1}{8}w\left(4 + 1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \ldots + \tfrac{1}{2^{2p-6}} + \tfrac{1}{2^{2p-3}}\right) \\
&= \tfrac{1}{8}\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \ldots + \tfrac{1}{2^{2p-6}} + \tfrac{1}{2^{2p-3}}\right) \\
&= \tfrac{1}{32} + \ldots + \tfrac{1}{2^{2p-3}} + \tfrac{1}{2^{2p}} \\
&\vdots \\
\frac{1}{2^{2k}}w(2^{2k}x_{2p+1}) &= \tfrac{1}{2^{2k}}w\left(\text{entier} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{32} + \ldots + \tfrac{1}{2^{2p-2k-3}} + \tfrac{1}{2^{2p-2k}}\right) \\
&= \tfrac{1}{2^{2k}}\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{32} - \ldots - \tfrac{1}{2^{2p-2k-3}} - \tfrac{1}{2^{2p-2k}}\right) \\
&= \tfrac{1}{2^{2k+1}} - \tfrac{1}{2^{2k+3}} - \ldots - \tfrac{1}{2^{2p-3}} - \tfrac{1}{2^{2p}} \\
\frac{1}{2^{2k+1}}w(2^{2k+1}x_{2p+1}) &= \tfrac{1}{2^{2k+1}}w\left(\text{entier} + 1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \ldots + \tfrac{1}{2^{2p-2k-4}} + \tfrac{1}{2^{2p-2k-1}}\right) \\
&= \tfrac{1}{2^{2k+1}}\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \ldots + \tfrac{1}{2^{2p-2k-4}} + \tfrac{1}{2^{2p-2k-1}}\right) \\
&= \tfrac{1}{2^{2k+3}} + \ldots + \tfrac{1}{2^{2p-3}} + \tfrac{1}{2^{2p}} \\
&\vdots \ \text{trois lignes suivantes } k = p-2,\ p-1 \text{ puis } p. \\
\frac{1}{2^{2p-4}}w(2^{2p-4}x_{2p+1}) &= \tfrac{1}{2^{2p-4}}w\left(\text{entier} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{16}\right) \\
&= \tfrac{1}{2^{2p-4}}\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{16}\right) \\
&= +\tfrac{1}{2^{2p-3}} - \tfrac{1}{2^{2p}} \\
\frac{1}{2^{2p-3}}w(2^{2p-3}x_{2p+1}) &= \tfrac{1}{2^{2p-3}}w\left(\text{entier} + 1 + \tfrac{1}{8}\right) \\
&= \tfrac{1}{2^{2p-3}}\left(\tfrac{1}{8}\right) \\
&= +\tfrac{1}{2^{2p}} \\
\frac{1}{2^{2p-2}}w(2^{2p-2}x_{2p+1}) &= \tfrac{1}{2^{2p-2}}w\left(\tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{2^{2p}} \\
\frac{1}{2^{2p-1}}w(2^{2p-1}x_{2p+1}) &= \tfrac{1}{2^{2p-1}}w\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2^{2p}} \\
\frac{1}{2^{2p}}w(2^{2p}x_{2p+1}) &= \tfrac{1}{2^{2p}}w(\text{entier}) = 0 \\
&= 0 \\
\frac{1}{2^{2p+1}}w(2^{2p+1}x_{2p+1}) &= \tfrac{1}{2^{2p+1}}w(\text{entier}) = 0
\end{aligned}
$$

---

et que

$$x_{2p+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x_{2p-1}.$$

De plus, $f(x_0) = x_0 = \frac{1}{2}$ et, si par hypothèse de récurrence $f(x_{2p-2}) = x_{2p-2}$, l'équation fonctionnelle (**) assure immédiatement le transfert de cette hypothèse, puisque par elle,

$$
\begin{aligned}
f(x_{2p}) &= f(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x_{2p-2}) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x_{2p-2} \\
&= x_{2p},
\end{aligned}
$$

donc les x_{2p} $p = 0\ldots$ sont tous points fixes de f.

Par contre, $f(x_3) = \frac{1}{2} = x_3 + \frac{1}{4}$ et l'hypothèse de récurrence, vérifiée pour $p = 2$, que

$$f(x_{2p-1}) = x_{2p-1} + \frac{1}{2^{2p-2}}$$

donne

$$
\begin{aligned}
f(x_{2p+1}) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x_{2p-1} + \frac{1}{2^{2p-2}}) \\
&= x_{2p+1} + \frac{1}{2^{2p}} \\
&\neq x_{2p+1}
\end{aligned}
$$

qui n'est pas point fixe. Cette formule est d'ailleurs intéréssante par elle-même, car elle permet d'évaluer f pour une suite infinie de points.

Pas d'autres points fixes

On se propose maintenant de prouver qu'il n'existe pas d'autres points fixes que ceux que nous avons trouvés.

On pose :

$$u_p(x) = x_{2p} + \frac{x}{2^{2p=2}} \cdot \quad (R)$$

On constate que u_p est affine, croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$, que $u_p(0) = x_{2p}$ et $u_p(\frac{1}{2}) = x_{2p+2}$.

Nous allons étudier f sur cet intervalle et montrer que $f(x) - x$ s'annule aux deux extrémités et pas à l'intérieur.

On constate que :

$$u_p(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}u_{p-1}(x). \quad (*)$$

Or, pour $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, f et w étant 1-périodiques, paires et symétriques par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$, on a :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2} + x\right) &= f\left(\frac{1}{2} - x\right) \\ &= w\left(\frac{1}{2} - x\right) + \frac{1}{2}w(1-2x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} w(2^n x) \\ &= \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}w(2x) + \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n-2}} w(2^{n-2}4x) \\ &= \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}w(2x) + \frac{1}{4}f(4x). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{2} + \frac{x}{4}) &= \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2}w(\frac{x}{2}) + \frac{1}{4}f(x) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}f(x), \end{aligned}$$

soit l'équation fonctionnelle annoncée plus haut :

$$f(\frac{1}{2} + \frac{x}{4}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}f(x). \quad (**)$$

On a

$$\begin{aligned} f(u_1(x)) &= f\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{u_0(x)}{4}\right) \\ &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}f(u_0(x)) \text{ d'après } (**) \\ &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}f\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{x}{4}\right) \\ &= u_1(0) + \tfrac{1}{4^2}f(x) \text{ d'après } (**) \end{aligned}$$

Raisonnons par récurrence : supposons que l'on ait démontré (ce qui est amorcé pour $p = 1$)

$$f(u_p(x)) = u_p(0) + \frac{1}{4^{p+1}}f(x) \quad (***)$$

et montrons le transfert à l'ordre $p + 1$. On a

$$\begin{aligned} f(u_{p+1}(x)) &= f\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{u_p(x)}{4}\right) \text{ d'après } (*) \\ &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}f(u_p(x)) \text{ d'après } (**) \\ &= u_{p+1}(0) + \tfrac{1}{4^{p+2}}f(x) \\ &\qquad \text{d'après } (*) \text{ et } (***) \end{aligned}$$

et la récurrence est établie.

Pour $x = 0$, cela donne

$$f(u_p(0)) = f(x_{2p}) = x_{2p}$$

car $f(0) = 0$, et on retrouve le fait que x_{2p} est point fixe.

Mais surtout, toujours pour $0 < x < \frac{1}{2}$, on a :

$$f(x) \geq w(x) + \frac{1}{2}w(2x) = x + \frac{1}{2}w(2x) > x.$$

Comme, d'après (R), $u_p(x) = x_{2p} + \frac{x}{2^{2p+2}}$, on a

$$f(u_p(x)) = u_p(0) + \frac{1}{4^{p+1}}f(x) = x_{2p} + \frac{1}{4^{p+1}}f(x)$$

on en déduit que

$$f(u_p(x)) - u_p(x) = \frac{f(x) - x}{4^{p+1}}$$

ne s'annule pas hors des extrémités de $[x_{2p}, x_{2p+2}]$, extrémités qui sont donc les seuls points fixes de f.

Avis de recherche

Compte tenu, d'une part, de l'infinitude de points fixes, et, d'autre part, de la non monotonie (sur aucun sous-intervalle) de f, l'étude de la suite récurrente définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ risque de n'être ni classique, ni élémentaire. De même, on peut chercher à évaluer $f \circ f$ (composée de f avec elle même).

Références

[1] *Amer. Math. Monthly* **83** (1982) 331, 340 ; **100** (1993) 393, 410.

[2] J.B. Brown *et al.*, *Amer. Math. Monthly* **110** (2003) 142–147.

[3] G. De Rham, *Enseignement mathématique* (1957) 71–73.

[4] L. De Vito, *Enseignement mathématique* (1958) 281–283.

[5] S. Gonnord et N. Tosel, *Topologie et analyse fonctionnelle. Thèmes d'analyse pour l'agrégation*, Ellipses, 1996, p. 39.

[6] J.-P. Kahane, *Enseignement mathématique* (1959) 51–57.

[7] P. Levy-Bruhl, C. Servien et J. Vauthier, *Problèmes de mathématiques. Écrit du CAPES*, Masson, 1987, pp. 22–27.

[8] E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux, *Analyse 2*, Masson, 1985, pp. 57–58.

[9] L. Schwartz, *Analyse. Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Hermann, Paris, 1970, pp. 322–329.

[10] L.G. Vidiani, « Équations fonctionnelles », *Quadrature* **53** (2004) 7–12.

[11] C. Zuily et H. Quéffelec, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Masson, 1995, pp. 259–263.

Appendice. Cardinal de l'ensemble des minima des sommes partielles de la fonction de Van der Waerden

On suppose $n \geq 2$ dans la suite.

Si $2n$ est fixé, examinons la suite des pentes de la fonction affine par morceaux f_{2n} sur [0, 1/2].

Si on partage [0, 1/2] en 2^{2n} intervalles égaux de longueur $\frac{1}{2^{2n+1}}$, sur chacun d'eux la pente de f_{2n} est constante : c'est celle de

$$w(x) + \frac{1}{2}w(2x) + \frac{1}{4}w(4x) + \ldots + \frac{1}{2^{2n}}w(2^{2n}x).$$

Pour $w(x)$, les 2^{2n} pentes sont $(1, 1, 1, \ldots 1)$.

Pour $\frac{1}{2}w(2x)$, les 2^{2n} pentes sont $(1, 1, 1, \ldots 1, -1, -1, -1 \ldots -1)$, soit $+1$ sur $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ et -1 sur $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.

Pour $\frac{1}{4}w(2^2x)$, les 2^{2n} pentes sont $(1, 1, \ldots 1, -1, -1, \ldots -1, 1, 1 \ldots 1, -1, -1, \ldots -1)$, soit $+1$ sur $[0, \frac{1}{8}]$, -1 sur $\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right]$, $+1$ sur $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right]$ et -1 sur $\left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right]$,

etc.

La suite des pentes de f_{2n} sur [0, 1/2] est donc la somme de $2n + 1$ suites (ci-dessous l'exemple de $n = 2$ ($2n = 4$), la suite des pentes est la dernière ligne en gras).

2^{2n} colonnes

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
5	**3**	**3**	**1**	**3**	**1**	**1**	**-1**	**3**	**1**	**1**	**-1**	**1**	**-1**	**-1**	**-3**

$2n+1$ lignes

Numérotons $1, 2, 3 \ldots 2^{2n}$, les colonnes du tableau ci-dessus, la colonne C_i correspondant à l'intervalle $\left[\frac{i-1}{2^{2n+1}}, \frac{i}{2^{2n+1}}\right]$.

Si Z_i désigne le nombre de « 1 » de la colonne C_i, la suite des pentes $(p_1, p_2, \ldots, p_{2^{2n}})$ est telle que p_i est égal au nombre de « 1 » diminué du nombre de « -1 », soit $p_i = Z_i - (2n + 1 - Z_i) = 2Z_i - 2n - 1$.

Pour qu'il y ait minimum en $\frac{i}{2^{2n+1}}$, point commun de l'intervalle i et de l'intervalle $i + 1$, il faut et il suffit que $p_i < 0$ et $p_{i+1} > 0$, ou $2Z_i - 2n - 1 < 0$ et $2Z_{i+1} - 2n - 1 > 0$, ou encore $Z_i \leq n$ et $Z_{i+1} \geq n + 1$. On peut interpréter ceci en disant :

Pour qu'il y ait minimum en $\frac{i}{2^{2n+1}}$, il faut et il suffit que le nombre de « $+1$ », qui était minoritaire dans la colonne C_i, devienne majoritaire dans la colonne C_{i+1}.

Pour y voir plus clair et se ramener au binaire, transformons les « 1 » en « 0 » et les « -1 » en « 1 ». Le tableau ci-dessus devient :

2^{2n} colonnes

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
5	**4**	**4**	**3**	**4**	**3**	**3**	**2**	**4**	**3**	**3**	**2**	**3**	**2**	**2**	**1**

$2n+1$ lignes

Ici, Z_i est le nombre total de « 0 » de la colonne numéro i. La condition de minima $Z_i \leq n$ et $Z_{i+1} \geq n + 1$ signifie que, lors du passage[4] de la colonne i à la colonne $i + 1$, le nombre de « 0 » devient majoritaire.

Mais si chaque colonne du tableau est vue comme l'écriture d'un nombre binaire (avec les bits de poids faibles en bas), les colonnes du tableau ci-dessus sont donc vues comme la suite des écritures binaires (à $2n + 1$ bits) des entiers de 0 à $2^{2n} - 1$. Ainsi, le passage de la colonne i à la colonne $i + 1$ correspond à l'incrémentation de 1 en base 2 du nombre binaire correspondant.

Pour avoir un minimum, il faut que le bit du bas soit « 1 » sinon l'incrémentation de 1 fait diminuer le nombre des « 0 », ceux-ci ne pourraient donc pas devenir majoritaires. Cette condition n'est évidemment pas suffisante.

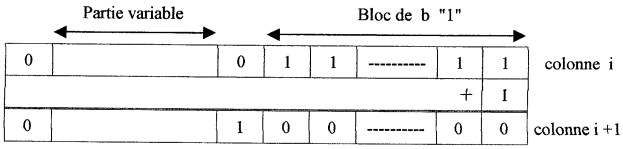
Examinons en détail ce que provoque l'incrémentation de 1 d'un nombre binaire impair de $2n + 1$ bits tels ceux des colonnes C_i, c'est-à-dire d'un nombre binaire impair de $2n + 1$ bits, le premier bit étant « 0 », le dernier bit étant « 1 » comme on vient de le voir, et contenant au moins deux « 0 ». (En effet, s'il n'y avait qu'un seul « 0 », ce serait le premier et le nombre binaire correspondant à C_i serait $(0\ 1\ 1 \ldots 1)$, c'est-à-dire celui de la dernière colonne qu'on a éliminée un peu plus haut.)

[4] On suppose bien entendu que la colonne C_i n'est pas la dernière pour que C_{i+1} existe !

Ce nombre binaire a la structure suivante : « 0 . . . 0 1 1 . . . 1 ». Plus précisément, il comprend :

- un « 0 » initial ;
- un bloc de b « 1 » terminal avec $b \geq 1$;
- un « 0 » précédant le bloc de b « 1 » et différent du « 0 » initial puisqu'on a au moins deux « 0 » ;
- ce qui reste, qu'on appelle partie variable et dont le cardinal $v = 2n - b - 1$, peut être nul.

Voici le passage de C_i à C_{i+1} après transposition (les bas de colonnes, donc les bits de poids faibles, étant à droite)[5].



Dans cette incrémentation de 1, le bloc de b « 1 » passe à 0, et le « 0 » précédant le bloc passe à « 1 » (n'oublions pas la retenue !), le reste (« 0 » initial et partie variable) étant inchangé.

Donc Z_i, le nombre total de « 0 », augmente de $b - 1$.

Notons z le nombre (invariant) de « 0 » dans la partie variable (de cardinal $v = 2n - b - 1$).

Le nombre total de « 0 », Z_i, passe de $z + 2$ avant l'incrémentation à $z + 2 + b - 1 = z + b + 1$ après. On aura donc un minimum si et seulement si $z + 2 \leq n$ et $z + b + 1 \geq n + 1$.

Cette condition implique $z \leq n - 2$ et $b \geq n - z$.

Commençons le dénombrement des minima correspondant au passage du négatif au positif dans la suite des pentes $(p_1, p_2, \ldots p_{2^{2n}})$: z peut varier de 0 à $n - 2$ et, pour z fixé, la partie variable a un cardinal v compris entre z (elle ne contient que des « 0 ») et $n+1-z$ (car $v = 2n-b-1 \leq 2n-1-(n-z) = n+z-1$).

Dans cette partie variable de cardinal v, il faut z « 0 » et on a $\binom{v}{z}$ choix.

Le nombre de minima est donc

$$M = \sum_{z=0}^{z=n-2} \sum_{k=z}^{n+z-1} \binom{k}{z} \quad \text{[on a supposé } n \geq 2 \text{ au début].}$$

Une première récurrence sur $t \geq 0$ montre que :

$$\sum_{k=z}^{z+t} \binom{k}{z} = \binom{z+t+1}{z+1}.$$

On en déduit en faisant $t = n - 1$:

$$\sum_{k=z}^{n+z-1} \binom{k}{z} = \binom{n+z}{z+1}.$$

[5] Penchez la tête d'un quart de tour à droite en regardant le deuxième tableau. . .

D'où

$$M = \sum_{z=0}^{z=n-2} \binom{n+z}{z+1}.$$

Une seconde récurrence sur $u \geq 1$ montre que :

$$\binom{2n-1}{n} = \sum_{t=1}^{u} \binom{2n-1-t}{n-t} + \binom{2n-1-u}{n-1-u}.$$

En effet, l'assertion est vraie pour $u = 1$ car :

$$\begin{aligned}\binom{2n-1}{n} &= \binom{2n-2}{n-1} + \binom{2n-2}{n} \\ &= \binom{2n-2}{n-1} + \binom{2n-2}{n-2}.\end{aligned}$$

Et si elle est vraie pour u, alors

$$\begin{aligned}\binom{2n-1}{n} &= \sum_{t=1}^{u} \binom{2n-1-t}{n-t} + \binom{2n-1-u}{n-1-u} \\ &= \sum_{t=1}^{u} \binom{2n-1-t}{n-t} + \binom{2n-2-u}{n-1-u} \\ &\quad + \binom{2n-2-u}{n-2-u} \\ \binom{2n-1}{n} &= \sum_{t=1}^{u+1} \binom{2n-1-t}{n-t} + \binom{2n-2-u}{n-2-u},\end{aligned}$$

elle est vraie pour $u + 1$.

On en déduit, en faisant $u = n - 1$ (c'est possible car $n \geq 2$) :

$$\binom{2n-1}{n} = \sum_{t=1}^{n-1} \binom{2n-1-t}{n-t} + \binom{n}{0}.$$

Et si on pose $t = n - z - 1$:

$$\binom{2n-1}{n} = \sum_{z=n-2}^{0} \binom{n+z}{z+1} + 1.$$

Donc

$$\begin{aligned}M &= \sum_{z=0}^{z=n-2} \binom{n+z}{z+1} = \binom{2n-1}{n} - 1 \\ &= \frac{1}{2}\binom{2n}{n} - 1.\end{aligned}$$

Si on ajoute les deux extrémités de [0, 1/2] qui sont des minima évidents, on obtient bien :

$$m(2n) = \frac{1}{2}\binom{2n}{n} + 1.$$

On remarque que $m(2n) = \frac{1}{2}(n + 1)\,\text{Catalan}(n) + 1$, ce qui suggère une démonstration élégante. . .

QUADRATURE

Appel à auteurs

Quadrature, magazine de mathématiques pures et appliquées, **s'adresse aux enseignants, étudiants, ingénieurs, amateurs de mathématiques**.

La plupart des articles requièrent un bon niveau de terminale scientifique ou une première année de premier cycle. Les auteurs sont des mathématiciens, des enseignants et des étudiants...

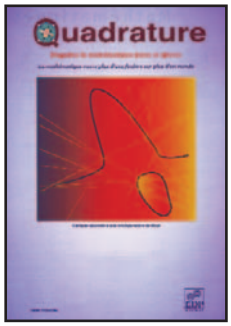
Quadrature est éclectique : certains articles présentent des mathématiques toutes récentes, tandis que d'autres donnent un nouveau point de vue sur des sujets traditionnels ou encore ressuscitent des questions de géométrie ancienne. On trouve également dans le magazine un **forum**, des **nouvelles**, des **notes de lecture**, des **articles d'histoire des mathématiques** et des **articles de réflexion en relation avec l'actualité**. Enfin, un large « coin des problèmes » permet aux lecteurs de poser des questions, qu'ils en connaissent la réponse ou pas.

Quadrature est ouvert, en particulier aux jeunes. Le magazine publie régulièrement des TPE (travaux personnels encadrés) de terminale et premier cycle d'université.

Vous souhaitez contribuer activement à la revue. Venez enrichir nos différentes rubriques et proposez-nous :

- ✔ articles de revue,
- ✔ brèves scientifiques,
- ✔ forum des lecteurs,
- ✔ manifestations,
- ✔ reportages,
- ✔ images mathématiques,
- ✔ analyses d'ouvrages et de logiciels,
- ✔ sites internet spécialisés en mathématiques,
- ✔ nouvelles, fantaisies mathématiques...

N'hésitez pas à prendre contact avec notre bureau de rédaction :



Quadrature
EDP Sciences
PA de Courtabœuf
17 avenue du Hoggar
BP 112
91944 Les Ulis Cedex A
Tél. : 01 69 18 75 75 • Fax : 01 69 07 45 17
E-mail : **quadrature@edpsciences.org**

Quadrature

Le magazine de mathématiques pures et épicées

Quadrature, magazine de mathématiques pures et appliquées, **s'adresse aux enseignants, étudiants, ingénieurs, amateurs de mathématiques**.

La plupart des articles requièrent un bon niveau de terminale scientifique ou une première année de premier cycle. Les auteurs sont des mathématiciens, mais aussi des enseignants motivés et des étudiants.

Quadrature est éclectique : certains articles présentent des mathématiques toutes récentes, tandis que d'autres donnent un nouveau point de vue sur des sujets traditionnels ou encore ressuscitent des questions de géométrie ancienne ! On trouve également dans le magazine un **forum**, des **nouvelles**, des **notes de lecture**, des **articles d'histoire des mathématiques** et des **articles de réflexion en relation avec l'actualité**. Enfin, un large "coin des problèmes" permet aux lecteurs de poser des questions, qu'ils en connaissent la réponse ou pas.

Quadrature est ouvert, en particulier aux jeunes. Le magazine publie régulièrement des TPE (travaux personnels encadrés) de terminale et premier cycle d'université.

BULLETIN D'ABONNEMENT
Quadrature

❒ Mme ❒ Mlle ❒ M.

Nom . . . . . .

Prénom . . . . . .

Profession . . . . . .

Institution . . . . . .

. . . . . .

Adresse . . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Code Postal . . . . . .

Ville . . . . . .

Pays . . . . . .

e-mail . . . . . .

Veuillez enregistrer mon abonnement :

❒ Pour **1 an** (4 numéros) :
- ❒ **Europe** (TVA 2,1% incluse) . . . . . .32 €
- ❒ **Reste du monde** (Hors Taxe) . . . . . .37 €

❒ Pour **2 ans** (8 numéros) :
- ❒ **Europe** (TVA 2,1% incluse) . . . . . .58 €
- ❒ **Reste du monde** (Hors Taxe) . . . . . .68 €

Paiement :

❒ Envoyez-moi une facture proforma

❒ Chèque joint (à l'ordre d'EDP Sciences)

❒ Carte de Crédit :

❒ Visa ❒ Eurocard ❒ American Express

Carte No . . . . . .

Date de validité . . . . . .

date/signature

Veuillez retourner ce coupon à :

EDP Sciences - Service Abonnement

17, avenue du Hoggar • B.P. 112 • PA de Courtabœuf • F-91944 Les Ulis Cedex A • France

Tél. 33 (0)1 69 18 75 75 • Fax 33 (0)1 69 86 06 78 - E-mail : subscribers@edpsciences.org

EDP SCIENCES