Quadrature

Magazine de mathématiques pures et épicées

La mathématique ouvre plus d'une fenêtre sur plus d'un monde

Mots, maths et histoire
Courbes de giration
Anses de panier
Notes de lecture
Le couvercle circulaire
Engendrer un quadrillage
Coin des probl•mes
La pyramide de Kheops

n¡ 69

Magazine trimestriel
JuilletÐSeptembre 2008
ISSN 1142-2785 Ð 8 Euros

Le couvercle circulaire

par Lazare Georges Vidiani*

I Introduction

Pour la première fois en 1899, le mathématicien allemand Heinrich Wilhelm Ewald Jung[1], dans deux articles [4, 5], envisagea et résolut le problème de la recherche du plus petit couvercle circulaire d'un ensemble de points du plan. Cette question fut reprise par Raoul Bricard [3, 6] en 1914, puis évoquée, actualisée, modernisée dans de multiples ouvrages [2], notes ou articles. Elle est aussi maintenant périodiquement le sujet de questions d'oral aux concours des grandes écoles scientifiques [1, 7–10].

Soit K un compact non vide, de diamètre δ, d'un espace affine euclidien E de dimension 2. On sait qu'étant borné (un compact est un fermé borné de E), il peut être recouvert par une boule fermée. La question est de chercher le rayon minimal R_0 d'un tel « couvercle » et de démontrer qu'il y a unicité d'un disque de rayon R_0 recouvrant K, puis de donner des directions de généralisation.

II Existence et unicité du couvercle

Comme dans un espace vectoriel réel de dimension 2, toutes les normes sont lipchitz-équivalentes, nous utiliserons la norme et la distance euclidiennes, soit $\forall x, y \in E$, $d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\|$.

Toutes nos notations sont classiques et $\forall (x, r) \in E \times \mathbb{R}^+$, $B(x, r)$, $B'(x, r)$, $S(x, r)$ désignent respectivement la boule ouverte, la boule fermée et la sphère de centre x et de rayon r.

Pour tout $a \in K$, on a $K \subseteq B'(a, \delta)$: l'ensemble des boules fermées recouvrant K n'est donc pas vide.

II.1 Existence

Nous allons montrer l'existence d'une boule fermée contenant K dont le rayon est minimal.

L'ensemble des rayons des boules fermées qui contiennent K est une partie non vide (on vient de le voir) de $\mathbb{R}^+$, il a donc une borne inférieure R_0. Par définition de la borne inférieure, pour tout entier positif n, on peut trouver une boule fermée $B(x_n, r_n)$, contenant K, avec $x_n \in E$ et $0 < r_n < R_0 + \frac{1}{n}$.

Un point a étant choisi dans $K \subseteq B(x_n, r_n)$, on a $d(a, x_n) \leq R_0 + 1$. Par conséquent, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée. On peut donc en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers une limite λ.

Pour tout $x \in K$ et tout entier n, on a $d(x, x_{\varphi(n)}) \leq R_0 + \frac{1}{\varphi(n)}$, et donc, à la limite, $d(x, \lambda) \leq R_0$, ce qui prouve que $K \subseteq B(\lambda, R_0)$.

II.2 Unicité

Supposons qu'il existe deux points distincts $\lambda \neq \lambda'$ tels que $K \subseteq B(\lambda, R_0)$ et $K \subseteq B(\lambda', R_0)$. Les deux cercles $S(\lambda, R_0)$ et $S(\lambda', R_0)$ se coupent en deux points réels (éventuellement confondus) P et Q. En effet, deux cercles réels sont ou bien extérieurs, ou bien sécants, ou bien l'un est intérieur au disque de l'autre. La première hypothèse est exclue puisqu'ils ont une partie réelle[2] commune non vide (puisque contenant K). L'inclusion du disque de l'un dans l'autre est également exclue, sinon le contenant ne serait pas de rayon minimal R_0 – ou plus simplement ici, comme les deux cercles sont de même rayon, si l'un contenait l'autre, ils serait confondus. Il ne reste donc que la possibilité d'intersection (avec tangence éventuelle).

Comme les deux cercles sont non cocentriques et de même rayon, l'axe radical perce la ligne des centres

* lg_vidiani@club-internet.fr

[1] http://www.mathematik.uni-halle.de/history/jung/index.html

[2] Ne pas oublier que deux cercles se coupent toujours aux points cycliques...

Article published by EDP Sciences and available at http://www.quadrature-journal.org or http://dx.doi.org/10.1051/quadrature:2008002

CC' au milieu A de CC'[3], donc PQ n'est un diamètre d'aucun des deux cercles et $\|\overrightarrow{PQ}\| < 2R_0$.

Alors I étant le milieu de PQ, la boule fermée $B(I, \frac{PQ}{2}) \supseteq B(\lambda, R_0) \cap B(\lambda', R_0) \supseteq K$, ce qui est contradictoire puisque $\frac{PQ}{2} < R_0$.

III Exemple

La figure 1, réalisée par Alain Esculier que nous remercions[4], présente le couvercle d'un nuage de cent points généré de manière aléatoire. On détermine un rectangle minimum contenant le nuage, puis on fait un quadrillage en partageant en 10 (par exemple) les côtés. On détermine le point M_1 de ce quadrillage pour lequel le rayon du disque de centre M_1 couvrant le nuage est minimum. On recommence le même travail sur le rectangle constitué des quatre cases du quadrillage, ayant M_1 pour l'un des sommets. Et ainsi de suite jusqu'à obtenir la précision désirée. Le centre du couvercle est le dernier M_1 et son rayon le rayon associé dans ce tri.

Le centre du couvercle est le point signalé par une croix, le cercle étant en trait plein. Nous avons signalé le centre de gravité du nuage par un carré et tracé en pointillés le cercle centré sur ce dernier point, ayant même rayon que le couvercle. Nous avons également indiqué les coordonnées du centre et le rayon du couvercle.

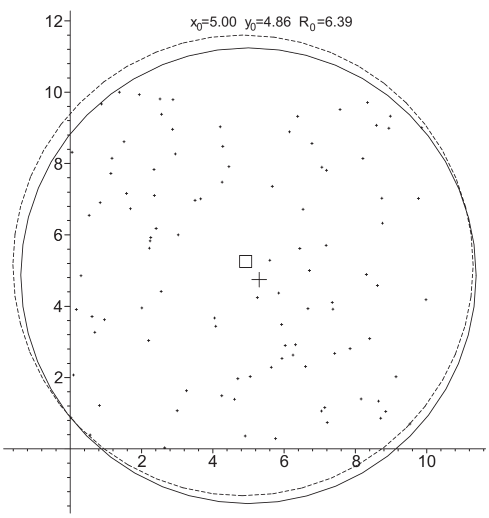


Figure 1. Couvercle d'un nuage de cent points (A. Esculier).

[3] Revoyez votre cours de terminale d'il y a quarante ans, mon vieux !

[4] Le code Maple qui l'a engendrée peut être envoyé à qui en fera la demande (`lg_vidiani@club-internet.fr`).

IV Majoration universelle du rayon du couvercle

Notre but est de donner une majoration universelle du couvercle, c'est-à-dire valable quel que soit le compact K de diamètre δ connu.

IV.1 Un lemme

Nous avons pour cela besoin du lemme suivant :

Lemme. *Tout demi-cercle fermé du cercle $S(x_0, R_0)$ contient un point de K.*

Démonstration. Soit $\overrightarrow{u}$ le vecteur unitaire, orthogonal au diamètre du demi-cercle considéré, et « extérieur » au demi-disque qu'il enferme (alias orienté « normale sortante »). Considérons le point $x_t = x_0 + t\overrightarrow{u}$, $t \in \mathbb{R}_+^*$, qui est sur la droite portant le rayon sortant perpendiculaire en x_0 au diamètre limitant le demi-cercle considéré.

Par définition du couvercle $B(x_0, R_0)$, $\forall y \in K$ $d(x_0, y) \leq R_0$.

Raisonnons par l'absurde : Si pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ on avait, pour tout $y \in K$, $d(x_t, y) \leq R_0$, cela signifierait que $B(x_t, R_0)$ serait un couvercle de K de rayon minimal et de centre $x_t \neq x_0$, ce qui est contradictoire avec l'unicité du centre x_0. Par conséquent $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists y_t \in K$ tel que $d(x_t, y_t) > R_0$. Donc $\exists y_t \in K$ vérifiant

$$d(x_0, y_t) \leq R_0 < d(x_t, y_t).$$

D'aute part, $d^2(x_t, y_t) = \|\overrightarrow{x_0y_t} - t\overrightarrow{u}\|^2 = \|\overrightarrow{x_0y_t}\|^2 - 2t(\overrightarrow{x_0y_t}|\overrightarrow{u}) + t^2\|\overrightarrow{u}\|^2$. Comme $d^2(x_t, y_t) > R_0^2$ et $\|\overrightarrow{x_0y_t}\|^2 \leq R_0^2$, on déduit de la relation précédente que $-2t(\overrightarrow{x_0y_t}|\overrightarrow{u}) + t^2\|\overrightarrow{u}\|^2 > 0$, soit, puisque $\|\overrightarrow{u}\| = 1$ et $t > 0$,

$$(\overrightarrow{x_0y_t}|\overrightarrow{u}) < \frac{t}{2}. \tag{1}$$

D'après l'inégalité triangulaire, $d(x_0, y_t) \geq |d(x_t, y_t) - d(x_t, s_0)| \geq d(x_t, y_t) - d(x_t, x_0)$, d'où

$$d(x_0, y_t) > R_0 - t. \tag{2}$$

Comme K est compact, donc fermé borné, tout point adhérent à K est dans K. De la suite d'éléments de K, $y_{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, on peut extraire une sous-suite convergente $y_{\frac{1}{\varphi(n)}} = y^*_{\varphi(n)}$ vers $y \in K$.

Par passage à la limite dans (1) et (2), on déduit que cet élément $y \in K$ vérifie $(\overrightarrow{x_0y}|\overrightarrow{u}) \leq 0$ et $d(x_0, y) = R_0$.

Ce point y de K appartient bien au demi-cercle fermé de $S(x_0, R_0)$ choisi arbitrairement, ce qui achève la démonstration du lemme annoncé.

IV.2 Majorant universel

Nous sommes maintenant en mesure de donner un majorant universel de R_0.

Posons $H = K \cap S(x_0, R_0)$.

D'après le lemme, le cardinal de H est au moins 1 et même 2, car s'il n'y avait qu'un point, il serait facile de construire un demi-cercle de $S(x_0, R_0)$ ne contenant aucun point.

- Si $\mathrm{card}(H) = 2$, $H = \{u, v\}$.

Si la corde (u, v) du cercle $S(x_0, R_0)$ n'était pas un diamètre, il existerait, d'après le lemme, un autre point de K autre que u, v, sur le grand arc de cercle (u, v) qui contient un demi-cercle.

Donc uv est un diamètre du cercle $S(x_0, R_0)$ et $R_0 = \frac{1}{2}d(u, v) \leq \frac{1}{2}\delta$. Or il est évident d'après la définition du couvercle que $R_0 \geq \frac{\delta}{2}$, donc $R_0 = \frac{\delta}{2}$ et $d(u, v) = \delta$.

- Si $\mathrm{card}(H) \geq 3$.

Soit $\{u, v, w\} \subseteq H$, c'est une base affine de E, et x_0 peut être considéré comme barycentre des trois sommets de ce triangle, soit $x_0 = \alpha u + \beta v + \gamma w$, avec $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

En outre (et c'est important pour justifier par exemple les inégalités $\alpha + \gamma \leq 1$), α, β, γ sont positifs, car, en raison du lemme, x_0 est dans l'intérieur ou sur la frontière du triangle uvw.

Pour tout $x \in E$, considérons la fonction auxiliaire (dite de Leibnitz) $f(x) = \alpha d^2(x, u) + \beta d^2(x, v) + \gamma d^2(x, w)$. Il est bien connu que $f(x) = d^2(x, x_0) + f(x_0)$. En effet, $f(x) = \alpha\|\overrightarrow{xx_0} + \overrightarrow{x_0u}\|^2 + \beta\|\overrightarrow{xx_0} + \overrightarrow{x_0v}\|^2 + \gamma\|\overrightarrow{xx_0} + \overrightarrow{x_0w}\|^2 = 1.\|\overrightarrow{xx_0}\|^2 + 2(\overrightarrow{xx_0}|\alpha\overrightarrow{x_0u} + \beta\overrightarrow{x_0v} + \gamma\overrightarrow{x_0w}) + f(x_0) = d^2(x_0, x) + f(x_0)$, puisque $\alpha\overrightarrow{x_0u} + \beta\overrightarrow{x_0v} + \gamma\overrightarrow{x_0w} = \overrightarrow{x_0x_0} = \overrightarrow{0}$.

Comme $R_0 = d(x_0, u) = d(x_0, v) = d(x_0, w)$, on a $f(x_0) = R_0^2$ et $f(u) = f(v) = f(w) = 2R_0^2$.

Mais on a aussi $f(u) = \beta d^2(u, v) + \gamma d^2(u, w) \leq (\beta + \gamma)\delta^2$, et de même $f(v) \leq (\alpha + \gamma)\delta^2$ et $f(w) \leq (\alpha + \beta)\delta^2$. Les inégalités sont justifiées car α, β, γ sont positifs.

Par suite $6R_0^2 = f(u) + f(v) + f(w) \leq 2\delta^2$ et donc

$$R_0 \leq \frac{\delta}{\sqrt{3}}.$$

La quantité $\frac{\delta}{\sqrt{3}}$ est donc un majorant universel pour le rayon du couvercle d'un compact de diamètre δ.

Remarque. Le suivi des inégalités prouve qu'il n'y a égalité que si $d(u, v) = d(v, w) = d(w, u) = \delta$, autrement dit que si H contient un triangle équilatéral de côté δ.

V Généralisation

Dans le cas d'espace E de dimension $d \geq 3$, l'utilisation des théorèmes de Carathéodory et de Hahn-Banach permet de généraliser la majoration précédente en (pour $d = 2$ on retrouve le résultat que nous avons établi)

$$R_0 \leq \delta\sqrt{\frac{d}{2(d+1)}}.$$

Le lecteur pourra consulter [2, 7].

On peut même prouver, en utilisant l'unicité du « couvercle » de K, que si G_K est l'ensemble des isométries affines g de $\mathbb{R}^d$ telles que $g(K) \subseteq K$, alors il y a un point fixe commun à tous les éléments de G_K et qu'en outre G_K est compact.

On peut aussi se poser la question de l'évolution du maximum du rayon du couvercle en fonction de la norme choisie dans E, le calcul précédent n'ayant été fait que dans le cas euclidien.

Références

[1] F. Aubonnet et D. Guinin, « Oral : exercices résolus », crus 1980-1981, Bréal, 1981, pp. 24–26.

[2] M. Berger, *Géométrie*, Tome 3, Cédic, Fernand Nathan, 1978, pp. 46–49.

[3] R. Bricard, « Théorème sur les courbes et les surfaces fermées », *Nouvelles annales de mathématiques* (1914).

[4] H.W.E. Jung, « Über den kleinsten Kugel, die eine räumliche Figur einschliesst » (Sur la plus petite boule contenant une figure de l'espace), Dissertation Marburg 1899, abgedruckt in *J. reine angew. Math.* **123** (1901) 241–257 (Journal dit de Crelle).

[5] H.W.E. Jung, « Über den kleinsten Kreis, der aine ebene Figur einschliesst » (Sur le plus petit cercle qui contient une figure plane), *J. reine angew. Math.* **137** (1910) 310–313.

[6] H. Lebesgue, « En marge du calcul des variations », *Monographie de l'enseignement mathématique* **12** (1963) 42–54.

[7] É. Leichtnam, *Exercices corrigés de mathématiques, algèbre et géométrie*, Ellipses, 1999, pp. 365–367.

[8] J. Pàl, *Note : nouvelles annales*, 1915.

[9] *Revue de Mathématiques Spéciales* (mai-juin 1995) 789–791.

[10] *Revue de Mathématiques Spéciales* (mai-juin 1997) 853–854.

QUADRATURE

Appel à auteurs

Quadrature, magazine de mathématiques pures et appliquées, **s'adresse aux enseignants, étudiants, ingénieurs, amateurs de mathématiques**.

La plupart des articles requièrent un bon niveau de terminale scientifique ou une première année de premier cycle. Les auteurs sont des mathématiciens, des enseignants et des étudiants...

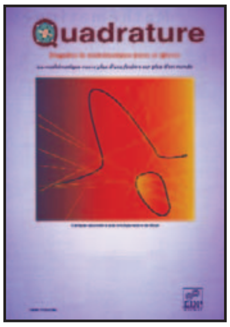
Quadrature est éclectique : certains articles présentent des mathématiques toutes récentes, tandis que d'autres donnent un nouveau point de vue sur des sujets traditionnels ou encore ressuscitent des questions de géométrie ancienne. On trouve également dans le magazine un **forum**, des **nouvelles**, des **notes de lecture**, des **articles d'histoire des mathématiques** et des **articles de réflexion en relation avec l'actualité**. Enfin, un large « coin des problèmes » permet aux lecteurs de poser des questions, qu'ils en connaissent la réponse ou pas.

Quadrature est ouvert, en particulier aux jeunes. Le magazine publie régulièrement des TPE (travaux personnels encadrés) de terminale et premier cycle d'université.

Vous souhaitez contribuer activement à la revue. Venez enrichir nos différentes rubriques et proposez-nous :

- ✔ articles de revue,
- ✔ brèves scientifiques,
- ✔ forum des lecteurs,
- ✔ manifestations,
- ✔ reportages,
- ✔ images mathématiques,
- ✔ analyses d'ouvrages et de logiciels,
- ✔ sites internet spécialisés en mathématiques,
- ✔ nouvelles, fantaisies mathématiques...

N'hésitez pas à prendre contact avec notre bureau de rédaction :



Quadrature
EDP Sciences
PA de Courtabœuf
17 avenue du Hoggar
BP 112
91944 Les Ulis Cedex A
Tél. : 01 69 18 75 75 • Fax : 01 69 07 45 17
E-mail : **quadrature@edpsciences.org**

Quadrature

Le magazine de mathématiques pures et épicées

Quadrature, magazine de mathématiques pures et appliquées, **s'adresse aux enseignants, étudiants, ingénieurs, amateurs de mathématiques**.

La plupart des articles requièrent un bon niveau de terminale scientifique ou une première année de premier cycle. Les auteurs sont des mathématiciens, mais aussi des enseignants motivés et des étudiants.

Quadrature est éclectique : certains articles présentent des mathématiques toutes récentes, tandis que d'autres donnent un nouveau point de vue sur des sujets traditionnels ou encore ressuscitent des questions de géométrie ancienne ! On trouve également dans le magazine un **forum**, des **nouvelles**, des **notes de lecture**, des **articles d'histoire des mathématiques** et des **articles de réflexion en relation avec l'actualité**. Enfin, un large "coin des problèmes" permet aux lecteurs de poser des questions, qu'ils en connaissent la réponse ou pas.

Quadrature est ouvert, en particulier aux jeunes. Le magazine publie régulièrement des TPE (travaux personnels encadrés) de terminale et premier cycle d'université.

BULLETIN D'ABONNEMENT
Quadrature

❒ Mme ❒ Mlle ❒ M.

Nom . . . .

Prénom . . . .

Profession . . . .

Institution . . . .

. . . .

Adresse . . . .

. . . .

. . . .

Code Postal . . . .

Ville . . . .

Pays . . . .

e-mail . . . .

Veuillez enregistrer mon abonnement :

❒ Pour **1 an** (4 numéros) :
- ❒ **Europe** (TVA 2,1% incluse) . . . . .32 €
- ❒ **Reste du monde** (Hors Taxe) . . . . .37 €

❒ Pour **2 ans** (8 numéros) :
- ❒ **Europe** (TVA 2,1% incluse) . . . . .58 €
- ❒ **Reste du monde** (Hors Taxe) . . . . .68 €

Paiement :

❒ Envoyez-moi une facture proforma
❒ Chèque joint (à l'ordre d'EDP Sciences)
❒ Carte de Crédit :
❒ Visa ❒ Eurocard ❒ American Express
Carte No . . . .
Date de validité . . . .

date/signature

EDP SCIENCES

Veuillez retourner ce coupon à :

EDP Sciences - Service Abonnement

17, avenue du Hoggar • B.P. 112 • PA de Courtabœuf • F-91944 Les Ulis Cedex A • France
Tél. 33 (0)1 69 18 75 75 • Fax 33 (0)1 69 86 06 78 - E-mail : subscribers@edpsciences.org