(version dimanche 13 janvier 2008 : 17h50)

L.G.Vidiani 64 rue de l'EUROPE 21121 FONTAINE LÈS DIJON TEL : 03 80 56 65 54
Adresse email Internet : $lg\_vidiani@club-internet.fr$

LA SÉRIE ENTIÈRE DE HARDY

(emtex travail zip def Aming61.tex) version 13 01 2008 17h45

Le problème des Mines 1961 proposait au lecteur de déterminer le rayon de la série entière de terme général : $\frac{z^n}{\sin(\pi n\sqrt{2})}$. Cette question se retrouve depuis cette date dans de nombreux livres d'exercices et des listes de questions d'oral proposées aux candidats aux concours des grandes écoles scientifiques.

Je considérais depuis longtemps la question close, lorsqu'un échange en juin 2007 sur le forum ups-math de professeurs de Mathématiques Spéciales, attira l'attention sur la planche 27-1 des oraux posés en 2006 aux candidats admissibles à l'École Polytechnique, option MP (ceux de 2007 débutent en juin-juillet 2007) de l'Officiel de la taupe. Il s'agissait de déterminer le rayon, noté R_y, de la série entière de terme général : $\frac{z^n}{\sin(\pi ny)}$, où y est réel non rationnel. Puisque $|\frac{z^n}{\sin(\pi ny)}| \geq |z^n|$, on a $\mathbf{R_y} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$. (*)

Il ne faut jamais dire "Fontaine je ne boirai plus de ton eau", en sciences tout travail reste ouvert : cette série est historique et c'est Hardy (avec son complice Littlewood) qui en 1946 "en passant", dans les premières lignes de [4], d'un air détaché, avec une assurance élégante et superbe de grand seigneur, dit que les séries de ce type sont "familières" et négligemment, comme si cela était une évidence, proclame qu'il est bien connu que son rayon, noté R_y, peut prendre selon le choix de y, toute valeur de $[0, 1]$. *(Le résultat semble être donc connu bien avant 1946, et tout lecteur en sachant plus est prié de me le communiquer : j'ai cherché, sans succès jusqu'à la date indiquée au début de l'article, dans des ouvrages spécialisés, sur google, posé la question dans des forums (ou fora) internationaux tels que sci.math et mathlinks et dans les annales numérisées JSTOR du Monthly avec les mots clefs : power series et radius of convergence)*

Pour les raisons que j'ai expliquées dans le préambule, toutes les références sont mises dans le résumé de l'article et je vous incite en particulier à lire et assimiler le point de vue "ergodique" dans [1] page 134.

Mon exposé n'est pas original, il est très inspiré du remarquable article de Hervé Queffélec : "D'une remarque in passing des œuvres complètes de Hardy aux fractions continues" p 127-138 du passionnant ouvrage [1] : Les nombres (Ellipses 2000) qui contient 12 autres pépites. Il a pour but d'attirer l'attention et inciter le lecteur à se le procurer (**) et à approfondir ce que je n'ai fait que survoler et condenser. Mon but étant surtout de rendre accessible ce remarquable chapitre, au lecteur du niveau Mathématiques-Spéciales.

-I- Où l'on construit par étapes, une nouvelle version de la formule d'Hadamard, plus adaptée au développement en fraction continuée de y.

• **La clef, le joker, le fil conducteur du calcul est la formule d'Hadamard pour le rayon.** *(Revoyez votre cours de mathématiques spéciales "mon vieux" !) Les liens historiques vers Hadamard et son fabuleux rébus sont mis dans le résumé préambule, pour que les lecteurs habitués à Culture Math, n'aient qu'à cliquer.*

Rappelons cette formule dont le lien est mis aussi dans la présentation de l'article : Pour une série entière de terme général $a_n z^n$, le rayon est donné par la formule $R = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$ (H1). Lorsque $a_n = \frac{1}{b_n}$ avec b_n jamais nul, il est immédiat que $\boxed{R = \underline{\lim}\sqrt[n]{|b_n|}\ \mathbf{(H2)}}$. Ici nous avons donc $\boxed{\mathbf{R_y} = \underline{\lim}\sqrt[n]{|\sin \pi ny|}\ \mathbf{(H'2)}}$

Notons $(\mathbf{E_s})$ l'ensemble des $y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tels que $R_y = s$.

Il est immédiat de vérifier par (H'2) que $\boxed{\mathbf{R_{-y} = R_y}}$, (E_s) est symétrique par rapport à 0 et comme $|\sin(\pi n(y+1))| = |\sin(\pi ny)|$ on a $\boxed{\mathbf{R_{y+1} = R_y}}$, par conséquent E_s est non seulement symétrique par rapport à 0 mais aussi globalement invariant par la translation unité. Tout revient à étudier la série proposée sur $]0, \frac{1}{2}[$. Par exemple $R_\pi = R_{\pi-3}$, $R_e = R_{3-e}$, $R_{\sqrt{5}} = R_{\sqrt{5}-2}$.

(*) *Vu l'intervention des fractions continuées, dont la théorie est absente du cours de mathématiques Spéciales, et vu ce qui suit et [1], on est en droit de se demander comment un candidat, certes admissible pouvait traiter une telle question dans le temps imparti (50 minutes pour le grand oral), et ce qu'attendait exactement l'examinateur, qu'espérait-il ? quelles indications donnait-il ? s'il me lit j'aimerais qu'il rentre en contact avec moi : comment juger un candidat sur une telle question ?*

(**) *Vous n'hésitez pas à acheter des cigarettes ou des gadgets inutiles, alors que l'achat d'un livre permet de progresser intellectuellement et la consultation même à 2 heures du matin pour fixer un point que la mémoire avait oubliée. La vraie culture ce n'est pas (que) le sport ! L'argent est un bon serviteur et un mauvais maître (rouge, une masérati rouge).*

• Pour permettre de calculer le rayon au moyen du développement en fraction continuée de y, donnons une autre expression de ce rayon.

$\forall u \in \mathbb{R}$ posons $||u||$ = distance de u à l'entier le plus voisin de u soit $||u|| = \inf\limits_{p\in\mathbb{Z}} |u-p|$ (*)

Elle est 1−périodique et ses valeurs sont dans $[0, \frac{1}{2}]$. Elle va nous permettre de faire disparaître la fonction *sinus* dans l'expression du rayon.

Comme $\forall v \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\frac{2}{\pi}v \leq \sin v \leq v$ *(L'inégalité de gauche provient de la convexité du sinus sur cet intervalle : son graphe est au dessus de la corde qui joint l'origine au point* $(\frac{\pi}{2}, 1)$ *; cela peut aussi se faire en étudiant la fonction différence (afin d'avoir son signe)* $\sin v - \frac{2}{\pi}v$ *sur l'intervalle cité ; l'inégalité de droite s'interprète géométriquement par le fait que le graphe de la fonction sinus sur l'intervalle* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *est en dessous de la première bissectrice et se prouve en étudiant la fonction différence* $v - \sin v$*).*

Comme toutes les fonctions considérées sont impaires on a $\forall v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\frac{2}{\pi}|v| \leq |\sin v| \leq |v|$.

On pose $u = p + r$ avec $|r| = ||u||$ et comme $|r| \leq \frac{1}{2}$ on a $\pi|r| \leq \frac{\pi}{2}$.

L'inégalité précédemment prouvée donne $2||u|| = 2|r| = \frac{2}{\pi}\pi|r| \leq |\sin \pi r| = |\sin \pi u| \leq \pi|r| = \pi||u||$.

La spécialisation $u = qy$ donne $2||qy|| \leq |\sin \pi qy| \leq \pi||qy||$

La croissance de la fonction racine q-ième induit $2^{\frac{1}{q}}||qy||^{\frac{1}{q}} \leq |\sin \pi qy|^{\frac{1}{q}} \leq \pi^{\frac{1}{q}}||qy||^{\frac{1}{q}}$

D'où $\pi^{\frac{-1}{q}}|\sin \pi qy|^{\frac{1}{q}} \leq ||qy||^{\frac{1}{q}} \leq 2^{\frac{-1}{q}}|\sin \pi qy|^{\frac{1}{q}}$.

Comme de plus $\underline{\lim}\ u_q v_q = \lim u_q \underline{\lim}\ v_q$ lorsque les deux suites sont positives et que l'une (ici u_q) a une limite, on déduit : $\boxed{\mathbf{R_y} = \underline{\lim}\ \sqrt[q]{||qy||}\ \mathbf{(H"2)}}$ qui se prête mieux à l'utilisation du développement en fraction continuée de y.

• Nous allons enfin démontrer une dernière formule (H"'2)=(H3)=(Hadamard 3) encore plus adaptée à l'utilisation du développement en fraction continuée de y, et surtout pour permettre la construction de nombres y correspondant à un rayon R_y arbitrairement choisi. (**)

(Les résultats utilisés sur les développements en fractions continuées sont ceux rappelés dans le préambule : ceux donnés en lien vers Wikipedia, ou par exemple [6] p 19, qui est dans toutes les bonnes bibliothèques universitaires ; On peut aussi consulter [2] ou [3] ou encore mieux [5])

Nous utilisons la notation classique $y = (a_0, a_1, ..., a_n, ...)$ où les a_j sont les quotients partiels de y et
$\begin{cases} p_0 = a_0,\ p_1 = a_0a_1 + 1,\ p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1},\ n \geq 1 \\ q_0 = 1,\ q_1 = a_1,\ q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1},\ n \geq 1 \end{cases}$ où $\frac{p_n}{q_n} = (a_0, ..., a_n)$ est la réduite numéro n de y.

Nous allons prouver que $\boxed{\mathbf{R_y} = \underline{\lim}\ ||\mathbf{qy}||^{\frac{1}{q}} = \underline{\lim}\ \mathbf{a_{n+1}^{\frac{-1}{q_n}}}\ \mathbf{(H3)=(H"'2)}}$

Posons $\ell(y) = \underline{\lim}\ ||qy||^{\frac{1}{q}}$ et $\lambda(y) = \underline{\lim}\ a_{n+1}^{\frac{-1}{q_n}}$ et démontrons leur égalité en prouvant leur double inégalité large.

•• $\leq$.

$$a_{n+1}q_n \leq a_{n+1}q_n + q_{n-1} \underset{(q_n \text{ croissante})}{\leq} a_{n+1}q_n + q_n = (a_{n+1}+1)q_n \underset{(1 \leq a_{n+1} \text{ car y est irrationnel})}{\leq} 2a_{n+1}q_n.$$

De plus $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} > (a_{n+1}+1)q_{n-1} \geq 2q_{n-1}$ donc $|y - \frac{p_n}{q_n}| \leq \frac{1}{q_nq_{n+1}} < \frac{1}{2q_nq_{n-1}} \underset{(n\geq 1)}{\leq} \frac{1}{2q_n}$.

De plus $|q_ny - p_n| < \frac{1}{2}$ pour $n \geq 2$ donc $\boxed{||\mathbf{q_ny}|| = |\mathbf{q_ny} - \mathbf{p_n}|\ \mathbf{(N)}}$.

Pour $q = q_n, ||qy|| = ||q_ny|| = |q_ny - p_n| \leq \frac{1}{q_{n+1}}$ donc $\ln||q_ny|| \leq \ln(\frac{1}{q_{n+1}})$ et $\frac{1}{q_n}\ln||q_ny|| \leq \frac{1}{q_n}\ln(\frac{1}{q_{n+1}}) \leq \frac{1}{q_n}\ln(\frac{1}{a_{n+1}q_n+q_{n-1}}) \leq \frac{1}{q_n}\ln(\frac{1}{a_{n+1}q_n}) \leq \frac{\ln(1/a_{n+1})+\ln(1/q_n)}{q_n}$ et comme $\frac{1}{q_n}\ln(\frac{1}{q_n}) = -\frac{\ln q_n}{q_n}$ tend vers zéro on déduit que :
$\underline{\lim}\frac{\ln||qy||}{q} \underset{\text{(spécialisation)}}{\leq} \underline{\lim}\frac{\ln||q_ny||}{q_n} \leq \underline{\lim}\frac{\ln(1/a_{n+1})+\ln(1/q_n)}{q_n} = \underline{\lim}\frac{\ln\frac{1}{a_{n+1}}}{q_n}$ et en prenant l'exponentielle des deux membres extrêmes $\boxed{\ell(y) \leq \lambda(y)}$

•• $\geq$. Pour tout $q \geq 1$ soit n tel que $q_n \leq q < q_{n+1}$ (il en existe car $q_0 = 1$) ; comme $||qy|| \leq \frac{1}{2} < 1$ on a $\ln(||qy||) < 0$.

$\frac{1}{q} \leq \frac{1}{q_n}$ par conséquent $\frac{\ln(||qy||)}{q} \geq \frac{\ln(||qy||)}{q_n}$

(*) *Cette fonction est très utile, par exemple pour l'étude de la fonction de van der Waerden, continue, dérivable nulle part (voir un (excellent) article, qui outre le graphe donne aussi les points fixes de cette fonction, les extrémas de tous types et son caractère Hölderien, et que Quadrature a déja converti en pdf, il y a trois ans, mais pas encore publié....)*

(**) *La démonstration ressemble à celle utilisée pour la comparaison des critères de Cauchy et de d'Alembert pour les séries :* $\underline{\lim}\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \underline{\lim}\ \sqrt[n]{u_n} \leq \overline{\lim}\ \sqrt[n]{u_n} \leq \overline{\lim}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *; tout lecteur ayant une idée pour expliquer que cette ressemblance n'est par fortuite ou n'est qu'une simple coïncidence, pourra me contacter et sera le bienvenu.*

Comme nous avons besoin de minorer $||qy||$ par $||q_n y||$ pour $q_n \leq q < q_{n+1}$ il nous faut absolument, pour ce faire, un petit intermède.

(***) Début de l'intermède ([1] p 133 et [5] p 151-152)

Cherchons (p,q) comme "barycentre" de $M_n = (p_n, q_n)$ *et de* $M_{n+1} = (p_{n+1}, q_{n+1})$ *: Le système en a,b* $\begin{cases} p = ap_n + bp_{n+1} \\ q = aq_n + bq_{n+1} \end{cases}$ *est de déterminant* $p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n = (-1)^n$ *(d'après les propriétés des fractions continuées) donc cramérien, et les formules de Cramer donnent* $a = (-1)^n \begin{vmatrix} p & p_{n+1} \\ q & q_{n+1} \end{vmatrix}$ *et* $b = (-1)^n \begin{vmatrix} p_n & p \\ q_n & q \end{vmatrix}$ *sont des entiers relatifs.*

- *Comme de plus* $|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - y| < |\frac{p_n}{q_n} - y|$ *car chaque réduite approche plus de y que la réduite précédente (par exemple [6] p 20) et que* $|\frac{p_n}{q_n} - y| \geq \frac{1}{2q_n q_{n+1}}$ *on a :*

$$||q_n y|| \underset{(N)}{=} |q_n y - p_n| \geq \frac{1}{2q_{n+1}}. \text{ (***)}$$

Enfin comme chaque réduite approche plus de y que tout rationnel de dénominateur plus petit que q_n*, on a* $|\frac{p}{q} - y| \leq |\frac{p_n}{q_n} - y| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}$.

donc $|qy - p| \leq \frac{q}{q_{n+1}} \frac{1}{q_n} \underset{(\text{rappel } q < q_{n+1})}{<} \frac{1}{q_n} \leq \frac{1}{2}$ *dès que* $n \geq 2$. *Donc* $\boxed{|p - qy| = ||qy||}$

Donc $||qy|| = |qy - p| = |a(q_n y - p_n) + b(q_{n+1} y - p_{n+1})|$.

$$\begin{cases} \bullet\ a \neq 0 & \text{car sinon } q = bq_{n+1} \text{ donc } b > 0 \text{ comme } q \text{ et } q_{n+1} \text{ et donc } q \geq q_{n+1} \text{ ce qui est écarté} \\ \bullet\ ab \leq 0 & \text{car sinon } ab > 0 \text{ et donc vus les signes de } p, p_n, p_{n+1}, ..\ a > 0, b > 0 \text{ et encore } q \geq bq_{n+1} \geq q_{n+1} \end{cases}$$

(Il serait bon d'interpréter ce dernier fait qui prouve que (p,q) est à l'extérieur du segment $[M_n, M_{n+1}]$*.)*

Comme $q_n y - p_n$ *et* $q_{n+1} y - p_{n+1}$ *sont de signe opposés (une des propriétés des fractions continuées : par exemple [6] p 19), ainsi que a et b, on a* $||qy|| = |qy - p| = |a(q_n y - p_n) + b(q_{n+1} y - p_{n+1})| = |a||q_n y - p_n| + |b||q_{n+1} y - p_{n+1}| \geq |a||q_n y - p_n| = |a|||q_n y|| \geq ||q_n y||$.

Fin de l'intermède

La conclusion de l'intermède nous donne

$$\frac{\ln(||qy||)}{q} \geq \frac{\ln(||qy||)}{q_n} \geq \frac{\ln(||q_n y||)}{q_n} \underset{(***)}{\geq} \frac{1}{q_n} \ln(\frac{1}{2q_{n+1}}) = \frac{1}{q_n} \ln(\frac{1}{2(a_{n+1} q_n + q_{n-1})}) \underset{(q_{n-1} < q_n)}{\geq} \frac{1}{q_n} \ln(\frac{1}{2(a_{n+1} q_n + q_n)}) \underset{(a_{n+1} \geq 1)}{\geq}$$

$\ln(\frac{1}{4a_{n+1} q_n}) \geq \frac{1}{q_n}(\ln(\frac{1}{a_{n+1}}) + \ln(\frac{1}{4q_n}))$ et comme le dernier terme tend vers zéro

$\underline{\lim} \frac{\ln ||qy||}{q} \geq \underline{\lim} \frac{1}{q_n} \ln(\frac{1}{a_{n+1}})$ et en prenant l'exponentielle des deux membres $\ell(y) \geq \lambda(y)$ et l'égalité annoncée.

Cette formule va nous permettre de trouver des nombres y_ε tels que R_{y_ε} soit égal à un nombre arbitrairement choisi ε de $[0, 1]$.

Mais auparavant expliquons pourquoi ce choix devra être judicieux et guidé, parce que les y tels que $R_y \neq 1$ *sont exotiques, marginaux et sporadiques.*

-II- Où l'on explique pourquoi les y tels que $\mathbf{R_y} \neq 1$ sont "rares".

- **$\mathbf{R_y = 1}$ sauf sur un ensemble négligeable de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.**

D'après la formule $\boxed{\mathbf{R_y} = \underline{\lim} \sqrt[n]{|\sin \pi n y|}}$, il suffit de prouver que $\sqrt[n]{|\sin \pi n y|}$ tend vers 1, sauf sur un ensemble de mesure nulle, pour y, ou ce qui revient au même que $\frac{1}{n} \ln |\sin \pi n y|$ (ou encore son carré $f_n(y) = n^{-2}(\ln(|\sin \pi n y|)^2 = \frac{1}{n^2} f(ny)$, où l'on a posé $f(x) = \ln |\sin \pi x| = f_1(x)$), tend vers 0 sur un tel ensemble, pour en déduire que sur cet ensemble $R_y = 1$.

Pour cela on va utiliser le théorème spécial d'interversion série-intégrale : Chaque fonction (f_n) étant intégrable sur $I = [0, 1]$, comme on le vérifie rapidement,

$f_n(y) = \frac{1}{n^2}(\ln|\sin(n\pi y)|)^2$.
Comme $0 \leq y \leq 1 \longrightarrow 0 \leq \pi yn \leq n\pi$, f_n *est continue et bornée sauf aux points* $y_k = k,\ k = ..n$.

$$f_n(y) = \frac{1}{n^2}\ln^2|\sin(n\pi(y-k+k))| = \frac{1}{n^2}\ln^2|\sin(n\pi(y-k))| \underset{k}{\sim} \frac{1}{n^2}\ln^2(n\pi|y-k|).$$

Tout revient donc à prouver que chaque intégrale $\int_k^{k+1/2}\ln^2(n\pi|y-k|)dy$ *converge.*
Or si l'on fait le changement de variable $n\pi(y-k) = t$, *on ne ramène à étudier* $\int_0^{n\pi/2}\ln^2 t dt$, *qui converge car en intégrant par parties deux fois (le vérifier) on a* $\int \ln^2 t dt = t(\ln^2 t) - 2t\ln(t) + 2t$, *dont les trois termes ont une limite finie en* 0 *(le premier car* $t(\ln t)^2 = (2\sqrt{t}\ln(\sqrt{t}))^2$*).*

On vérifiera que la série $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 |f_n|$ converge (d'ailleurs les f_n sont de signe constant positif sur I). Alors $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge presque partout vers une fonction f intégrable, et $\int_I f dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_I f_n dx$.

Pour éviter l'utilisation du théorème de la convergence monotone dû en 1906 à Beppo Levi, et que l'on trouve par Google sur Wikipédia ou dans les bons ouvrages par exemple théorie de l'intégration par Pagès et Briane (Vuibert 1998) page 114, je fais une démonstration directe, qui a l'avantage d'être accessible aux élèves du niveau terminale (scientifique).

En effet
$$u_N = \int_0^1 \sum_{n=1}^{N} f_n(t)dt \underset{\text{(Linéarité de l'intégrale)}}{=} \sum_{n=1}^{N}\int_0^1 f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{N} n^{-2}\int_0^1 f(nx)dx$$
$$\underset{\text{(car } f_1 \text{ est 1-périodique)}}{=} \sum_{n=1}^{N} n^{-2}\int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 f(x)\zeta(2) < +\infty,$$ puisque f est intégrable sur I.

Par conséquent, d'après le théorème d'interversion des limites $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge presque partout vers une fonction intégrable et $f_n(x) \to 0$ presque pour tout x sur I.

E_1 étant $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ privé d'un ensemble de mesure nulle, a donc la puissance du continu.

-III- Où l'on montre que $\mathbf{R_y}$ peut, selon le choix de y, prendre toute valeur ε dans $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$.

Nous avons maintenant, les moyens techniques de montrer que le rayon R_y, peut suivant le choix de y_ε, prendre toute valeur ε dans $[0,1]$.

y_ε sera défini par son développement en fraction continuée $y_\varepsilon = (a_0, a_1, ..., a_n, ...)$ avec par exemple, puisque $R_{y+1} = R_y$, $a_0 = [y] = 0$, $p_0 = 0$, $q_0 = 1$.

$\boxed{\bullet\ \varepsilon = 0}$ Si $\mathbf{a_{n+1} = E(e^{nq_n})}$ $a_{n+1} \leq e^{nq_n} < a_{n+1}$
donc $e^{nq_n} - 1 < a_{n+1} \leq e^{nq_n}$
$e^{nq_n}(1 - e^{-nq_n}) < a_{n+1} \leq e^{nq_n}$ et nous pouvons alors utiliser la formule (H3) :

$$\boxed{\mathbf{R_y} = \underline{\lim}\ ||\mathbf{qy}||^{\frac{1}{\mathbf{q}}} = \underline{\lim}\ \mathbf{a_{n+1}^{\frac{-1}{q_n}}}\ \textbf{(H3)=(H''2)}}$$

$a_{n+1}^{\frac{-1}{q_n}} = e^{-1/q_n \ln(a_{n+1}}$
$\frac{nq_n + \ln(1-e^{-nq_n})}{q_n} < \frac{\ln(a_{n+1}}{q_n} \leq \frac{nq_n}{q_n}$
soit $n + \frac{\ln(1-e^{-nq_n})}{q_n} < \frac{\ln(a_{n+1}}{q_n} \leq n$ et en multipliant les trois membres par -1 (donc en n'oubliant pas de changer le sens des inégalités !) :

$-n \leq \frac{\ln(a_{n+1}}{q_n} < -n - \frac{\ln(1-e^{-nq_n})}{q_n} - n\big(1 + \frac{\ln(1-e^{-nq_n})}{nq_n}\big) \sim -n$ donc $\frac{\ln(a_{n+1}}{q_n} \to -\infty$ n et $a_{n+1}^{\frac{-1}{q_n}} \to 0$ et pour ce y_0 (défini par son développement $(0, 1, E(e), ...)$ $R_{y_0} = 0$.

Un exemple précis $y = 0,7539052500... = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{256^{256}} + ...$ sans l'utilisation de fraction continuée, est donné dans [7] p 8,10-12 exercice 4 questions c,d.

$\boxed{\bullet\ \varepsilon = 1}$ Si $\mathbf{a_{n+1} = O(q_n^\alpha)}$ soit $a_{n+1} = K_n q_n^\alpha$ avec $K_n > 0$ borné, avec $\alpha \geq 0$, ce qui est le cas de grandes catégories de nombres (nous avons vu pourquoi) par exemple :

y est le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $a_k = 1$	$\alpha = 0$	
$y = \sqrt{2} = (1, 2, 2, ...)$	$\alpha = 0$	Râmis ex d'analyse (Masson 1968) p 265-266, [7] p 8 ex 4a
e car (Parent p266 ligne 6) $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{3n+1} = a_{3n+3} = 1 \\ a_{3n+2} = 2(n+1) \end{cases}$	$\alpha = 1$	Une autre preuve du développement de e est dans le Mathemathical American Monthly Janvier 2006 p 57-66 et Duverney Théorie des nombres (Dunod 1998) p 36 et la preuve qu'il est MA (cf infra) p 114. Il y est d'ailleurs prouvé que $d = 2$.
Plus généralement tous les algébriques non rationnels		[7] p 8 et 11 ex 4.b ; Il sont MA (cf infra) d'après Liouville ou réf [5] p 138 de [1]
Tous les nombres mal approchables (δ, d)-MA) : x est MA (donc irrationnel) si $\exists \delta, d > 0$,tels que $\lvert x - \frac{p}{q}\rvert \geq \delta q^{-d}$ pour tout rationnel $\frac{p}{q}$. En effet $\delta q_n^{-d} \leq \lvert x - \frac{p_n}{q_n}\rvert \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ et comme $a_{n+1} q_n \leq q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1} \leq \frac{1}{\delta} q_n^{d-1}$ on a $a_{n+1} \leq \frac{1}{\delta} q_n^{d-2}$ *($d \geq 2$ car $\lvert x - \frac{p_n}{q_n}\rvert \leq \frac{1}{q_n^2}$)*	$\alpha = d - 2$	L'application de la mesure d'irrationalité au système solaire par Souriau, reproduite sur le site de Jean Pierre Petit : http://jp-petit.com/science/f700/f701.htm et que l'on trouve également maintenant page 102 (sur 275) du document pdf "Grammaire de la nature" sur le site de J.M. Souriau : http://www.jmsouriau.com/Publications montre que "les Mathématiques sont partout !"
π est MA	$\alpha = 7$	En effet $d = 42$ (Mahler 1953), $d = 21$, (Mignotte 1974), $d = 9$ (Hata 1993)

Comme $a_{n+1} = K_n q_n^\alpha$ alors $a_{n+1}^{\frac{-1}{q_n}} = exp(-\frac{\ln K_n}{q_n}) e^{-\alpha \frac{\ln q_n}{q_n}}$.

Comme K_n est borné > 0 on peut prendre $0 < s \leq K_n \leq K$ et les deux exponentielles tendent vers 1, et (H3) dit que $R_y = 1$.

(Si $s = 0$, (il faut prendre alors $\alpha > 0$, puisque $a_k \geq 1$, $k > 0$) cas du petit o (un petit o est aussi un grand O de Landau : "il a tout d'un grand" ce qui est son droit !, je ne sais pas faire car le premier exposant prend une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$, tout lecteur sachant régler ce cas (ou donner un contre exemple) sera le bienvenu ! ; je pense qu'il faut se limiter au O "exclusif")

Pour insister sur la densité du cas $R_y = 1$, prouvons que si y est (δ, d)-mal approchable, alors il est de même de ty avec $t = \frac{r}{s}$ rationnel > 0 ; en effet avec les notations données dans l'accolade $\lvert ty - t\frac{p}{q}\rvert = \lvert ty - \frac{rp}{sq}\rvert = \lvert ty - \frac{rp}{q'}\rvert \geq t\delta q^{-d} = t\delta(\frac{q'}{s})^{-d} = t\delta s^d q'^{-d}$ et ainsi ty est $(t\delta s^d, d)$ mal approchable et $R_y = R_{ty} = 1$. Remarquons que tout paramètre $d' \geq d$ est aussi associé à y et comme $\delta q_n^{-d} \leq \lvert y - \frac{p_n}{q_n}\rvert \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^2}$ on a $0 < \delta \leq q_n^{d-2}$, ce qui impose $d \geq 2$.

Traitons maintenant le cas d'un rayon entre 0 et 1.

$\boxed{\bullet\ 0 < \varepsilon = e^{-a} < 1}$ avec $a > 0$ donné et $a = -\log \varepsilon$. Le problème est de déterminer y tel que $R_y = \varepsilon$. Le cas précédent explique pourquoi un tel y est exotique.

On choisit $a_0 = \frac{p_0}{q_0} = \frac{0}{1}$: $p_0 = 0$, $q_0 = 1$.

$a_0, a_1, ..., a_n$; $p_0, p_1, ..., p_n$; $q_0, q_1, ..., q_n$ étant déterminés on choisit $a_{n+1} = E(e^{aq_n})$ qui est d'une croissance très rapide (exponentielle), et qui détermine $\begin{cases} p_{n+1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1} \\ q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1} \end{cases}$ aussi très grands et prouve encore la répartition sporadique de tels $y = (a_0, a_1, ...)$.

Cherchons alors le rayon associé R_y au moyen de la formule (H3).

$a_{n+1} \leq e^{aq_n} < a_{n+1} + 1$ soit $e^{aq_n} - 1 < a_{n+1} \leq e^{aq_n}$ puis $(e^{aq_n} - 1)^{\frac{1}{q_n}} < a_{n+1}^{\frac{1}{q_n}} \leq e^a$. Ce qui implique $e^{-a} \leq a_{n+1}^{\frac{-1}{q_n}} < e^{-a}(1 - e^{-aq_n})^{\frac{-1}{q_n}} = e^{-a} e^{-1/q_n \ln(1 - e^{-aq_n})} = e^{-a} exp\big(-\frac{1}{q_n}(-e^{-aq_n} + o(e^{-aq_n})\big)$ et comme le dernier exposant tend vers zéro d'après la prépondérance de e^{aq_n} par rapport à q_n on en déduit que les deux membres extrêmes tendent vers $e^{-a} = \varepsilon$.

-IV- CONCLUSION

Dans la revue Proceedings of the Cambridge Philosophical Society volume 42 june 1946 pages 85-90, et à l'article "Notes on the theory of series (XXIV) : a curious power series, Hardy et Littlewood ont de plus démontré (ce qui révèle leur virtuosité) que le rayon de la série entière de terme général $\frac{z^n}{\sin \pi y \sin 2\pi y .... \sin n\pi y}$ était $\frac{R_y}{2}$.

Enfin Hervé Queffélec m'a signalé (et envoyé une rédaction détaillée) le cas des séries de Dirichlet $\sum \frac{n^{-s}}{\lvert \sin n\pi y\rvert}$ traité par Gérald Tenenbaum Professeur à l'Université Henri Poincaré-Nancy 1 (qui l'a même donné en sujet de maîtrise le

5 juin 2001, et qui fera partie des exercices proposés dans la nouvelle version de son livre “Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres” qui paraîtra chez Belin en 2008), pour lequel on trouve là aussi une abscisse de convergence absolue arbitraire entre 0 et $+\infty$, et qui est en un sens beaucoup plus intéressant car il force à regarder de beaucoup plus près le développement d'un nombre. En effet l'abscisse de convergence d'une série de Dirichlet est une fonction des coefficients beaucoup plus fine que ne l'est le rayon de convergence d'une série entière, où l'on écrase tout en prenant la racine n-ième du coefficient a_n.

Nous incitons donc le lecteur de culture math à poursuivre dans cette direction en cherchant sur le web et dans [7] pages 23-28 et 56 et dans les autres ouvrages spécialisés cités tout au long de cet article.

Le théorème fondateur de Tenenbaum (en 2001) étant que l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet précédente est $\boxed{\sigma_{\mathbf{C}} = \mathbf{1} + \overline{\lim}\frac{\ln(\mathbf{a_{n+1}})}{\ln \mathbf{q_n}}}$ qui curieusement ressemble à (H3).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Les nombres : Problèmes anciens et actuels (Ellipses juillet 2000) : Hervé Queffélec : d'une remarque “in passing” des œuvrs complètes de Hardy aux fractions continues ; Pages 127-138.

[2] Chapelon Jacques Jean Marie, Cours d'analyse de l'École Polytechnique (1948)II p 306-343. (C'est par erreur que le site comportant sa biographie, que l'on trouve par google, écrit Chapellon).

[3] Descombes Roger, Éléments de théorie des nombres (PUF 1986) p 17-38.

[4] Hardy et Littlewood, Notes on the theory of series : a curious power-series, Procedings of the Cambridge Philosophical society, volume 42, june 1946, p 85-90.

[5] Hardy et Wright, An introduction to the theory of numbers (Oxford 1979).

[6] Valiron Georges, Théorie des fonctions (Masson 1955) p 17-24.

[7] Queffélec Hervé, Zuily Claude, Analyse pour l'Agrégation (Dunod 2007) exercice 4, p 8, 10-12, séries de Dirichlet p 23-28, 56, 58, 60.