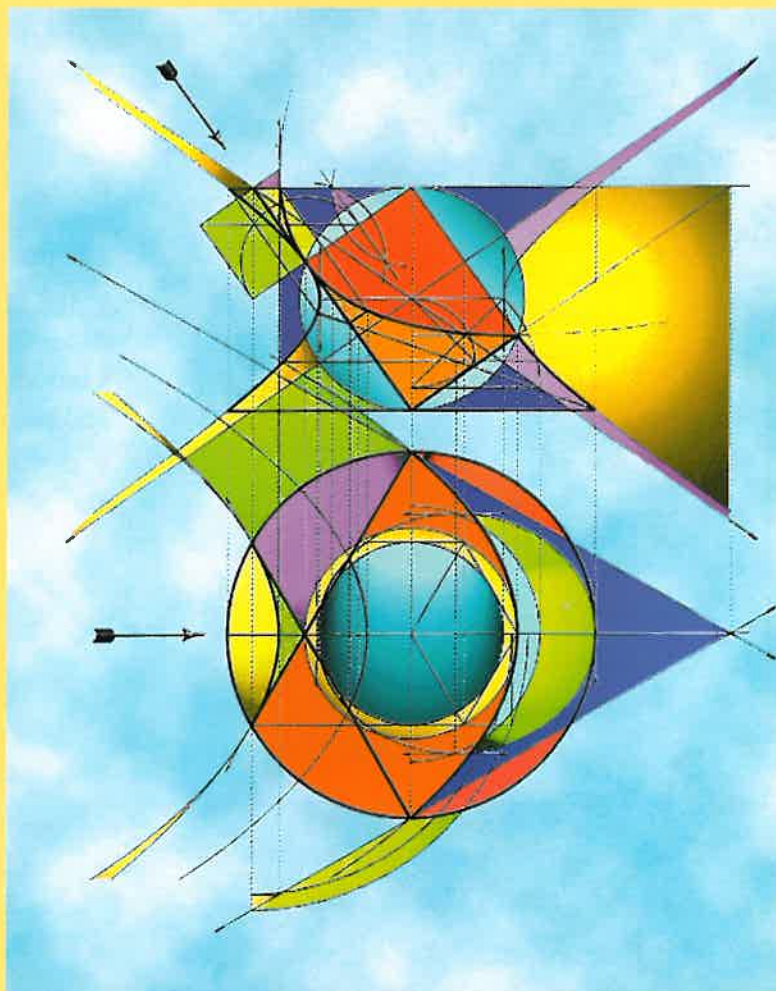




Quadrature

Magazine de mathématiques pures et épicées

La mathématique ouvre plus d'une fenêtre sur plus d'un monde



Hyperboloïde de révolution entaillé par un parabolôïde hyperbolique

◇ **Les mathématiques et le monde :
dépasser «l'horreur instrumentale»** ◇

◇ **Piège dans le Cyberspace** ◇

◇ **Un lacet explicite ...** ◇

◇ **Coin des Problèmes** ◇

Magazine trimestriel n° 41

Janvier-Février-Mars 2001

ISSN 142-2785 - 40F

Un lacet explicite d'homotopie joignant $R(0)$ et $R(4\pi)$ dans $SO(3)$

par LG Vidiani*

Des physiciens (et des mathématiciens) ont du mal à saisir pourquoi dans \mathbb{R}^3 euclidien, une rotation d'angle 2π n'est pas identique à une rotation d'angle 4π .

Le but de ce calcul (doublé en 115 secondes avec le logiciel de calcul formel Maple V 2) est de montrer pourquoi; On terminera en rappelant le principe de l'expérience que DIRAC imagina en 1929 pour illustrer cette différence qui est fondamentale en théorie du SPIN (entier ou semi entier) de l'électron.

Voici le plan suivi :

- I. INTRODUCTION
- II. STRUCTURE de $SU(2)$
- III. $SU(2)$ est simplement connexe
- IV. UN MORPHISME de $SU(2)$ vers $SO(3)$
- V. UN LACET EXPLICITE joignant $R(0)$ et $R(4\pi)$
- VI. $SO(3)$ n'est pas simplement CONNEXE + figures annexes
- VII. EXPÉRIENCE DE DIRAC + figure annexe

I Introduction

Dans tous les cours de Mathématiques Spéciales, on montre que la matrice d'une rotation vectorielle dans \mathbb{R}^3 euclidien (muni d'une base orthonormée (i, j, k)) est une matrice de $SO(3)$ et que réciproquement toute matrice A de $SO(3)$ est la représentation de deux rotations $R(\mathbf{u}, \theta)$ et $R(-\mathbf{u}, -\theta)$ où $\mathbf{u} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}$ est un vecteur unitaire de l'axe de la rotation, et θ une mesure de l'angle de la rotation autour de l'axe orienté par \mathbf{u} . On détermine les rotations que A représente, principalement par deux méthodes :

I.1 Méthode 1

1. $\text{trace}(A) = 1 + 2 \cos(\theta)$ donne $\pm\theta \pmod{2\pi}$.

2. $\frac{A - {}^t A}{2} = \sin(\theta) \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$ donne l'axe par la connaissance de $\sin(\theta)\mathbf{u}$ si $\sin(\theta) \neq 0$.

Mais cette méthode ne donne pas l'axe si $\sin(\theta) = 0$ c'est à dire pour $\theta = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. A étant alors à la fois symétrique et orthogonale $A = {}^t A = A^{-1}$ est une symétrie orthogonale si k est impair ou l'identité si k est pair. (Cette exception n'est pas signalée dans les ouvrages actuels présentant cette méthode)

I.2 Méthode 2

1. $\text{trace}(A) = 1 + 2 \cos(\theta)$ donne $\pm\theta \pmod{2\pi}$

2. \mathbf{u} est "un" vecteur unitaire invariant, c'est-à-dire dont la colonne U des composantes vérifie $AU = U$ et $\|\mathbf{u}\| = 1$.

3. $\det(x, A(x), \mathbf{u}) = p(x)^2 \sin(\theta)$ où $p(x)$ est la projection orthogonale de x sur le plan \mathbf{u}^\perp et donne le signe de $\sin(\theta)$ si l'on peut choisir un vecteur x tels que $(x, A(x), \mathbf{u})$ ne soit

*Pour me contacter \rightsquigarrow lg.vidiani@ipac.fr

pas un système lié, ce qui particularise encore le cas où $\theta = k\pi$ où les trois vecteurs x , $A(x)$ et u sont, quel que soit le choix de x , coplanaires dans un plan axial (*c'est-à-dire contenant l'axe u*).

Or les valeurs propres de A (orthogonale droite réelle, d'ordre impair 3) sont $1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}$, puisque les valeurs propres d'une matrice orthogonale sont de norme 1, et la théorie élémentaire montre que l'argument des deux valeurs propres conjuguées de $\text{spectre}(A) - \{1\}$ est une mesure de l'angle de la rotation associée à A .

Ceci montre que la matrice $A - I$ qui est par similitude de même rang que la matrice $\begin{pmatrix} e^{i\theta} - 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} - 1 \end{pmatrix}$ de déterminant $4 \sin^2(\frac{\theta}{2})$ est de rang 2 sauf si $\theta = 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$. Sauf dans ce dernier cas, où u est indéterminé ($A = I$ et la rotation associée est l'identité d'axe indéterminé), le système $(A - I)U = 0$ détermine parfaitement la direction de U , car c'est un système de trois équations à trois inconnues (les composantes de u à une constante multiplicative non nul près) de rang 2. (p, q, r) sont donc obtenues par la méthode dite des "COFACTEURS".

La méthode 2 bien que plus lourde, est donc plus générale que la méthode 1 car elle donne u même dans le cas où θ est un multiple impair de π . Dans la pratique, on utilise 1 sauf dans le cas où $\text{trace}(A) = -1$ ou 3 correspondant justement à $\theta = \pi$ ou 0 modulo (2π) .

Mais cette dernière étude sur le rang, prouve que le problème du RELÈVEMENT d'une matrice orthogonale telle que A , en une rotation, ne peut contourner le cas singulier obtenu, où 1 est valeur propre triple ($\text{Trace}(A) = 3$), et où u est INDÉTERMINÉ.

Le seul moyen d'espérer un relèvement, est de paramétrer A au moyen du couple (u, θ) donc de représenter les rotations au moyen des QUATERNIONS, ou ce qui revient au même à un isomorphisme près par les matrices de $SU(2)$.

C'est ce dernier point qui va être utilisé, car il évite le préalable d'une introduction (définition, propriétés, interprétation géométrique) des quaternions.

II STRUCTURE DE $SU(2)$

$SU(2)$ est l'ensemble des matrices unitaires de $M_2(\mathbb{C})$ et de déterminant +1. De la forme

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ elles vérifient $A^t \bar{A} = I$ soit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} a\bar{a} + b\bar{b} & a\bar{c} + b\bar{d} \\ c\bar{a} + d\bar{b} & c\bar{c} + d\bar{d} \end{pmatrix}$$

ce qui donne le système

$$\begin{cases} a\bar{a} + b\bar{b} = 1 & (1) \\ c\bar{c} + d\bar{d} = 1 & (2) \\ c\bar{a} + d\bar{b} = 0 & (3) \\ ad - bc = 1 & (4) \end{cases}$$

Les deux dernières équations donnent le système $\begin{cases} \bar{a}c + \bar{b}d = 0 \\ -bc + ad = 1 \end{cases}$ système en c et d qui est cramérien car son déterminant $a\bar{a} + b\bar{b}$ est égal à 1 d'après (1), les formules de CRAMER donnent alors $c = -\bar{b}$ et $d = \bar{a}$ donc $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ avec $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$. Mais si on pose $a = u + iv$ et $b = w + iz$ avec u, v, w, z réels, alors

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u + iv & w + iz \\ -w + iz & u - iv \end{pmatrix} \\ &= uI + zU_1 + wU_2 + vU_3 \end{aligned}$$

où U_1, U_2, U_3 sont les trois matrices :

$$U_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad U_3 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

(Elles sont liées aux trois matrices σ_i de PAULI par les relations : $\sigma_1 = \frac{U_1}{i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_2 = \frac{U_2}{i} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_3 = \frac{U_3}{i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.)

La condition $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$ sur le déterminant de A devient $u^2 + v^2 + w^2 + z^2 = 1$, ce qui suggère de poser : (*relèvement toujours possible*) $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$u = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et } (v, w, z) = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (-\gamma, -\beta, -\alpha)$$

où $u = (\alpha, \beta, \gamma)$ est un vecteur unitaire arbitraire de \mathbb{R}^3 euclidien.

C'est toujours possible :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\gamma, \beta, \alpha) = \frac{-1}{\sin(\frac{\theta}{2})}(v, w, z) \bullet \text{ si } \sin(\frac{\theta}{2}) \neq 0 \\ \forall (\gamma, \beta, \alpha) \bullet \text{ si } \sin(\frac{\theta}{2}) = 0 \\ \text{car } u^2 = 1 \Rightarrow \\ \cos(\frac{\theta}{2}) = \pm 1 \Rightarrow \\ (v, w, z) = (0, 0, 0) \end{array} \right.$$

Donc

$$A = h(u, \theta) = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + iv & w + iz \\ -w + iz & u - iv \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) - i \sin(\frac{\theta}{2})\gamma & -\sin(\frac{\theta}{2})\beta - i \sin(\frac{\theta}{2})\alpha \\ \sin(\frac{\theta}{2})\beta - i \sin(\frac{\theta}{2})\alpha & \cos(\frac{\theta}{2}) + i \sin(\frac{\theta}{2})\gamma \end{pmatrix}$$

Comme annoncé dans l'introduction ce calcul nous permettra d'avoir un relèvement de $SO(3)$ vers $SU(2)$.

De plus le cas particulier $u = 0$ nous donne la structure de $su(2)$ l'ensemble des matrices anti-hermitiennes de trace nulle.

Soit $A = \cos(\frac{\theta}{2}) I - \sin(\frac{\theta}{2})(\alpha U_1 + \beta U_2 + \gamma U_3)$.

III $SU(2)$ est simplement connexe

$SU(2)$ est simplement connexe (connexe par arc ET tout lacet est homotope à un point).

(X et Y étant deux espaces topologiques, deux applications $f, g \in \mathcal{F}(X, Y)$ sont dites homotopes s'il existe h de $C(X \times [0, 1], Y)$ telle que $h(x, 0) = f(x)$ et $h(x, 1) = g(x)$ pour tout x de X : de manière imagée "il existe une transition continue d'un arc vers l'autre", t étant interprété comme le temps.)

Posons

$$G(m, t) = \begin{bmatrix} t(\cos m - i \sin m) + 1 - t & \sqrt{2t(1-t)(1-\cos m)} \\ -\sqrt{2t(1-t)(1-\cos m)} & t(\cos m + i \sin m) + 1 - t \end{bmatrix}$$

Il est immédiat de vérifier que

$$G(m, t) \times G(m, t)^* = I_2$$

donc

$$G(m, t)^{-1} = G(m, t)^* = {}^t \overline{G(m, t)}$$

et que $\det(G(m, t)) = +1$ c'est à dire que $G(m, t)$ est unitaire; En outre

$$G(m, 0) = I_2 \text{ et } G(m, 1) = \text{diag}(e^{-im}, e^{im}).$$

La famille des lacets $G(m, t)$ constitue une déformation du lacet $G(m, 1)$ en le lacet trivial $G(m, 0)$.

(Dans "éléments de topologie algébrique" Hermann 1971 page 102, GODBILLON donne une autre construction explicite de lacets, prouvant que $SU(n)$ est simplement connexe.)

IV Un morphisme de $SU(2)$ vers $SO(3)$

À partir de $G(m, t)$ lacet dans $SU(2)$ nous allons construire un lacet dans $SO(3)$

1. Appelons $su(2)$ (s et u minuscules!) l'espace vectoriel des matrices anti-hermitiennes de trace

nulle $\left(A = \begin{bmatrix} vi & w + zi \\ -w + zi & -vi \end{bmatrix} \right)$.

C'est un espace vectoriel réel de dimension 3 dont une base est constituée par les trois matrices vues en II)

$$U_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad U_3 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

et ainsi $A = zU_1 + wU_2 + vU_3$.

De plus $\det(A) = v^2 + w^2 + z^2$, par conséquent tout endomorphisme φ de $su(2)$ qui conserve le déterminant ($\det(\varphi(A)) = \det A$) conserve la norme euclidienne de A (exprimée sur la base $(U_1 \ U_2 \ U_3)$ de $su(2)$ identifié à \mathbb{R}^3 EUCLIDIEN).

2. On considère alors l'endomorphisme $Ad(A)$ de l'espace vectoriel réel $su(2)$ (de dimension 3 rappelons le!), qui pour une matrice A de $SU(2)$ (Pour avoir un lacet explicite, nous prendrons en V) $A = G(m, t)$) est défini par :

$$Ad(A)(X) = AXA^{-1}$$

(D'ailleurs d'après le théorème de SKOLEM NÖTHER, tout automorphisme de $L(E)$ est INTÉRIEUR)

$Ad(A)$ conserve le déterminant de X , par conséquent d'après la remarque précédente, est

un **endomorphisme orthogonal** de $su(2)$; Ad est donc un morphisme de $SU(2)$ vers $O(3)$ et même $SO(3)$ car comme $SU(2)$ est connexe (et même connexe par arc) $\det(Ad(A)) = +1!$

(en effet l'application de $SU(2)$ vers \mathbb{R} qui à une matrice de $SU(2)$ associe $\det(Ad(A))$ est continue et d'après le théorème de BOLZANO l'image du connexe $SU(2)$ est un connexe de \mathbb{R} donc un intervalle, donc comme $\det(Ad(A))$ ne prend que les valeurs $+1$ ou -1 $\det(Ad(A))$ est une constante sur $SU(2)$ et cette constante est $+1$ obtenue pour $A = I_2$ car alors $Ad(I_2) = I_3$).

Pour connaître les colonnes de la matrice de $Ad(A) : su(2) \rightarrow su(2)$ Ad étant rappelons le une application de $SU(2)$ vers $SO(3)$, il suffit de connaître les images de la base (U_1, U_2, U_3) de $su(2)$:

$$\begin{aligned} \diamond Ad(A)(U_1) &= \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\bar{b} & ia \\ i\bar{a} & -ib \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i(a\bar{b} + b\bar{a}) & i(a^2 - b^2) \\ i(\bar{a}^2 - \bar{b}^2) & i(-a\bar{b} + \bar{a}b) \end{pmatrix} \\ \diamond Ad(A)(U_2) &= \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b} & a \\ -\bar{a} & b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a\bar{b} - b\bar{a} & a^2 + b^2 \\ -\bar{b}^2 - \bar{a}^2 & \bar{a}b - \bar{b}a \end{pmatrix} \\ \diamond Ad(A)(U_3) &= \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\bar{a} & -ib \\ -i\bar{b} & -ia \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i(a\bar{a} - b\bar{b}) & -i2ab \\ -i2\bar{a}\bar{b} & i(b\bar{b} - a\bar{a}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On remarque que si on a une matrice de $su(2)$ de la forme :

$$\begin{matrix} \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \\ \begin{bmatrix} vi & w + zi \\ -w + zi & -vi \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ses composantes sur (U_1, U_2, U_3) sont (z, w, v) dans l'ordre de la flèche.

Par conséquent la matrice de $Ad(A)$ dans la base (U_1, U_2, U_3) est :

$$Ad(A) = \begin{pmatrix} \Re(a^2 - b^2) & \Im(a^2 + b^2) & -2\Re(ab) \\ -\Im(a^2 - b^2) & \Re(a^2 + b^2) & 2\Im(ab) \\ a\bar{b} + b\bar{a} & \frac{a\bar{b} - b\bar{a}}{i} & a\bar{a} - b\bar{b} \end{pmatrix}$$

avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ et $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$

Et on a $\begin{cases} a = u + iv \\ b = w + iz \end{cases}$, $\begin{cases} a^2 = u^2 - v^2 + 2iuv \\ b^2 = w^2 - z^2 + 2iwz \end{cases}$ ce qui donne

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = u^2 - v^2 - w^2 + z^2 + i(2uv - 2wz) \\ a^2 + b^2 = u^2 - v^2 + w^2 - z^2 + i(2uv + 2wz) \\ ab = uw - vz + i(vw + uz) \\ a\bar{b} + b\bar{a} = 2uw + 2vz \\ \frac{a\bar{b} - b\bar{a}}{i} = 2vw - 2uz \\ a\bar{a} - b\bar{b} = u^2 + v^2 - w^2 - z^2 \end{cases}$$

Avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + iv & w + iz \\ -w + iz & u - iv \end{pmatrix}$

$$Ad(A) = \begin{pmatrix} \Re(a^2 - b^2) & \Im(a^2 + b^2) & -2\Re(ab) \\ -\Im(a^2 - b^2) & \Re(a^2 + b^2) & 2\Im(ab) \\ a\bar{b} + b\bar{a} & \frac{a\bar{b} - b\bar{a}}{i} & a\bar{a} - b\bar{b} \end{pmatrix} =$$

$$Ad(A) = \begin{bmatrix} u^2 - v^2 - w^2 + z^2 & 2(+uv + wz) & 2(-uw + vz) \\ 2(-uv + wz) & u^2 - v^2 + w^2 - z^2 & 2(vw + uz) \\ 2(+uw + vz) & 2(vw - uz) & u^2 + v^2 - w^2 - z^2 \end{bmatrix} \quad (F)$$

Cette formule donnant une matrice orthogonale en fonction rationnelle de paramètres u, v, w, z réels liés par $u^2 + v^2 + w^2 + z^2 = 1$ était connue d'EULER, OLINDE RODRIGUES

(1794-1851), CAYLEY et KLEIN.

(Le changement de (u, v, w, z) en $(-u, -v, -w, -z)$ laisse invariante la formule précédente : deux points diamétralement op-

posés sur la sphère S_3 de \mathbb{R}^4 donnent la même matrice $Ad(A)$.

(Le relèvement dans $SU(2)$ d'une telle matrice $Ad(A)$ de $SO(3)$ reviendrait à résoudre en a, b des équations du type $a^2 = \dots, b^2 = \dots$ et on sait qu'un tel relèvement continu n'existe pas, sans plan feuilleté ou fendu ou coupé ..., à cause des deux déterminations du radical complexe.)

Remplaçons dans cette formule a et b par leurs expressions en $\alpha, \beta, \gamma, \theta$.

Rappelons que :

$$a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\gamma \quad \text{et} \\ b = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\beta - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\alpha$$

c'est à dire

$$u = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad v = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\gamma, \\ w = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\beta, \quad z = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\alpha$$

(Les quadruplets $(\alpha, \beta, \gamma, \theta)$ et $(-\alpha, -\beta, -\gamma, -\theta)$ donnent le même quadruplet (u, v, w, z) donc correspondent à la même rotation de matrice $Ad(A)$.)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\gamma & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\beta - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\alpha \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\alpha & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\gamma \end{pmatrix}$$

donne en utilisant (F) :

$$Ad(A) = \begin{pmatrix} u^2 - v^2 - w^2 + z^2 & 2(+uv + wz) & 2(-uw + vz) \\ 2(-uv + wz) & u^2 - v^2 + w^2 - z^2 & 2(vw + uz) \\ 2(+uw + vz) & 2(vw - uz) & u^2 + v^2 - w^2 - z^2 \end{pmatrix} \quad (F)$$

$$Ad(A) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) + (1 - \cos(\theta))\alpha^2 & -\gamma \sin(\theta) + \alpha\beta(1 - \cos(\theta)) & +\sin(\theta)\beta + (1 - \cos(\theta))\alpha\gamma \\ +\gamma \sin(\theta) + \alpha\beta(1 - \cos(\theta)) & \cos(\theta) + (1 - \cos(\theta))\beta^2 & -\sin(\theta)\alpha + (1 - \cos(\theta))\beta\gamma \\ -\sin(\theta)\beta + (1 - \cos(\theta))\alpha\gamma & +\sin(\theta)\alpha + (1 - \cos(\theta))\beta\gamma & \cos(\theta) + (1 - \cos(\theta))\gamma^2 \end{pmatrix}$$

On reconnaît la matrice $M(\mathbf{u}, \theta)$ de la rotation $R(\mathbf{u}, \theta)$ d'axe orienté par le vecteur unitaire $\mathbf{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ et d'angle dont une mesure est θ .

(Grâce à cette formule il est facile de trouver les antécédents dans su_2 des rotations d'EULER autour des axes)

L'intérêt de cette représentation et de la formule (F), sans passer par la forme habituelle des quaternions, est :

- 1) De montrer le lien entre les paramètres de la rotation $Ad(A)$ et ceux de la matrice A de $SU(2)$.
- 2) Dans le sens direct $A \rightarrow Ad(A)$ de déduire des lacets explicites dans $SU(2)$ un lacet EXPLICITE dans $SO(3)$ joignant $R(0)$ à $R(4\pi)$.
- 3) Dans le sens inverse $A \leftarrow Ad(A)$ de déduire de lacets éventuels dans $SO(3)$ joignant $R(0)$ à $R(2\pi)$ une contradiction des lacets relevés dans $SU(2)$.

V Un lacet explicite dans $SO(3)$ joignant $R(0)$ à $R(4\pi)$

Nous allons appliquer les formules précédentes à la matrice A de $SU(2)$ déjà considérée dans III)

$$A = G(m, t) =$$

$$\begin{bmatrix} t(\cos m - i \sin m) + 1 - t & \sqrt{2t(1-t)(1-\cos m)} \\ -\sqrt{2t(1-t)(1-\cos m)} & t(\cos m + i \sin m) + 1 - t \end{bmatrix}$$

et on a ici

$$\begin{cases} a = t \cos m + 1 - t + it \sin m = u + iv \\ b = \sqrt{2t(1-t)(1-\cos m)} = w + iz \end{cases}$$

b est réel $z = 0$ ici.

En remplaçant dans la formule (F) u, v, w, z par :

$$u = t \cos m + 1 - t, \quad v = -t \sin m, \\ w = \sqrt{2t(1-t)(1-\cos m)}, \quad z = 0$$

Nous définissons alors $LACET(m, t) = Ad(G(m, t))$ et ainsi :

$$\text{LACET}(m,t) =$$

$$\begin{bmatrix} 1 - 4t + 4t \cos m + 2t^2 - 4t^2 \cos m + 2t^2 \cos^2 m & -2t(1-t) \sin m - 2t^2 \sin m \cos m & 2(-1+t-t \cos m) \sqrt{2t(1-t)(1-\cos m)} \\ +2t(1-t) \sin m + 2t^2 \cos m \sin m & 1 - 2t^2 + 2t^2 \cos^2 m & -2t \sin m \sqrt{2t(1-t)(1-\cos m)} \\ 2(+1-t+t \cos m) \sqrt{2t(1-t)(1-\cos m)} & -2t \sin m \sqrt{2t(1-t)(1-\cos m)} & 1 - 4t + 4t \cos m + 4t^2 - 4t^2 \cos m \end{bmatrix}$$

Certes cette formule prouve que $\text{LACET}(m,t)$ est 2π périodique, mais elle montre aussi par la présence de $\sqrt{1-\cos m} = |\sin \frac{m}{2}|$ que le LACET s'il est C_∞ sur $\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$, présente en $m = 2\pi$ un point **anguleux** et seuls les deux termes marqués ■ et -■ dans la matrice du lacet y présentent un saut de discontinuité (pour $t \in]0,1[$) de leur dérivée. (respectivement de $-4\sqrt{t(1-t)}$ et de $+4\sqrt{t(1-t)}$) en $m = 2\pi$).

$$\text{LACET}(m,t) = \begin{bmatrix} * & * & -\blacksquare \\ * & * & * \\ \blacksquare & * & * \end{bmatrix}$$

On met enfin en évidence les termes égaux ou opposés dans la matrice du lacet :

$$\text{LACET}(m,t) = \begin{bmatrix} * & -\oplus & -\blacksquare \\ \oplus & ** & \nabla \\ \blacksquare & \nabla & *** \end{bmatrix}$$

La famille des $\text{LACET}(m,t)$ constitue une déformation du $\text{LACET}(m,1)$ en le lacet trivial.

En faisant $t = 1$, on constate qu'en posant $g(m) = G(m,1) = \text{diag}(e^{-im}, e^{+im})$ on a

$$\text{Ad}(g(m)) = \begin{bmatrix} \cos(2m) & -\sin(2m) & 0 \\ \sin(2m) & \cos(2m) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R(k,2m)$$

Le lacet $[0, 2\pi] \ni m \rightarrow L(m,1) \in SO(3)$ qui joint $R(k,0)$ à $R(k,4\pi)$ est bien HOMOTOPE au point I puisque $L(m,0) = I = R(k,0)$ et $L(m,1) = R(k,2m)$ et que $L(m,t)$ est à extrémités fixes car $L(0,t) = L(2\pi,t) = I$.

VI $SO(3)$ n'est pas simplement connexe :

Nous allons montrer qu'il n'existe aucun lacet $S(m) = R(\Omega(m), \varphi(m))$ joignant $R(k,0)$ à $R(k,2\pi)$ qui soit homotope au point I .

En effet supposons, qu'il existe une déformation $H(m,t) = R(u(m,t), \theta(m,t))$ vérifiant

$$\begin{aligned} u(m,0) &= k \theta(m,0) = 0 \\ u(m,1) &= k \theta(m,1) = m \end{aligned}$$

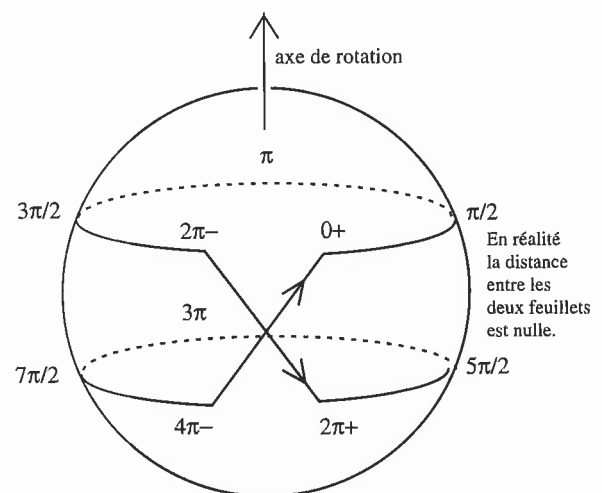
soit $H(m,0) = R(k,0)$ et $H(m,1) = R(k,m)$ et avec les extrémités fixes :

$$H(0,t) = H(2\pi,t) = I = R(k,0)$$

alors son relevé continu $g(m,t) = h(u(m,t), \theta(m,t))$ dans $SU(2)$ obtenu par la formule encadrée à la fin de II) donnerait

$$\begin{aligned} g(m,0) &= I_2, g(m,1) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{im}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{im}{2}} \end{pmatrix} \text{ et} \\ g(0,t) &= I_2 = g(2\pi,t) \end{aligned}$$

ce qui conduit à une contradiction puisque avec $m = 2\pi$ dans la formule $g(m,1) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{im}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{im}{2}} \end{pmatrix}$ on aurait $g(2\pi,1) = -I_2$ ce qui contredirait avec $t = 1$ la formule $I_2 = g(2\pi,t)$ qui donne $I_2 = g(2\pi,1)$.



VII Expérience de Dirac illustrant le SPIN demi entier

- En 1929 Dirac imagina le montage suivant : un cube en plastique (on peut s'en procurer dans tous les rayons de jouets des grands magasins) est

attaché, comme le montre la figure ci jointe en annexe, par quatre brins (élastiques ou pas trop tendus) reliant 4 sommets de la face supérieure aux quatre coins supérieurs de l'armature métallique d'un aquarium désaffecté, débarrassé de ses parois vitrées, pendant que par quatre autres brins les quatre sommets de la face inférieure du cube sont reliés aux quatre coins inférieure de l'armature métallique de l'aquarium.

- Il est conseillé, pour rendre l'expérience plus visuelle et probante d'utiliser 4 ficelles de couleurs différentes et de marquer au feutre permanent les numéros des quatre faces verticales du cube.
- Une rotation de 2π du cube emmêle les brins et donne une configuration qu'il est impossible de démêler (*c'est ce que démontre effectivement M.H.A. NEWMAN dans son article de 1942 cité en bibliographie*). En revanche une rotation supplémentaire de 2π (dans le même sens! que la première rotation) ce qui donne une rotation globale de 4π , si elle emmêle encore plus les brins, donne cependant une configuration des brins qui peut être démêlée en laissant cependant le cube dans la position où l'a laissée la rotation d'angle 4π .
- Cette déformation des ficelles, qui permet de faire disparaître leur torsion est illustrée dans la figure jointe en annexe, en troisième de couverture.

VIII Calculs avec le logiciel formel MAPLE V 2

- Le calcul avec les commandes commentées a été fait en 117 secondes. Il permet d'obtenir, en spécialisant a et t toute une chaîne de lacets intermédiaires.
- Il met en évidence quelques améliorations possibles de MAPLE V 2 sous WINDOWS : numérotation des pages, le nombre d'exemplaires n'est pas pris en compte lors de l'impression, les fractions de secondes ne sont pas affichées, alors qu'elles le sont sous DOS ; la simplification trigonométrique des termes complexes laisse à désirer en particulier pour $\sqrt{1 - \cos a}$ qui donne des résultats schadocks. Les boucles A.k ne marchent pas pour les matrices.

Remerciements

Je remercie le professeur GUICHARDET du centre de mathématiques de l'Ecole Polytech-

nique, qui m'a aidé par deux fois, en répondant à mes questions à chaque fois par retour du courrier.

Bibliographie

- [1] **Berger Marcel**, *Géométrie, tome 2 : Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères*, CEDIC 1978, pages 56-61.
- [2] **Deheuvels René**, *Formes Quadratiques et Groupes classiques*, PUF 1981, pages 381-409.
- [3] **Conférence XUPS 1976**, *Algèbres de CLIFFORD et applications*.
- [4] **Dieudonné Jean**, *Algèbre linéaire et Géométrie élémentaire*, HERMANN 1964, pages 200-207.
- [5] **Doubrovine**, *Géométrie Contemporaine méthodes et applications, tome 2*, MIR 1979, relèvement des homotopies pages 145-149.
- [6] **Godbillon Claude**, *Éléments de Topologie Algébrique*, HERMANN 1971, pages 40 80 92 100-102. (*SU(n) simplement connexe page 102*)
- [7] **Kirillov**, *Éléments de la théorie des représentations*, MIR 1974, pages 123-325.
- [8] **Naimark & Stern**, *Théorie des représentations des groupes*, MIR, pages 168-171 et 602 méthode de relèvement et de représentation des groupes due à GUELFAND.
- [9] **Guichardet Alain**, *Groupes de Lie*, Conférence X-UPS Mai 1980.
- [10] **Zisman Michel**, *Topologie Algébrique Élémentaire*, ARMAND COLIN 1972 pages 50-54-69.

Bibliographie sur l'expérience de Dirac

- [1] **Berger Marcel**, *Géométrie plane, tome 2 : Espaces Euclidiens, Triangles, Cercles et Sphères*, CEDIC 1978 page 61, (*rotation de 4π*).
- [2] **Biedenharn LC, Louck JD, Carruthers Peter A**, *Angular Momentum in Quantum Physics Theory and Applications*, Cambridge University Press, figures 2.1-2.5-2.2-2.3-2.4 pages 13-15.

- [3] **CNRS**, Images de la Physique 1992 page 22.
- [4] **Deheuvels René**, *Formes quadratiques et groupes classiques*, PUF 1981, pages 401-402.
- [5] **Gardner Martin**, *Nouveaux divertissements Mathématiques*, DUNOD 1970, pages 20-21 et 235 où la date de conception de l'expérience de DIRAC est donnée par Gardner qui la tient de Paul Adrien Maurice DIRAC (8.8. 1902 20.9.1984 Prix NOBEL de PHYSIQUE 1933) lui même et cite que Newmann révéla, dans le *Journal Mathématique de Londres en 1942*, que DIRAC utilisait cette expérience comme modèle, « pour illustrer le fait que le groupe fondamental du groupe des rotations du tri-espace admettait un générateur unique de période 2 » - par la même occasion Gardner cite le nom d'ARTIN en théorie des tresses.
- [6] **Misner Charles W**, **THORNE Kip S**, **WHEELER John Archibald** - **WH FREEMANN** And Company San Francisco, page 1149, paragraphe 41.5 SPINORS
- [7] **Newman M.H.A.**, *Un problème de Corde de DIRAC*, The Journal of the London Mathematical Society vol 17, 3^{ème} partie, n° 67, pages 173-177, juillet 1942; La démonstration de la possibilité ou impossibilité du dénouement des 4 brins utilise les permutations et leur signature et la théorie des tresses d'ARTIN (*Il ne s'agit pas de Janos Neumann*).
- [8] **POUR LA SCIENCE**, *Les Particules élémentaires*, Bibliothèque Pour la Science, BELIN 1986 : espaces fibrés page 144 (rotation d'angle 4π et danse Binasuan).
- [9] **XUPS Conférence**, *Défaut sur les CRISTAUX*, 18 mai 1978 (Par TOULOUSE) et Particules Charmées, les QUARKS : précision donnée par Iliapoulos à une question orale d'un auditeur.
- est INTERIEUR; Norvégien de prénoms Thoralf Albert : Sandsvaer 1887-Oslo 1963) : Son portrait est page 747 du dictionnaire Mathématiques Slovar Moscou 1988; On en trouve la démonstration aussi dans SPM1 p. 141-146; Centrale 69; INT 1990; Mines 1992; Perrin p. 166.*
- [3] **Chambadal**, *Exercices et problèmes résolus d'algèbre*, Gauthiers Villars 1972, p. 202 207 Interprétation des quaternions à l'aide des rotations de \mathbb{R}^3 .
- [4] **Chambadal**, *Dictionnaire de Mathématiques*, Hachette 1981, p. 158 à "Intérieur".
- [5] **Chambadal & Ovaert**, *Algèbre Linéaire et Algèbre tensorielle*, Dunod Université 1968 (l'année phare), p. 479-480.
- [6] **Deltheil & Caire**, *Compléments de géométrie*, Baillière editeur 1951, p. 110-112; Formule D'Olinde Rodrigues (1794-1851) donnant une paramétrisation rationnelle des matrices orthogonales.
- [7] **Dieudonné Jean**, *Algèbre linéaire et Géométrie élémentaire*, 3ème édition Hermann 1968 (l'année phare), pages 200-207.
- [8] **Francis & Kaufmann**, *Air on the DIRAC STRINGS*, Article de 13 pages faisant partie d'un recueil à la mémoire de Wilhelm MAGNUS (1994). Il fait le lien entre l'expérience de DIRAC et les quaternions.
- [9] **Godbillon**, *Topologie Algébrique*, Hermann 1971, p. 40.
- [10] **Perrin**, *Cours d'Algèbre*, Fascicule 18 de l'ENS de Jeunes Filles 1990 p. 164, 173, 178.
- [11] **Tauvel**, *Mathématiques Générales pour l'Agrégation*, MASSON 1992, p. 235-237.
- [12] **Tissier**, *Agrégation Interne de Mathématiques Mathématiques Générales : exercices avec solutions*, Breal 1991, p. 67-69.
- [13] **Problèmes**.
 - ENS 1958; FAVARD Cours d'analyse de l'X (Gauthier Villars 1960) tome 1 p. 66;
 - DEUG MP 1964 p. 23 25 29 36 45;
 - MP 1970 p. 3 et 5 Besançon & Amiens;
 - RMS novembre 65 + Avril 82 p. 260;
 - Concours Général 1967+1978;
 - X + Centrale 1969; CAPES 1974-75 (RMS 4 74);
 - Arnaudies Algèbre (Dunod 1971) p. 511-512;
 - TAILLE problèmes de mathématiques (Vuibert 1966) p 30-36;

Bibliographie sur les Quaternions et Rotations

- [1] **APM 333**, *Sur les QUATERNIONS*, Bulletin de l'APMEP Avril 1982, par Jean Philippe Cortier, p. 257-262.
- [2] **Burban & Lopez**, *Oral crus 90-91* (Bréal éditeur) p. 158 : *Théorème de SKOLEM NÖTHER*, (*Tout automorphisme de $L(E)$*)

- RMS fév. 94 p. 468-469 à propos d'une QUESTION et REPONSE sur le sup. et inf. des $\sum |a_{i,j}|$ sur $SO(n)$;
- APM 259; INT 1990.
- RMS mai 91 p 454;
- XP' 93 RMS Janvier 94 p. 317 + Avril 94 p. 552-554.

[14] **RMS**, Revue de Mathématiques Spéciales, Février 1994 p. 494.

[15] **ROTATIONS**,

Expressions analytiques des rotations :
Ramis Odoux traité de Math spé Masson
tome 2 p. 87.

Ramis cours de math spé tome 3 Mason p.
327.

Deltheuil compléments de Géométrie
Baillères p. 378.

Arnaudies Algèbre Dunod 1971 p. 292.

Enregistrement de l'écran MAPLE et films de l'expérience de DIRAC.

- Si un simple camescope ne suffit pas (sautillage et moirage de l'écran), utiliser un convertisseur signal-écran \rightarrow vidéo beta FD CHROMATEX (se loue : il y en deux en FRANCE).
- Comme pour les cassettes pédagogiques SVM (EXCELL ...) on peut incruster un compteur et des caractères pour permettre des retours précis. Ou avec un DX C 537 SONY (Camescope).
- Il faut absolument opérer avec un pied pour la stabilité.

Annexe de VII

