

# BOOLE :

## VRAIMENT UN OISEAU DE NUIT EN PLEIN JOUR ?

*SIR WILLIAM HAMILTON, dont le dédain pour les mathématiques est resté célèbre, écrivait en 1866, dans "discussions on philosophy and litterature education and University reform", 3ème édition Blackwood and Sons Edimbourg et Londres p. 705 : " Les mathématiques ne sont en aucune manière une voie conduisant à la logique, que ce soit à la logique spéculative ou à la logique pratique... Le philosophe doit avoir quelque connaissance de leur objet et leur méthode, mais il ne doit s'y adonner qu'avec modération et précaution ; un mathématicien en matière contingente est comme on oiseau de nuit en plein jour." C'est en somme ce défi que relève G. Boole...*

L.G. Vidiani, Professeur de Mathématiques Spéciales  
Lycée Carnot, Dijon. 64, rue de l'Europe 21121 Fontaine Les Dijon.

Que peut-on trouver de commun entre un syllogisme, un circuit électrique, la décomposition d'un carré en carrés, la logique mathématique, la théorie des ensembles, la théorie de la mesure, le calcul des probabilités ?

C'est grâce aux travaux de **Boole** que les structures communes ont pu être dégagées.

George Boole est né le 2 novembre 1815 à Lincoln en Angleterre, d'une famille tout à fait humble, puisque son père était cordonnier (John Boole était un artisan hors du commun : il aimait les choses de l'esprit, s'intéressait à la science, aux mathématiques et sur un plan pratique, à la construction d'appareils optiques : il s'était fabriqué un télescope) apprit le latin et le grec grâce à un voisin libraire. C'est comme helléniste qu'il eut sa première publication à 14 ans : il adapta en anglais une "Ode au Printemps" attribuée à Méléagre ! Autodidacte en mathématiques, il commença à enseigner à l'âge de 16 ans, après avoir créé sa propre école. A partir de 1849, il fut professeur au nouveau Queen's collège à Cork en Irlande. Elu membre de la Royal Society en 1857, il doit être considéré comme le fondateur de la logique mathématique. Il mourut à Cork en 1864.

On lui doit : "The mathematical Analysis of Logic, being an essay towards a calculus of deductive reasoning" (1847), "An investigation of the laws of thought" (1854), "Treatise on differentials equations" (1859) et "Treatise on the calculus of finite differences" (1860).

Il réussit à faire de la logique une discipline mathéma-

tique par la traduction en termes symboliques de certaines fonctions caractéristiques du langage et en ramenant les lois de la pensée à la résolution d'équations logiques.

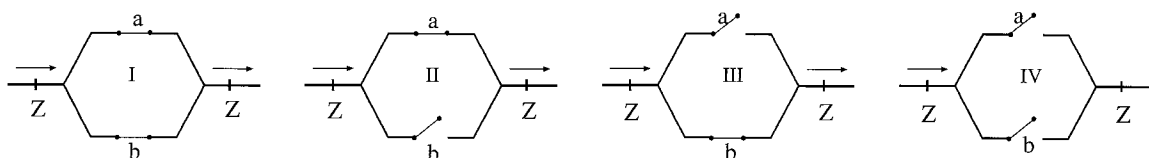
Cette mathématique propositionnelle de Boole devait rester pure spéculation théorique, cantonnée à la seule logique, jusqu'à ce qu'on se rende compte qu'elle pouvait être généralisée et érigée en outil de travail efficace pour ramener toutes fonctions univoques à deux états possibles.

Ce n'est qu'un siècle plus tard que la voie fut ouverte par Shannon aux applications pratiques, avec les conséquences que nous connaissons, puisque la technique Booléenne constitue la méthode d'étude des chaînes des circuits électriques et électroniques dont les structures sont à la base des ordinateurs.

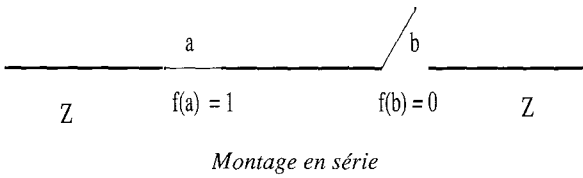
### Exemples d'applications pratiques.

Etant donné un réseau électrique avec  $n$  interrupteurs numérotés  $1... n$ , nous décrivons l'état du réseau en énumérant la suite  $a(1), a(2)...a(n)$  avec  $a(i) = 0$  si l'interrupteur numéro  $i$  est ouvert (le courant ne passe pas) et  $a(i)=1$  si l'interrupteur  $i$  est fermé (le courant passe) ; l'état du réseau se traduit donc par une suite binaire.

I :  $a = b = 1$  ; II :  $a = 1, b = 0$  ; III :  $a = 0, b = 1$  ;  
IV :  $a = b = 0$ .



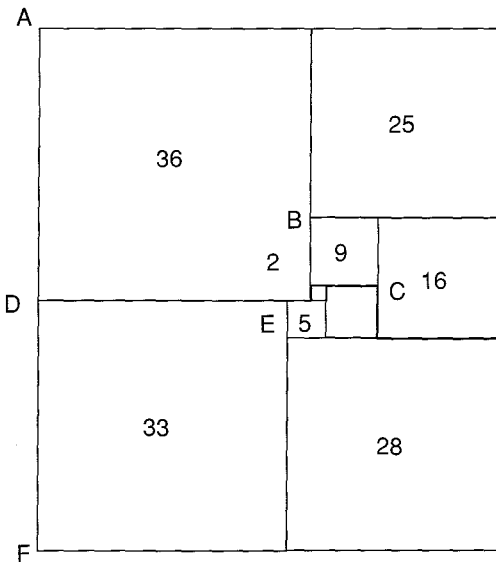
Montrons que le montage en dérivation de deux contacts  $a$  et  $b$  suivant la figure ci-dessus est équivalent à un contact unique  $c$ , suivant la loi de composition interne sur les contacts :  $c = a \vee b = a + b - ab$ , puisque  $c = 1$  équivaut à  $a = 1$  ou à  $b = 1$ . La table de composition interne de cette loi est immédiate.



De même le montage en série de deux contacts, comme ci-dessus, donne la loi de composition interne  $a \wedge b = ab$  puisque le contact n'est établi que si  $a$  et  $b$  sont fermés. Il est immédiat de vérifier que ces deux lois sur les circuits sont associatives, commutatives, mutuellement distributives et que  $\{0, 1\}$  muni de ces deux lois est donc un treillis distributif et complémenté.

Mais ? dites vous, quel lien peut-il exister entre les lois de Boole et la décomposition — annoncée dans le préambule — d'un carré (ou d'un rectangle) en des carrés plus petits tous différents ? Je ne vous fais pas plus languir.

De 1936 à 1938 quatre étudiants de l'Université de Cambridge (W. Tutte, A.H. Stone, C.A.B. Smith, R.L. Brooks) se posèrent le problème de cette décomposition, dont on voit un exemple dans la figure ci-dessous :



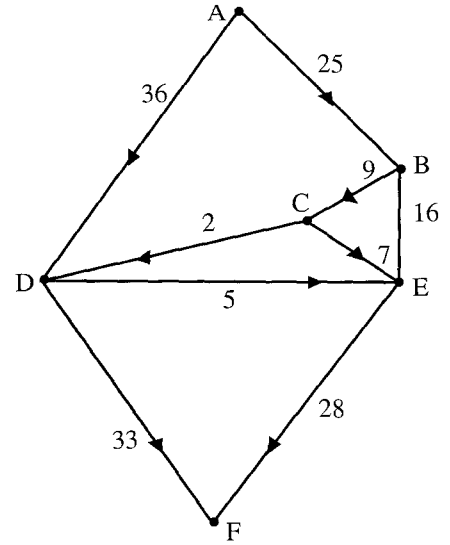
Et voici le plus surprenant.

Méthode du diagramme de Schmidt : on représente tout segment horizontal par un point ou un nœud dont la position correspond à l'extrémité de droite du segment horizontal homologue du rectangle.

Tout carré partiel du rectangle est limité en haut et en bas, par deux segments horizontaux. Ce carré est alors représenté sur le diagramme par une ligne ou *conducteur*, joignant les nœuds, représentant ses deux segments horizontaux.

Par exemple le diagramme ci-dessous représente la décomposition en carrés du rectangle de la figure précédente.

Imaginons qu'un courant parcourt chaque fil, avec une intensité numériquement égale au côté du carré correspondant, le sens du courant allant du nœud représentant le côté horizontal haut du carré, à celui représentant le côté horizontal bas.



Le pôle positif d'entrée du réseau est celui associé au côté horizontal haut du rectangle décomposé, tandis que le nœud de sortie est celui associé à son côté horizontal bas.

Si chaque fil est affecté de la résistance unité, les courants électriques, résultant du choix précédent satisfont aux lois de Kirchoff : comme la somme des côtés des carrés limités inférieurement par un segment horizontal donné est égale à la somme des côtés carrés limités supérieurement par le même segment, la *loi des nœuds* est satisfaite : la somme des intensités algébriques aboutissant à un nœud différent de l'entrée et de la sortie est nulle. De même la *loi des Mailles* est vérifiée, car la somme algébrique des variations des hauteurs des carrés associés aux branches de la maille est nulle. Le courant total qui entre dans le réseau par le pôle positif ou qui en sort par le pôle négatif est numériquement égal au côté horizontal du rectangle et la différence de potentiel entre l'entrée et la sortie est égale au côté vertical.

Le lien de la décomposition en carrés avec les circuits électriques, implique celui avec les lois de Boole.

A propos de carrés de carrés, cette anecdote : Tutte avait fait réaliser un modèle en bois de la décomposition d'un carré d'ordre 26 et de côté 608, qu'il avait disposé sur son bureau. Un jour la mère de Tutte renversa accidentellement le puzzle pendant l'absence de son fils ; affolée elle parvint à le reconstituer, croyant que son fils ne verrait rien : peine perdue elle avait découvert une **nouvelle solution** de ce problème.

*L'article qui suit est plus technique.*

*Il a été rédigé indépendamment de celui-ci et, est consacré à la présentation d'un système minimal d'axiomes d'algèbre de Boole.*