Algèbre de Boole :
Axiomes Minimaux

L.G. Vidiani

ALGÈBRE DE BOOLE

Appliquer les méthodes algébriques, à l'analyse du raisonnement, n'était pas une idée tout à fait neuve, lorsque George Boole, publia, en 1847, son essai d'analyse de la logique : déjà, au Moyen Âge Raimon Lull pressentait cette possibilité dans ses travaux de combinatoire ; mais surtout dans ses "Generales Inquisitiones de Analysi Notionum et Veritatum", Leibnitz en 1686 tentait déjà de représenter par un calcul les formes traditionnelles du syllogisme : dire tout homme est mortel est une redondance, puisqu'il n'y a pas d'autres hommes que des mortels HM = H ; de même tout grec est homme GH = G. Par associativité

$$G = GH = G(HM) = (GH)M = GM$$

dont tout grec est mortel.

Mais, dans d'autres contextes apparaissent d'autres analogies : E étant un ensemble, la relation d'inclusion dans $\mathscr{P}(E)$ $P \subseteq Q$ s'algébrise en $P \cap Q = P$, ou en $P \cup Q = Q$; de même dans $\mathscr{F}(E, \{0,1\})$ la relation $\alpha\beta = \alpha$ est une relation d'ordre, qui traduit justement, au moyen des fonctions caractéristiques, l'inclusion précédente.

Cependant, il ne faut pas réduire les applications des algèbres de Boole, à la logique et à l'électronique, ni à la théorie des ensembles : la théorie de la mesure et le calcul des probabilités, l'étude des connexions dans un graphe planaire, la théorie de la décision, ou les méthodes de raisonnement, ne peuvent se passer d'algèbre Booléenne.

Depuis Huntington (1904), une vingtaine de systèmes minimaux d'axiomes d'algèbre de Boole, ont été proposés (il est regrettable que les publications actuelles ne distinguent pas les *Axiomes*, des *Propriétés*) ; en voici un qui a l'avantage de ne pas dissimuler la dualité :

Axiomes Minimaux d'algèbre de Boole dans un ensemble E

- 1) E est muni de deux opérations internes * et + $\boxed{A1}$
  * comme × produit et ∩, + comme union.
- 2) Axiomes de DISTRIBUTIVITE : $\boxed{A2}$
  quels que soient A, B, C de E
  A*(B + C) = (A*B) + (A*C) A21
  A + (B*C) = (A + B)*(A + C) A22
  (A + B)*C = (A*C) + (B*C) A23
  (A*B) + C = (A + C)*(B + C) A24
- 3) Axiomes d'existence de Neutres : $\boxed{A3}$
  Il existe 1 et 0 de E tels que pour tout A de E on a :
  A*1 = 1*A = A (A31) A + 0 = 0 + A = A (A32)
- 4) Axiome d'existence de complémentaire : $\boxed{A4}$
  quel que soit A de E il existe X noté $\complement A$ ou ${}^tA$ ou A´ que A*X = 0 (A41) et A + X = 1 (A42)

De ces axiomes découlent alors les propriétés suivantes :

$\boxed{P1 : \complement\complement A = A}$

pour tout A de E ; Posons $X = {}^tA$ et $Y = {}^tX$:
nous voulons montrer que ${}^{tt}A = A$ c'est à dire Y = A ;

$$Y \underset{A31}{=} 1*Y \underset{A42}{=} (A + X)*Y \underset{A2}{=} A*Y + X*Y \underset{A41}{=} A*Y + 0$$
$$\underset{A32}{=} A*Y \underset{A32}{=} 0 + A*Y \underset{A41}{=} A*X + A*Y$$
$$\underset{A2}{=} A*(X + Y) \underset{A42}{=} A*1 \underset{A31}{=} A \text{ : on a bien } \boxed{{}^{tt}A=A}$$

$\boxed{\text{P2 : Commutativité de * et + pour le complémentaire}}$

Comme $Y = {}^tX$ et Y = A, A41 donne $0 = X*{}^tX =$ X + A (A41′) et $1 = X + {}^tX = X + A$ (A42′)

P21 d'après A3 avec A = 0 0*1 = 0 et 1 + 0 = 1 donc d'après A4 $0 = \complement 1$ et $1 = \complement 0$.

$\boxed{\text{P3 Unicité du complémentaire}}$

Si A avait deux complémentaires X1 et X2 on aurait :

$$X1 \underset{A3}{=} 0 + X1 \underset{A41}{=} (A*X2) + X1 \underset{A2}{=} (A + X1)*(X2 + X1)$$
$$\underset{A42}{=} 1*(X2 + X1) \underset{A42'}{=} (X2 + A)*(X2 + X1)$$
$$\underset{A2}{=} X2 + (A*X1) \underset{A41}{=} X2 + 0 \underset{A3}{=} X2$$

$\boxed{\text{SP31 le complémentaire de A est la seule solution du système } |A + Y=1| \; Y*A = 0}$

Nous notons SP cette propriété comme "Super" propriété, car cette propriété du complémentaire semble être le nœud des démonstrations des points les plus difficiles : l'absorption A*(B*A) = B*A, clef de la commutativité et de l'associativité ; nous venons de démontrer que A ' était la solution unique du système

$A + X = 1$ (1) $A*X = 0$ (2) (noter bien la même place à droite de X) ; d'après P2, A´ est vérifié également les deux équations $X + A = 1$ (3) $X*A = 0$ (4). Multiplions, au sens *, les deux membres de l'équation $A + Y = 1$, à droite par X et utilisons les axiomes A2 de distributivité et A3 d'élément neutre : nous avons compte tenu de (2) et (4) : $Y*X = X$.

Multiplions aussi les deux membres de l'identité $A + X = 1$, à gauche par Y, alors par distributivité A2, et 1 neutre pour *, il reste compte tenu de ce que $Y*A = 0$, $Y*X = Y$ donc $Y = X$.

LOI DE BOOLE (dites aussi de Taupologie ou d'absorbtion)

$\forall$ A, B, C de E

$\boxed{P4 \quad A*A = A}$ $A \underset{A3}{=} A*1 \underset{A42}{=} A*(A + {}^tA)$

$\underset{A2}{=} (A*A) + (A*{}^tA) \underset{A41}{=} (A*A)+0 \underset{A"3}{=} A*A$

$\boxed{P5 \quad A + A = A}$ $A \underset{A3}{=} A + 0 \underset{A41}{=} A + (A*{}^tA)$

$\underset{A2}{=} (A + A)*(A + {}^tA) \underset{A42}{=} (A + A)*1 \underset{A3}{=} A + A$

$\boxed{\text{P51 absorbtion des pôles}}$

° $0 \underset{A4}{=} A*A' \underset{A3}{=} A*(A'+ 0) \underset{A2}{=} A*A' + A*0$

$\underset{A4}{=} 0 + A*0 \underset{A3}{=} A*0$ $\boxed{A*0 = 0}$

° $0 \underset{A4\,P1}{=} A'*A \underset{A3}{=} (A' + 0)*A \underset{A2}{=} A'*A + 0*A$

$\underset{A4\,P1}{=} 0 + 0*A$ $\boxed{0*A = 0}$

° $1 \underset{A4}{=} A + A' \underset{A3}{=} A + (A'*1) \underset{A2}{=} (A + A')*(A + 1)$

$\underset{A4}{=} 1*(A + 1) \underset{A3}{=} A* + 1$ $\boxed{A + 1 = 1}$

° En partant de $1 = A'+ A$ d'après A4 et P1 on obtient de même $\boxed{1 + A = 1}$

Chaque pôle neutre pour une loi est absorbant pour l'autre loi !

$\boxed{P6 \ A*B = A \text{ et } A + B = A \text{ équivaut à } A = B}$

° Il suffit d'après P4 et P5

° Il faut : $1 = {}^tA + A = {}^tA + (A*B)$

$\underset{A2}{=} ({}^tA + A)*({}^tA + B) \underset{A42'}{=} 1*({}^tA + B) \underset{A3}{=} {}^tA + B$

de même $A + B = A \Rightarrow 0 \underset{A41}{=} {}^tA*(A + B)$

$\underset{A2}{=} ({}^tA*A) + ({}^tA*B) \underset{A41}{=} 0 + ({}^tA*B) \underset{A3}{=} {}^tA*B$

⊗ Les deux relations trouvées ${}^tA+B=1$ et ${}^tA*B=0$ caractérisent d'après A4 le complémentaire unique (=A d'après P1) de ${}^tA$: ainsi $B = {}^t({}^tA) = A$

(Cette propriété P6 peut servir pour démontrer d'autres égalités, en particulier l'associativité...)

$\boxed{SP'6 \quad A*B = A \text{ et } B + A = A \text{ équivaut à } A = B}$

"Super" propriété SP´6, qui décode la commutativité et l'asociativité en élucidant SP7 et qui commande d'ailleurs les notions de treillis distributif et complémenté, où elle est d'ailleurs souvent employée sous une forme, plus générale.
Cette propriété va être une conséquence de SP31.

Sachant $A*B = A$ et $B + A = A$ (rappelons que nous ne connaissons pas la commutativté des lois * et +) nous avons d'après A4 et P2 :

$1 = A'+ A \underset{\text{hypothèse}}{=} A'+ (A*B) \underset{A2}{=} (A'+ A)*(A'+ B)$

$\underset{A4\,P2}{=} 1*(A'+ B) \underset{A3}{=} A' + B$

$0 = A'*A \underset{P2}{=} A*A' \underset{\text{hypothèse}}{=} (B + A)*A' \underset{A2}{=} (B*A')+ A*A'$

$\underset{A4\,P2}{=} (B*A') + 0 \underset{A3}{=} B*A'$

Ce qui implique par SP31 que $B = (A')' = A$ d'après P1.

$\boxed{P7 \quad A*B = C \Rightarrow A*C = C \text{ et } C*B = C}$

(Les propriétés de cette rubrique, semble les plus utiles, avec les propriétés d'absorbtion P4, P5 et P51.)

° Si $A*B = C$ alors $A*C \underset{A3}{=} (A*C)+0 \underset{A41}{=} (A*C)+(A*{}^tA)$

$\underset{A2}{=} A*(C+{}^tA) = A*\left[(A*B)+{}^tA\right] \underset{A2}{=} A*\left[(A+{}^tA)*(B+{}^tA)\right]$

$\underset{A41}{=} A*\left[1*(B+{}^tA)\right] \underset{A3}{=} A*(B+{}^tA) \underset{A2}{=} A*B+A*{}^tA \underset{A41}{=} A*B+0$

$\underset{A3}{=} A*B = C.$ $\boxed{A*(A*B) = A*B}$

° De même toujours si $A*B=C$ alors $C*B \underset{A42}{=} (C*B)+0$

$= (C*B) + ({}^tB*B) \underset{A2}{=} (C + {}^tB)*B = \left[(A*B) + {}^tB\right]*B$

$\underset{A2}{=} \left[(A + {}^tB)*(B + {}^tB)\right]*B \underset{A42}{=} \left[(A + {}^tB)*1\right]*B \underset{A3}{=} (A + {}^tB)*B$

$\underset{A2}{=} (A*B) + ({}^tB*B) \underset{A41}{=} (A*B) + 0 \underset{A3}{=} A*B = C$

$\boxed{(A*B)*B = A*B}$

$\boxed{P'7 :}$ Montrons de même qui si $A + B = C$ alors $A + C = C$:

$A + C = (A + C)*1 = (A + C)*(A + {}^tA) = A + (C*{}^tA)$

$= A + \left[(A+B)*{}^tA\right] = A + \left[(A*{}^tA) + B*{}^tA\right]$

$= A + \left[0 + B*{}^tA\right] = (A + B)*(A + {}^tA) = (A + B)*1$

$= A + B = C$ $\boxed{A + (A + B) = A + B}$

De même on montre que C + B = C

$\boxed{(A + B) + B = A + B}$

$\boxed{P71 :}$ $(A*B) + A \underset{A31}{=} A*B + A*1 \underset{A21}{=} A*(B + 1)$

$\underset{P51}{=} A*1 \underset{A3}{=} A$ $\boxed{(A*B) + A = A}$

° De même $A + (A*B) = A*1 + A*B = A*(1 + B)$

$= A*1 = A$ $\boxed{A + (A*B) = A}$

° De même on montre que $(A*B) + B = (A*B)+1*B$
$= (A+1)*B = 1*B = B$

$\boxed{(A*B) + B = B}$ et $\boxed{B + (A*B) = B}$

De même on montre : $\boxed{(A + B)*A = A}$ $\boxed{A*(A + B) = A}$

$\boxed{(A + B)*B = B}$ $\boxed{B*(A + B) = B}$

$\boxed{SP7 \quad B*(A*B) = A*B}$ "Super - Propriété" clef de la commutativité et associativité, et que nous allons démontrer au moyen de SP'6 :

° Posons $C = A*B$. Nous vous montrons que $B*C = C$

$(B*C)*C \underset{P7}{=} B*C$ et $C + (B*C) \underset{A2\ P4}{=} (C + B)*C$

or $C + B = (A*B) + B \underset{P71}{=} B$ donc $C + (B*C) = B*C$ qui conjointement à $(B*C)*C = B*C$ donne $C = B*C$

par SP'6, et ainsi nous avons bien $\boxed{B*(A*B) = A*B}$

et bien sûr de la même manière $\boxed{(A*B)*A = A*B}$

et par dualité les propriétés

$\boxed{B + (A + B) = A + B \text{ et } (A + B) + A = A + B}$

$\boxed{P8 \quad COMMUTATIVITE}$ Tout repose sur $(A*B)*A = A*B$(SP71).

D'après ce qui précède (propriété P71) $(A*B) + B = B$ d'où $B*A = [(A*B) + B] *A$; le second membre s'écrit par distributivité (A2)

$[(A*B)*A] + (B*A) \underset{SP7}{=} (A*B) + (B*A)$

En partant de $B + (A*B) = B$ analogue à P71 on a de même : $B*A = [B + (A*B)] *A$ et par distributivité (A2)

$[(A*B)*A] + (B*A) \underset{SP7}{=} (A*B) + (B*A)$

mais on peut échangert le rôle de A et B, d'où $(A*B) + (B*A) = A*B$ ce qui rapproché des premiers résultats permet de conclure $A*B = B*A$ et par dualité (en échangeant les rôles de + et *) on a tout de suite $A + B = B + A$.

$\boxed{P8 \quad ASSOCIATIVITE DE *}$

Noter qu'on ne fait pas appel à la commutativité.

° $(A+B) + C \underset{A3}{=} 1*[(A + B) + C]$

$\underset{A4}{=} (A + A')*[(A + B) + C]$

$\underset{A2}{=} A*[(A + B) + C] + A'*[(A + B) + C]$

$\underset{A2}{=} (A*(A + B) + A*C)+A'*[(A + B) + C]$

$\underset{P71}{=} (A + A*C) + A'*[(A + B) + C]$

$\underset{P71\ A2}{=} A + [0 + A'*B) + A'*C] \underset{A3\ A2}{=} A+A'*(B + C)$

de même : $A + (B + C) \underset{A3}{=} 1*[A + (B + C)]$

$\underset{A4}{=} (A + A')*[A + (B + C)]$

$\underset{A2}{=} A*[A + (B + C)] +A'*[A + (B + C)]$

$\underset{P71\ A2}{=} A + (A*A + (A'*B + A'*C))$

$\underset{A4\ A2}{=} A + [0+(A'*B) + (A'*C)]$

$\underset{A3\ A2}{=} A + A'*(B + C)$ d'où $(A + B) + C = A + (B + C)$ et l'associativité de +.

° En échangeant les rôles de + et * dans la démonstration précédente et les axiomes ou propriétés analogues on a l'associativité de *.

$\boxed{P9 \quad DUALITE}$ ou loi de MORGAN.

° Avec l'associativité et la commutativité des deux lois * et + nous avons :

$(A + B) + (A'*B') \underset{A2}{=} ((A + B) + A')*((A + B) + B')$

$= B*B' = 1$ et de même $(A + B)*(A'*B')$

$\underset{A2}{=} (A*(A'*B')) + B*(A'*B') = (0*B') + (0*A')$

$= 0 + 0 = 0$, par conséquent $A + B$ et $A'*B'$ sont complémentaires mutuellement l'un de l'autre :

$\boxed{\complement(A + B) = (\complement A)*(\complement B)}$ $\boxed{\text{et } \complement(A*B) = (\complement A) + (\complement B)}$

Loi de MORGAN.

° Il resterait à vérifier que l'axiomatisation proposée et encadrée est bien minimale, en exhibant, pour chaque retrait d'un axiome, un ensemble vérifiant les autres, mais pas les propriétés : on dit que le système de postulats proposés est INDEPENDANT ; sa CONSISTANCE, se fait en exhibant un ensemble muni de deux lois * et + internes, vérifiant les axiomes A2, A3, A4 ce qui est immédiat en prenant un des exemples suggérés au début de l'article.

Indications bibliographiques :

- Chantiers Mathématiques 1965 (IPN, 29 rue d'Ulm, Paris).
- Ergebnisse, de Sikorski (1960)
- Lattice Theory, de G. Birkoff (1940)
- Leçons d'algèbre moderne, Dubreuil et Dubreuil-Jacotin (Dunod 1969) pp 190 et 207.
- Algèbre, Dubreuil, Gauthiers Villars, 1963
- Leçons sur la théorie des Treillis, Dubreuil-Jacotin, Lesieur et Croisot.
- Exercices de J. Rivaud (Algèbre), Vuibert 1975, p 17 à 23.