96^e année (1985-1986) Mai 1986 - Mensuel n° 9

Revue de Mathématiques Spéciales

Polynômes de Bézout

par L. G. VIDIANI, professeur en Mathématiques Spéciales au lycée Carnot de Dijon.

L'objet de cet article est d'obtenir des résultats bien plus précis, que celui qui était demandé dans la dernière question du problème de mathématiques au concours des Mines d'Alès 1983, où il était seulement demandé le dénombrement des zéros réels des polynômes de Bézout. Nous préciserons en outre leur localisation, ainsi que leur comportement en fonction du paramètre m des polynômes de Bézout F_m.

Certains des résultats intermédiaires seront d'ailleurs établis par des méthodes plus rapides que celles suggérées par l'énoncé cité plus haut, qui n'avait pour objet que de vérifier les réactions des candidats.

A étant un anneau intègre, il est classique que lorsque A est principal (donc factoriel) le fait que deux éléments a et b soient premiers entre eux implique l'existence de deux éléments u et v de A tels que

$$(1) \qquad au + bv = 1$$

(identité de Bézout). Inversement si deux éléments de A, a et b vérifient une identité de Bézout, ils sont premiers entre eux, tout diviseur commun devant être inversible dans A, ceci ayant lieu même si A n'est pas principal.

Par contre si A n'est pas principal deux éléments peuvent être premiers entre eux et ne satisfaire à aucune identité de Bézout.

Ainsi si $A = Z[X]$ les deux polynômes

$$X^2 + 1 \quad \text{et} \quad 2X$$

sont premiers entre eux, car tout diviseur commun diviserait leur somme $(X + 1)^2$ donc

$$2X = (X + 1)P_1$$

ce qui serait absurde en substituant -1 à X, et pourtant l'existence de deux polynômes U et V de $\mathbb{Z}[X]$ tels que

$$(X^2 + 1)U + 2XV = 1$$
$$\Leftrightarrow (X + 1)^2U + 2X(V - U) = 1$$

serait absurde par la même substitution :

$$-2(V(-1) - U(-1)) = 1$$

(1 serait pair). Il est possible évidemment d'obtenir les mêmes conclusions, en évitant les substitutions et en raisonnant sur les polynômes formels.

Ce dernier résultat a comme conséquence classique que $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal (l'idéal engendré par $X^2 + 1$ et $2X$ ne pourrait être engendré, s'il l'était, que par 1 qui n'y appartient pas) et que l'idéal engendré par $X^2 + 1$ est premier non maximal.

Enfin si A est factoriel, la connaissance d'une solution (u_0, v_0) de l'identité de Bézout (1) donne que tout autre (u, v) vérifie

$$a(u - u_0) = b(v_0 - v).$$

Comme le théorème de Gauss est valable dans A factoriel, a divise $v_0 - v$, il existe donc s élément de A tel que

$$v = v_0 - as,$$

et comme A est intègre, et que a et b ne sont pas tous deux nuls à cause de (1)

$$u = u_0 + bs.$$

La solution générale de l'identité de Bézout est donc donnée par

$$(2) \qquad \begin{cases} u = u_0 + bs \\ v = v_0 - as \end{cases}$$

s étant arbitraire dans A.

Remarquons que les formules (2) seraient inexactes dans un anneau non intègre, par exemple dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ où la solution générale de

$$3u + 5v = 1$$

serait donnée par

$$u = u_0 - 5s + t, \quad v = v_0 - 3s$$

avec $t \in \{0, 2, 4\}$.

Lorsque A est euclidien (donc principal) on peut d'ailleurs préciser qu'il existe une solution unique satisfaisant à une condition supplémentaire sur leur valuation euclidienne. Ainsi

- si $A = \mathbb{Z}$, et $a > 2$, $b > 2$, l'identité de Bézout

$$au + bv = 1$$

admet une solution unique (u_0, v_0) vérifiant

$$|u_0| < \frac{b}{2} \quad \text{et} \quad |v_0| < \frac{a}{2}.$$

(pour une démonstration on peut se reporter à la première référence bibliographique);

• si A = K[X] avec K corps, il existe un couple unique de solutions de (1) vérifiant

$$\partial^o u < \partial^o b, \quad \partial^o v < \partial^o a.$$

Ces polynômes particuliers sont appelés polynômes de Bézout d'après une dénomination introduite dans la seconde référence bibliographique.

Pour les obtenir il suffit d'ailleurs de diviser euclidiennement u_0 par b et v_0 par a.

L'algorithme d'Euclide permet d'ailleurs d'obtenir la solution de (1) satisfaisant à cette condition de degré ou de valuation.

En outre toute solution (u, v) de (1) donne avec $p = au\beta + vb\alpha$ une solution particulière au lemme Chinois

$$\begin{cases} p \equiv \alpha \quad (a) \\ p \equiv \beta \quad (b). \end{cases}$$

De plus si A = K[X] et si b est égal à

$$\lambda(X-\beta_1)^{m_1} \dots (X-\beta_q)^{m_q}, \quad \beta_i \neq \beta_j, \; i \neq j, \; m_i \in \mathbb{N}^*$$

alors le polynôme de Bézout, u, solution de $au + bv = 1$, est le polynôme de Lagrange satisfaisant aux conditions :

$$u(\beta_i) = \frac{1}{a(\beta_i)}$$

$$u^{(k)}(\beta_i) = -\frac{1}{a(\beta_i)}\left[\sum_{k'=1}^{k'=k} C_k^{k'} u^{(k-k')}(\beta_i) a^{(k')}(\beta_i)\right]$$

$\forall k, \quad 1 \leqslant k \leqslant m_i - 1, \qquad \forall i, \quad i = 1, 2, \dots, q,$ en particulier si b a toutes ses racines β_i simples u est le polynôme de Lagrange correspondant aux conditions :

$$u(\beta_i) = \frac{1}{a(\beta_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

Mais dans certains cas particuliers on peut procéder autrement pour obtenir directement les solutions de (1).

Dorénavant prenons l'anneau A = K[X] et soit a et b deux éléments de K distincts, alors l'application de la formule du binôme de Newton à $(a-b)^{m+n-1}$ permet d'obtenir directement une solution particulière à l'identité de Bézout

$$(1') \qquad (a - X)^m U + (X - b)^n V = 1$$

avec m, n éléments de $\mathbb{N}^*$. En effet

$$(a-b)^{m+n-1} = (a - X + X - b)^{m+n-1}$$
$$= \sum_{k=0}^{m+n-1} C_{m+n-1}^k (a-X)^{m+n-1-k}(X-b)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} + \sum_{k=n}^{m+n-1}$$

$$(a-b)^{m+n-1} = (a-X)^m \sum_{k=0}^{n-1} C_{m+n-1}^k (a-X)^{n-1-k}(X-b)^k$$
$$+ (X-b)^n \sum_{k=n}^{m+n-1} C_{m+n-1}^k (a-X)^{m+n-1-k}(X-b)^{k-n}.$$

Alors les deux polynômes $F_{m,n,a,b}$ et $G_{m,n,a,b}$ donnés dans la formule (3) ci-dessous sont, compte tenu de leur degré, les polynômes de Bézout solutions de (1)'

$$(3) \quad F_{m,n,a,b}(X) = \frac{1}{(a-b)^{m+n-1}} \times \sum_{k=0}^{n-1} C_{m+n-1}^k (a-X)^{n-1-k}(X-b)^k$$
$$\partial^0 F_{m,n,a,b} \leqslant n - 1$$

$$G_{m,n,a,b}(X) = \frac{1}{(a-b)^{m+n-1}} \times \sum_{k=n}^{m+n-1} C_{m+n-1}^k (a-X)^{m+n-1-k}(X-b)^{k-n}$$
$$\partial^0 G_{m,n,a,b} \leqslant m - 1.$$

Il n'est pas sans intérêt de remarquer que par exemple $(1-X)^m F_{m,n,1,0}(X)$ est le polynôme de Bernstein d'ordre $m + n - 1$ associé à toute fonction f telle que

$$f\left(\frac{k}{m+n-1}\right) = 1, \qquad k \leqslant n - 1,$$
$$f\left(\frac{k}{m+n-1}\right) = 0, \qquad k > n$$

et qu'on a la majoration (d'ailleurs peu fine) :

$$|F_{m,n,a,b}(X)| \leqslant \frac{1}{|a-b|^{m+n-1}|a-X|^m} \times (|a-X| + |X-b|)^{m+n-1}.$$

On déduit de (3) les résultats utiles pour la suite

$$F'_{m,n,a,b}(a) = mC_{m+n-1}^{n-2} \times \frac{1}{(a-b)^{m+1}}.$$

$$(4) \quad F_{m,n,a,b}(a) = \frac{1}{(a-b)^m} C_{m+n-1}^{n-1}$$
$$= \frac{1}{(a-b)^m} C_{m+n-1}^m$$

en particulier

$$F_{m,n,1,0}(1) = C_{m+n-1}^m, \qquad F_{m,m,0,1}(1) = C_{2m-1}^m$$

et

$$F_{m,n,a,b}(b) = \frac{1}{(a-b)^m}.$$

Le changement d'indéterminée défini par

$$X = b + (a-b)t$$

dans (1') donne en posant

$$U^*(t) = U(b + (a-b)t),$$
$$(a-b)^m(1-t)^m U^*(t) + (a-b)^n t^n V^*(t) = 1$$

donc

$$F_{m,n,1,0}(t) = (a-b)^m F_{m,n,a,b}(b+(a-b)t)$$

et

$$G_{m,n,a,b}(t) = (a-b)^m G_{m,n,a,b}(b+(a-b)t)$$

puisqu'il y a unicité des polynômes de Bézout et donc

$$F_{m,n,a,b}(X) = \frac{1}{(a-b)^m} F_{m,n,1,0}\left(\frac{X-b}{a-b}\right)$$

$$G_{m,n,a,b}(X) = \frac{1}{(a-b)^n} G_{m,n,0,1}\left(\frac{X-b}{a-b}\right).$$

Cette remarque permet de se limiter au cas $a = 1$, $b = 0$.

Lorsque $n = m$ le changement $x = a + b - t$ dans (1′) donne

$$(t-b)^m U(a+b-t)+(a-t)^m V(a+b-t)=1$$

et l'unicité des polynômes de Bézout donne

$$G_{m,m,a,b}(t) = F_{m,m,a,b}(a+b-t)$$

ainsi

$$F_{m,m,a,b}\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{2^{m-1}}{(a-b)^m}.$$

Ce qui permet lorsque $n = m$ de déduire les propriétés de $G_{m,m,a,b}$ de celles de $F_{m,m,a,b}$.

Prenons dorénavant $n = m$ et désignons par F_m le polynôme $F_{m,m,1,0}$ et par G_m le polynôme $G_{m,m,1,0}$. On a donc la relation (1″)

$$(1-x)^m F_m(x) + x^m G_m(x) = 1.$$

En dérivant les deux membres de cette relation par rapport à x on obtient

$$(1-x)^{m-1}[(1-x)F'_m(x) - mF_m(x)] = -x^{m-1}[xG'_m(x) + mG_m(x)]$$

d'après le théorème de Gauss le polynôme x^{m-1} divise le premier membre et est premier avec $(1-x)^{m-1}$ donc divise

$$(1-x)F'_m(x) - mF_m(x),$$

dont le degré est au plus $m-1$. Le quotient est donc une constante C.

$$(1-x)F'_m(x) - mF_m(x) = Cx^{m-1}.$$

La substitution $x = 1$ donne $-mF_m(1) = C$, $C = -mC_{2m-1}^{m-1}$ d'après (4) et donc

$$(5)\quad mF_m(x) - (1-x)F'_m(x) = mC_{2m-1}^{m-1}x^{m-1}.$$

Cherchons alors $F_m(x)$ sous la forme indéterminée

$$F_m(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k + \cdots + a_{m-1}x^{m-1}$$

$a_0 = F(0) = 1$ par (4).

Pour $0 \leqslant k \leqslant m-2$ le coefficient de x^k dans le premier membre est nul; ainsi

$$(m+k)a_k - (k+1)a_{k+1} = 0$$

$$\begin{cases} ka_k = (m+k-1)a_{k-1}, \quad \forall k \in [1, m-1], \\ (k-1)a_{k-1} = (m+k-2)a_{k-2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 1a_1 = ma_0 \end{cases}$$

d'où $k!\,a_k = m(m+1)\cdots(m+k-1)$

$$a_k = C_{m+k-1}^k = C_{m+k-1}^{m-1}$$

et donc

$$(6)\qquad F_m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} C_{m+k-1}^{m-1}x^k.$$

Comme

$$C_{m+k}^k = \frac{m+k}{m} C_{m+k-1}^k \geqslant C_{m+k-1}^k, \quad \forall k \leqslant m+k-1$$

on en déduit $F_{m+1}(x) \geqslant F_m(x)$, $\forall x \geqslant 0$ l'égalité n'ayant lieu que pour $x = 0$.

Cette dernière formule, qui pouvait s'obtenir soit à partir de regroupements dans (3) en utilisant la propriété

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1},$$

soit en remarquant que d'après (1″) $F_m(x)$ est le quotient de la division suivant les puissances croissantes à l'ordre $m-1$ de 1 par $(1-x)^m$, soit avec le développement limité du « binôme » que $F_m(x)$ est la partie régulière du développement limité de $(1-x)^{-m}$ à la précision x^m, est particulièrement intéressante, car elle montre que pour expliciter F_m suivant les puissances croissantes il suffit de lire ses coefficients dans l'ordre croissant dans *la colonne $m-1$ du tableau de Pascal de la ligne $m-1$ à la ligne $2m-2$*, ainsi on « lit » par exemple directement dans la page 166 des tables de Laborde, à partir de la colonne 15 du tableau de Pascal :

$$\begin{aligned} F_{16}(x) = {} & 1+16x+136x^2+816x^3+3\,876x^4 \\ & +15\,504x^5+54\,264x^6+170\,544x^7+490\,314x^8 \\ & +1\,307\,504x^9+3\,268\,760x^{10}+7\,726\,160x^{11} \\ & +17\,383\,860x^{12}+37\,442\,160x^{13} \\ & +77\,558\,760x^{14}+155\,117\,520x^{15} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F_{16}(1) = C_{31}^{15} &= 155\,117\,520 + 145\,422\,675 \\ &= 300\,540\,195. \end{aligned}$$

On en déduit une nouvelle propriété du tableau de Pascal : la somme des m premiers termes de la colonne $m-1$ est C_{2m-1}^m. On peut aussi ordonner $G_m(x)$ et, en permutant les sommations, on a

$$\begin{aligned} G_m(x) = F_m(1-x) &= \sum_{p=0}^{m-1} C_{m+p-1}^p (1-x)^p \\ &= \sum_{p=0}^{m-1} C_{m+p-1}^p \sum_{k=0}^{p} (-x)^k C_p^k \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-x)^k}{k!} \sum_{p=k}^{m-1} \frac{(m+p-1)!}{(p-k)!} \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-x)^k(m+k-1)!}{k!} \sum_{p=k}^{n-1} C_{m+p-1}^{m+k-1}. \end{aligned}$$

Or en utilisant systématiquement

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

et en remplaçant le premier terme $C_{n+k-1}^{n+k-1} = 1$ par C_{n+k}^{n+k} on a $\sum_{p=k}^{n-1} C_{m+p-1}^{m+k-1} = C_{2m-1}^{m+k}$ et donc

$$G_m(x) = \frac{1}{(m-1)!} \times \sum_{k=0}^{m-1} (-x)^k \frac{(m+k-1)!}{k!} \frac{(2m-1)!}{(m+k)!\,(m-k-1)!}$$

$$G_m(x) = \frac{(2m-1)!}{(m-1)!} \times \sum_{k=0}^{m-1} (-x)^k \frac{1}{k!\,(m-k-1)!} \cdot \frac{1}{(m+k)}$$

$$G_m(x) = \frac{(2m-1)!}{(m-1)!^2} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \frac{C_{m-1}^k}{m+k} x^k.$$

F_m ayant tous ses coefficients positifs strictement ne peut avoir ses zéros réels éventuels que dans $\mathbb{R}^{-*}$.

Soit r un tel zéro; (1″) donne $r^m G_m(r) = 1$.

Posons $r = 1 - \rho$, $r < 0$ implique $\rho > 1$ et, d'après $G_m(r) = G_m(1-\rho) = F_m(\rho)$, on a

$$r^m F_m(1-r) = 1.$$

$r^m = \dfrac{1}{F_m(1-r)} > 0$ comme $r < 0$, on conclut immédiatement que les polynômes F_{2k+1} *n'ont aucun zéro réel* et que les polynômes F_{2k}, qui étant de degré impair $2k-1$ en ont au moins un, ont leurs zéros r qui vérifient

$$-\frac{1}{\sqrt[2k]{F_{2k}(1)}} < r < 0 \quad \text{comme}$$

$$\frac{F_{m+1}(1)}{F_m(1)} \xrightarrow[m \to \infty]{} 4 \quad \text{alors} \quad \frac{-1}{\sqrt[2k]{F_{2k}(1)}} \xrightarrow[k \to \infty]{} -\frac{1}{4}.$$

Pour prouver l'existence et l'unicité d'un zéro réel r_m de F_m lorsque m est pair, étudions les variations de F_m.

(5) donne

(7) $\quad (1-x)F'_m(x) = m(F_m(x) - F_m(1)x^{m-1})$

donc $\underset{m \geq 2}{F'_m(0)} = m$.

$$F'_m(r_m) = \frac{-mF_m(1)r_m^{m-1}}{1-r_m} > 0$$

$$F'_m\left(\frac{1}{2}\right) = 2m\left(F_m\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{F_m(1)}{2^{m-1}}\right).$$

On sait déjà d'après (6) que F_m étant à coefficients positifs, est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, et que pour x négatif (et même x inférieur à 1)) la formule (7) montre que $F'_m(x)$ est du signe de

$$F_m(x) - F_m(1)x^{m-1}.$$

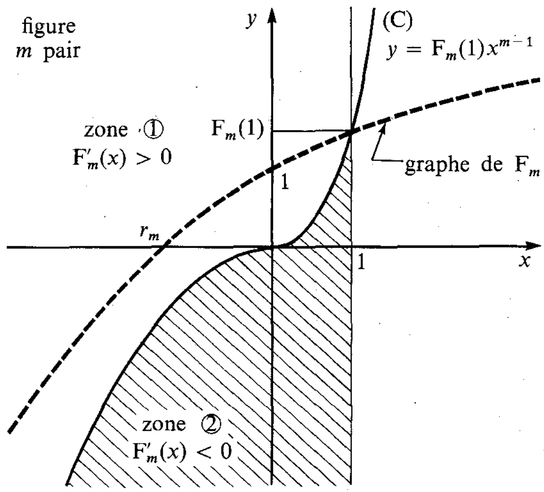
La courbe (C) d'équation

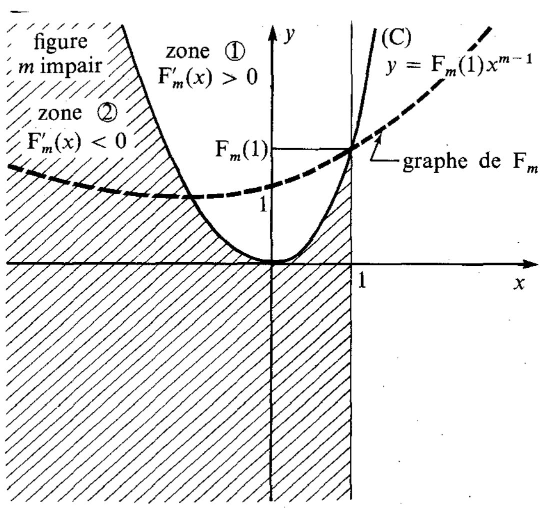
$$y = F_m(1)x^{m-1}$$

partage le demi-plan x inférieur ou égal à 1 en deux régions : la zone (1) épigraphe de (C) et la zone (2) complémentaire de l'union de (C) et de son épigraphe par rapport au demi-plan x inférieur à 1. En particulier comme $F'_m(1)$ est fini puisque F_m est un polynôme le graphe de F_m ne coupe la droite $x = 1$ qu'au point $(1, F_m(1))$ qui est sur (C) sinon $F'_m(1)$ serait infini.

Dans la zone (1) $F'_m(x)$ est strictement positif, dans la zone (2) $F'_m(x)$ est strictement négatif. Aucun point du graphe de F_m d'abcisse inférieure à 1 ne peut être dans la zone (2) dans le cas m pair. Dans le cas m impair, aucun point du graphe de F_m d'abcisse inférieur à 1, et d'ordonnée négative ou nulle, ne peut être dans la zone (2). En effet, sinon dans ces deux cas, ni le point $(0, 1)$ ni $(1, F_m(1))$ points du graphe de F_m ne pourraient être atteints par continuité.

D'où l'allure du graphe de F_m (en pointillés sur les figures) dans les deux cas de parité de m, et en même temps le sens de variation de F_m rendus évidents par les figures ci-dessous :





On pourra étudier les D.A.

De plus comme $\left|\dfrac{F_m(x)}{F_m(1)x^{m-1}}\right|$ a pour limite en plus l'infini $\dfrac{C_{2m-2}^{m-1}}{C_{2m-1}^{m-1}} = \dfrac{1}{2-\dfrac{1}{m}} < 1$, pour $m > 1$ on en déduit qu'au voisinage de $x = -\infty$, le graphe de F_m est dans la zone (1) pour m pair, dans la zone (2) pour m impair.

Dans le cas m pair, F_m est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et a un zéro unique r_m qui nous le savons déjà vérifie

$$-\frac{1}{\sqrt[m]{F_m(1)}} < r_m < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt[m]{C_{2m-1}^m}} < r_m < 0.$$

En particulier un calcul sur HP67, par dichotomies successives, en programmant F_m avec $m = 16$, suivant le schéma de Horner, pour n'avoir que $m - 1$ multiplications au lieu de $2m - 3$ donne l'encadrement

$$-0{,}243\,166\,809\,1 < r_{16} < -0{,}243\,166\,809\,0.$$

On vérifie bien que

$$-\frac{1}{\sqrt[16]{F_{16}(1)}} = -\frac{1}{3{,}387\,418\,930...} = -0{,}295\,210\,017... < r_{16} < 0$$

et

$$-0{,}25 = -\frac{1}{4} < r_{16}.$$

Dans le cas m impair, F_m n'a aucun zéro réel, et l'allure de son graphe, ainsi que son sens de variation est mis en évidence sur la figure « m impair ».

Le nombre des zéros réels de F_m est en définitive égal à $\dfrac{1+(-1)^m}{2}$.

Avant de préciser le comportement de la suite r_{2k} lorsque k tend vers l'infini et de calculer sa limite, nous allons établir la forme intégrale des polynômes de Bézout.

La méthode élémentaire classique d'intégration de l'équation différentielle (7), linéaire avec second membre donne, en spécialisant la constante d'intégration dont la valeur est obtenue en remarquant que $F_m(0) = 1$

$$(8)\quad F_m(x) = \frac{F_m(0) - mF_m(1)\displaystyle\int_0^x (1-t)^{m-1}t^{m-1}\,dt}{(1-x)^m} = \frac{1 - mC_{2m-1}^m\displaystyle\int_0^x (1-t)^{m-1}t^{m-1}\,dt}{(1-x)^m}$$

et, en utilisant la terminologie de Whittaker, $F_m(x)$ s'exprime donc en fonction de la fonction *eulérienne de première espèce*, incomplète :

$$B_{p,q}(x) = \int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$$

par

$$F_m(x) = \frac{1 - mC_{2m-1}^m B_{m,m}(x)}{(1-x)^m}$$

en outre, puisque F_m est polynomial $F_m(1)$ doit être fini, ce qui donne

$$B_{m,m}(1) = \frac{1}{mC_{2m-1}^m} = \frac{m!\,(m-1)!}{m(2m-1)!} = \frac{(m-1)!\,(m-1)!}{(2m-1)!} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(m)}{\Gamma(2m)},$$

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}\,dt$$

intégrale eulérienne de 2^e^ espèce. On retrouve d'une part la *formule des compléments* dans un cas particulier, et la valeur de *l'intégrale de Wallis*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin 2t)^{2m-1}}{2^{2m-1}}\,d\,2t$$

qu'on obtient en faisant dans $B_{m,m}(1)$ le changement de variable :

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0, 1], \quad s \mapsto t = \sin^2 s$$

ainsi

$$(9)\qquad \underset{x\neq 1}{F_m(x)} = \frac{B_{m,m}(1) - B_{m,m}(x)}{(1-x)^m B_{m,m}(1)}$$

et

$$F_m(1) = \frac{(-1)^{m-1}B_{m,m}^{(m)}(1)}{B_m(1)}.$$

Une utilisation de la formule d'intégration par parties généralisée, redonne d'ailleurs sans difficulté la forme (6) pour F_m.

Le tableau de variation immédiat de $B_{m,m}(x)$ dans le *cas m pair :*

x	$-\infty$		r_m		0		1		$+\infty$
$B_{m,m}$		$\searrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$B_{m,m}(1) = \dfrac{1}{mC_{2m-1}^m}$	$\searrow$	

donne alors

$$\{r_m\} = B_{m,m}^{-1}(B_{m,m}(1)) \cap \mathbb{R}^- = B_{m,m}^{-1}\left(\frac{1}{mC_{2m-1}^m}\right) \cap \mathbb{R}^-.$$

Or

$$C_5^3 = 10 > 2^3 = 8,\quad C_7^4 = 35 > 32 = 2^5,$$
$$C_9^5 = 126 > 64 = 2^6,\quad C_{11}^6 = 462 > 2^8 = 256,$$

et l'hypothèse de récurrence

$$C_{2m-1}^m > 2^{m+2}$$

vérifiée pour $m = 6$ donne facilement :

$$C_{2(m+1)-1}^{m+1} = C_{2m+1}^{m+1} = C_{2m+1}^m = \frac{2(2m+1)}{m+1}C_{2m-1}^m > 2C_{2m-1}^m > 2\times 2^{m+2} = 2^{(m+1)+2}$$

D'ailleurs l'inégalité plus facile $C_{2m-1}^m > 2^m$ est vérifiée dès $m = 3$ donc l'inégalité

$$-\frac{1}{\sqrt[m]{C_{2m-1}^m}} < r_m < 0$$

donne

$$-\frac{1}{2} < r_m < 0, \qquad \forall m \text{ pair}, \qquad m \geqslant 4.$$

Mais cette majoration $C_{2m-1}^m > 2^{m+2}$ que nous venons d'obtenir, nous permettra aussi d'établir le comportement de $F_m(x)$ pour x fixé dans $]-1/4, 0[$.

Mais nous avons pour cela besoin de relier F_m et F_{m-1}. La relation

$$(1-x)^m F_m + x^m G_m = 1$$

s'écrivant

$$(1-x)^{m-1}(1-x)F_m + x^{m-1}.xG_m = 1$$

on en déduit que

$$(1-x)F_m = F_{m-1} + Sx^{m-1}.$$

où, par suite de (2) et des degrés des deux membres, S est un polynôme de degré 1. Posons $S = ax + b$. L'identification des termes en x^m puis x^{m-1} des deux membres donne

$$(1-x)(1 + \cdots + C_{2m-3}^{m-2}x^{m-2} + C_{2m-2}^{m-1}x^{m-1}) - (1 + \cdots + C_{2m-4}^{m-2}x^{m-2}) = (ax+b)x^{m-1}$$

$$\begin{aligned} a &= -C_{2m-2}^{m-1}, \\ b &= C_{2m-2}^{m-1} - C_{2m-3}^{m-2} \\ &= C_{2m-2}^{m-1} - C_{2m-3}^{m-1} \\ &= C_{2m-3}^{m-2} = C_{2m-3}^{m-1}. \end{aligned}$$

Or $$C_{2m-2}^{m-1} = \frac{(2m-2)!}{(m-1)!\,(m-1)!} = \frac{(2m-3)! \times 2}{(m-2)!\,(m-1)!} = 2\,C_{2m-3}^{m-2},$$

et donc

$$(10)\quad (1-x)F_m = F_{m-1} + C_{2m-3}^{m-2}(1-2x)x^{m-1}$$

$$(10')\quad (1-x)F_{m-1} = F_{m-2} + C_{2m-5}^{m-3}(1-2x)x^{m-2}$$

soit, en éliminant F_{m-1},

$$(1-x)^2F_m = F_{m-2} + C_{2m-5}^{m-3}(1-2x)x^{m-2} + C_{2m-3}^{m-2}(1-2x)(1-x)x^{m-1}$$

$$(1-x)^2F_m = F_{m-2} + (1-2x)x^{m-2}(C_{2m-5}^{m-3} + (x-x^2)C_{2m-3}^{m-2})$$

$$(11)\quad (1-x)^2F_m = F_{m-2} + (1-2x)x^{m-2}C_{2m-5}^{m-3}\left(1 + \frac{2(2m-3)}{m-1}(x-x^2)\right)$$

Remarque : Le même procédé d'identification permettrait en dérivant la relation

$$x(1-x)^m F_m + x^{m+1}G_m = x$$

de relier F'_m et F_{m-1}.

Or en utilisant la relation (10) avec $-\frac{1}{4} < x < 0$

$$\left|\frac{(1-2x)}{x} C_{2m-3}^{m-2}x^m\right| = \frac{1-2x}{x}\left(\sqrt[m]{C_{2m-3}^{m-2}}|x|\right)^m$$

et comme $\dfrac{C_{2m-1}^{m-1}}{C_{2m-3}^{m-2}} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 4$ on en déduit

$$\sqrt[m]{C_{2m-3}^{m-2}}|x| < 1$$

pour m assez grand $\left(x \text{ fixé dans } \left]-\frac{1}{4}, 0\right[\right)$ et donc

$$\left|\frac{F_m(x)}{F_{m-1}(x)}\right| \xrightarrow[x \text{ fixé} \neq r_{m-1}]{} \frac{1}{1-x} < 1$$

et donc

$$|F_m(x)| \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0, \qquad \forall x \in \left]-\frac{1}{4}, 0\right[.$$

$F_m(x)$ converge donc vers zéro pour x dans $]-1/4, 0[$ cette convergence n'est pas uniforme puisque $F_m(0) = 1$ et que F_m est continue, mais pas sa limite sur $]-1/4, 0]$.

Nous sommes maintenant en mesure, d'étudier plus précisément, le comportement de la suite r_{2k}. Pour cela écrivons la relation (11), en posant $m = 2k+2$,

$$(11')\quad (1-x)^2F_{2k+2} = F_{2k} + (1-2x)x^{2k}C_{2k-1}^{2k-1}\frac{8k+2}{2k+1}\left[\frac{2k+1}{8k+2} + x - x^2\right].$$

Posons $\alpha_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4k+2}{4k+1}}$ racine négative du trinôme

$$\frac{2k+1}{8k+2} + x - x^2.$$

Il est immédiat que la suite (α_k) converge en croissant vers $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ d'autre part

$$1 - \alpha_k = \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{4k+2}{4k+1}}\right] > 1.$$

De la formule de récurrence (11') entre F_{2k+2} et F_{2k} on déduit alors

1) $F_{2k}(\alpha_k)$ et $F_{2k+2}(\alpha_k)$ sont de même signe;
2) $|F_{2k}(\alpha_k)| > |F_{2k+2}(\alpha_k)|$.

On remarque alors que

$$F_2(x) = 1 + 2x \text{ et } \alpha_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{5}}\right).$$

Il en résulte que $F_2(\alpha_1) > 0$ donc $F_4(\alpha_1) > 0$ et, comme F_4 est croissante sur $\mathbb{R}$

$$\alpha_2 > \alpha_1 \Rightarrow F_4(\alpha_2) > F_4(\alpha_1) > 0.$$

Une récurrence immédiate avec « transfert » du même type prouve alors que $F_{2k}(\alpha_k)$ est une suite de termes positifs stricts et donc

$$r_{2k} < \alpha_{k-1} < \alpha_k < \frac{1}{2}[1 - \sqrt{2}].$$

Comme $r_{2k} < \alpha_k$, le signe du trinôme et la relation (11′) donne pour $x = r_{2k}$,

$$F_{2k+2}(r_{2k}) < 0$$

et donc $r_{2k} < r_{2k+2}$. La suite r_{2k} est donc croissante et

$$\forall k \geqslant 8, \qquad -\frac{1}{4} < r_{16} \leqslant r_{2k} < \frac{1 - \sqrt{2}}{2}.$$

Remarque : Cette méthode de démonstration de la croissance de la suite (r_{2k}), qui m'a été communiquée par Monsieur l'Inspecteur Régional Collet, peut être contournée en remarquant que

$$4 - \frac{2}{m-1} = \frac{F_m(1)}{F_{m-1}(1)} \leqslant 4 - \frac{1}{m-1}$$

et en utilisant une moyenne de Césaro

$$\sqrt[m]{F_m(1)} \leqslant 4 - \frac{1}{m-1}, \quad |r_m| \geqslant \frac{1}{4 - \dfrac{1}{m+1}}$$

et

$$r_m^2 - r_m \geqslant \frac{1}{\left(4 - \dfrac{1}{m-1}\right)^2} + \frac{1}{4 - \dfrac{1}{m-1}}$$

$$\left(4 - \frac{2}{m-1}\right)(r_n^2 - r_m) \geqslant 1 + 4 - \frac{6}{m-1} + \left(\frac{1}{m-1}\right)^2 > 1$$

pour m assez grand.

La suite croissante (r_{2k}) majorée converge donc vers r_∞ :

$$r_{16} < r_\infty \leqslant \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$$

$$-0{,}243\,166\,809\,0 < r_\infty \leqslant -0{,}207\,106\,781.$$

Établissons maintenant la valeur exacte de r_∞. On a, d'après (8),

$$\int_0^{r_m} (1-t)^{m-1} t^{m-1}\, dt = \frac{1}{mC_{2m-1}^m}$$

$$\sqrt[m-1]{\int_{r_m}^0 (1-t)^{m-1}(-t)^{m-1}\, dt} = \frac{1}{\sqrt[m-1]{mC_{2m-1}^m}}.$$

Or

$$\frac{1}{\sqrt[m]{mC_{2m-1}^m}} \xrightarrow[m \to \infty]{} \frac{1}{4}.$$

car $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} \to \ell$

De plus il est classique (voir par exemple la référence bibliographique numéro [11]) que si f et g sont des fonctions positives continues sur (a, b) $a < b$, on a

$$\lim_{m \to \infty} \sqrt[m]{\int_a^b f(x) g^m(x)\, dx} = \max_{x \in [a,b]} g(x)$$

de plus

$$x \mapsto \int_x^0 (1-t)^{m-1} |t|^{m-1}\, dt$$

est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ par conséquent si

$$\alpha < r_m < \beta < 0$$

on a

$$\int_\beta^0 (1-t)^{m-1} t^{m-1}\, dt < \int_{r_m}^0 (1-t)^{m-1} |t|^{m-1}\, dt < \int_\alpha^0 (1-t)^{m-1} |t|^{m-1}\, dt$$

de plus

$$\max_{[0,\beta]} (1-t)|t| = \beta^2 - \beta.$$

Donc

$$\sqrt[m-1]{\int_\beta^0 (1-t)^{m-1} |t|^{m-1}\, dt} \leqslant \sqrt[m-1]{\int_{r_m}^0 (1-t)^{m-1} |t|^{m-1}\, dt} \leqslant \sqrt[m-1]{\int_\alpha^0 (1-t)^{m-1} |t|^{m-1}\, dt}$$

et, par passage à la limite,

$$\beta^2 - \beta \leqslant \frac{1}{4} \leqslant \alpha^2 - \alpha.$$

Or pour tout ε strictement positif, il existe un entier N_0 tel que pour tout m strictement supérieur à N_0 on ait

$$r_\infty - \varepsilon < r_m < r_\infty$$

donc en appliquant le résultat précédent avec $\alpha = r_\infty - \varepsilon$, $\beta = r_\infty$ on a

$$r_\infty^2 - r_\infty \leqslant \frac{1}{4} \leqslant (r_\infty - \varepsilon)^2 - (r_\infty - \varepsilon), \quad \forall \varepsilon > 0$$

et donc $r_\infty^2 - r_\infty - \dfrac{1}{4} = 0$ et, comme $r_\infty < 0$,

$$r_\infty = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}.$$

Les zéros r_{2k} des polynômes de Bézout F_{2k} tendent en croissant vers

$$r_\infty = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$$

qui ne figure pas dans le livre des nombres remarquables de Jean Brette et François le Lionnais (Hermann 1983) analysé dans la Revue de mathématiques spéciales de novembre 1983.

Des calculs plus spécialisés, utilisant en particulier la relation (11), permettraient de comparer $F_m(x)$ et $F_{m-2}(x)$ pour x négatif, l'étude ayant été faite pour x positif dans la remarque entre parenthèses qui suit la formule (6). En outre l'étude de la concavité des polynômes de Bézout pourrait faire l'étude d'une question et réponse.

En calculant $r_{50}, \ldots, r_{100}$ et en programmant F_{2p} au moyen de la formule

$$F_{2p}(x) = \sum_{k=0}^{2p-1} a_k x^k,$$

$$a_k = \frac{2p + k - 1}{k} a_{k-1}, \quad a_0 = 1$$

on pourrait se rendre compte de la rapidité de la convergence.

Bibliographie

(1) CALVO, *Exercices d'Algèbre*, tome 1 page 63, A. Colin, 1970.

(2) RAMIS, ODOUX, DESCHAMPS, *Cours de Mathe-'matiques Spéciales*, tome 1, exercices 6-15 et 6-16, page 211, Masson, 1974.

(3) A. WARUSFEL, *Exercices d'Algèbre*, page 112, collection études supérieures, Bordas (expression ordonnée de $G_m(x)$), 1968.

(4) CRESTEY, *Exercices et problèmes résolus*, tome I, page 85, Dunod, 1972.

(5) LEFORT, *Exercices*, tome I, page 61 Dunod, 1970.

(6) LABORDE, *Tables numériques*, page 166 (tableau de Pascal), Dunod 1975.

(7) Concours des Mines d'Alès, 25 mai 1983.

(8) *Revue de Mathématiques spéciales*, Vuibert avril 1982, XP'1981, et page 350. *Généralisation du théorème de Cesaro (dont le numérateur est la valeur d'un polynôme de Bézout).*

(9) *Introduction to approximation theory*, Mac-Graw Hill, chapitre sur les polynômes de Bernstein.

(10) DAVIS. *Interpolation and approximation* « Blaisdell ».

(11) RÂ (Dieu égyptien XIX dynastie), *Exercices d'Analyse*, 2-1-3 page 58, Masson, 1968.

(12) BERGER, Géométrie tome 3, édition CEDIC, page 60, définition de l'épigraphe.

(13) Centrale 1978 (polynômes de Pisot), *Petit archimède*, N° 85, p. 45, (avril, mai, juin, 1982). Agrégation 1962 -*Dictionnaire* PUF, page 570.

(14) WHITTAKER, *A course of Modern Analysis*, Cambridge, university press, 1958.

(15) BASS, *Cours de Mathématiques*, Chapitre-XXV fonctions Eulériennes page 499, Masson, 1956.