Pfaffien

par L. G. VIDIANI, Professeur en Mathématiques spéciales au lycée Carnot de Dijon

Considérons une matrice antisymétrique $A = (a_{ij})$ d'ordre n, à coefficients dans un corps K, commutatif de caractéristique différente de deux.

Il est bien connu que, si n est impair, $\det A = 0$ puisque

$$\begin{aligned}\det A &= \det {}^tA = \det(-A)\\ &= (-1)^n \det A = -\det A.\end{aligned}$$

Il est moins connu, que si n est pair (nous posons $n = 2p$), $\det A$ est le carré d'un polynôme (appelé pfaffien de A et noté $\mathrm{Pf}(A)$), à coefficients entiers, des a_{ij}. Ce résultat s'établissant classiquement grâce aux propriétés du calcul tensoriel. Il est d'ailleurs le Gram pour une forme symplectique.

Par exemple, pour $n = 2$ puis $n = 4$ nous avons successivement

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{21} & 0 \end{vmatrix} = (a_{12})^2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (a_{23}a_{14} - a_{13}a_{24} + a_{12}a_{34})^2.$$

Le but de cet article est de préciser, de manière élémentaire, certaines des propriétés du pfaffien, qui ressemblent à celles du déterminant. En particulier nous établirons une formule de développement du pfaffien par rapport à une rangée, que nous démontrerons en suivant presque le plan du cours de Mathématiques spéciales de développement d'un déterminant par rapport à une rangée, et qui par son aspect récursif permet une programmation en Pascal au moyen des chaînes de caractères.

Appliquons une méthode, inspirée de la méthode de Gauss, à la forme bilinéaire antisymétrique

$$f(x, x') = \det {}^tXAX',$$

où ${}^tX = (x_1 \ldots, x_n)$ appartient à K^n, que, grâce à l'isomorphisme canonique, entre les matrices (1,1) et leur unique élément nous noterons pour simplifier $f(x, x') = {}^tXAX'$.

- Si $A = 0$, $\det A = 0 = 0^2$.
- Si $A \neq 0$, l'un des a_{ij} est différent de zéro ; on peut, au besoin par un changement de l'ordre des vecteurs de base, supposer que a_{12} est non nul

$$\begin{aligned}f(x, x') = {} & x_1(a_{12}x'_2 + \cdots + a_{1n}x'_n)\\ & - x'_1(a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) + f_1(x, x')\end{aligned}$$

où f_1 a pour matrice

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & -a_{23} & 0 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & -a_{2n} & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

toujours antisymétrique.

Effectuons le changement de composantes

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_3 = x_3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{12}}(y_2 - a_{13}y_3 + \cdots + a_{1n}y_n) \\ x_3 = y_3 \\ x_n = y_n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x, x') &= y_1 y_2' - y_2 y_1' + f_1(x, x') \\ &= y_1 y_2' - y_2 y_1' + x_2(a_{23}y_3' + \cdots + a_{2n}y_n') \\ &\quad - x_2'(a_{23}y_3 + \cdots + a_{2n}y_n) + f_2(x, x') \end{aligned}$$

où $f_2(x, x')$ ne dépend que de $y_3, \ldots, y_n$, $y_3', \ldots, y_n'$

$$\begin{aligned} f(x, x') &= y_2'\left(y_1 - \frac{a_{23}}{a_{12}}y_3 \cdots \frac{a_{2n}}{a_{12}}y_n\right) \\ &\quad - y_2\left(y_1' - \frac{a_{23}}{a_{12}}y_3' \cdots \frac{a_{2n}}{a_{12}}y_n'\right) + f_3(x, x') \end{aligned}$$

où l'on constate que $f_3(x, x')$ est antisymétrique en $x_3 \ldots x_n$, $x_3' \ldots x_n'$ à coefficients dans K, et même *polynomiaux à coefficients entiers en* a_{ij} éventuellement exception faite d'une division par a_{12}, et dépendant des a_{ij} de manière homogène.

En raisonnant par récurrence descendante, tant que les nouvelles formes antisymétriques qui apparaissent ne sont pas nulles, on obtient la matrice de passage P(A), des anciennes X aux nouvelles composantes Y, X = P(A)Y sous la forme :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{a_{23}}{a_{12}} & \cdots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{12}} \\ 0 & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Nous notons P(A) = P quand A étant choisie il n'y a pas de confusion possible.

Les 1 dans la diagonale principale, pouvant être absents. Seul est représenté le bloc des deux premières lignes, les blocs suivants éventuels, se déduisant des blocs de deux lignes suivantes de la matrice de f_3 par le même procédé. La remarque faite précédemment prouve, a_{12} se simplifiant avec les dénominateurs éventuels, que det P est un *polynôme homogène en* a_{ij} à coefficients entiers.

D'après la formule de changement de base des formes bilinéaires on a $A = \tilde{P}A'P$ où

$$A' = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & & & 0 \\ & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & & \\ 0 & & \ddots\ 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} J_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

où

$$J_r = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \\ \hline & 0 & & 1 \\ 0 & & -1 & 0 \end{array}\right)$$

J_r est d'ordre $2r$ et remarquons

$$\det J_r = \det\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix} = 1,$$

$2r$ étant le rang de A′ et I_r la matrice (r, r) unité.

Nous dirons que la nouvelle base obtenue est symplectique. D'une part le rang de A est pair (puisqu'égal au rang de A′), résultat qu'on aurait pu obtenir très rapidement car A étant antisymétrique, est diagonalisable sur $K(i)$ et ses valeurs propres sont imaginaires pures, de même ordre de multiplicité que pour deux valeurs propres non nulles imaginaires conjuguées. D'autre part et cela est plus important

$$\det A = \det A'\,(\det P)^2 = (\det A'.\det P)^2$$

puisque det A′ est 0 ou 1, égaux à leur carré. On constate que

$$\det A' = \delta_{n,2r}$$

(delta de Kronecker). Donc

$$\det A = (\varepsilon(A) \det P)^2$$

où ε(A) est de carré égal à 1 ou 0, et où det P est un polynôme homogène, à coefficients entiers, en a_{ij}.

Le cas où $2r < n = 2p$ donne $\det A = 0^2$. Limitons-nous donc dorénavant à $2r = n$ alors ε(A) est égal à 1 ou − 1.

Si nous voulons choisir ε(A), il faut imposer une condition. Considérons A comme dépendant des $n(n-1)/2$ indéterminées a_{ij} avec $i < j$ et $K[a_{ij}]$ l'algèbre des polynômes en ces indéterminées et à coefficients dans K. Imposons la condition logique et naturelle

$$\mathrm{Pf}(J_r) = 1.$$

Comme ε(A) det P doit être un polynôme en a_{ij} (c'est ce que nous exigeons pour le pfaffien), il faut que le coefficient dominant, par rapport à l'une des indéterminées soit indépendant de A (en particulier par son signe !) donc $\varepsilon(A)$ ne dépend pas de A, ce qui nous donne

$$\mathrm{Pf}(A) = \varepsilon(A) \det P(A)$$
$$1 = \mathrm{Pf}(J_r) = \varepsilon(J_r) \det P(J_r)$$
$$\boxed{\mathrm{Pf}(A) = \varepsilon(J_r) \det P(A).}$$

On en déduit l'existence du pfaffien (la seule autre solution possible est $-\mathrm{Pf}(A)$) et son unicité, compte tenu de la condition exigée et de l'intégrité de $K[a_{ij}]$ car $\mathrm{Pf}^2(A) = \varphi^2(A)$ donne

$$(\varphi(A) - \mathrm{Pf}(A)).(\varphi(A) + \mathrm{Pf}(A)) = 0.$$

De plus quelle que soit la matrice S de $M_n(K)$, ${}^tSAS$ est antisymétrique et

$$\det({}^tSAS) = (\det S)^2 \det A = (\det S.\mathrm{Pf}(A))^2$$

et

$$\mathrm{Pf}({}^tSAS) = \varepsilon(S, A) \det S.\mathrm{Pf}(A)$$

où $(\varepsilon(S, A))^2 = 1$.

- Si A n'est pas inversible la relation

$$\mathrm{Pf}({}^tSAS) = \det S.\mathrm{Pf}(A)$$

est vraie, puisque les deux pfaffiens sont nuls.

- Si A est inversible, comme $\mathrm{Pf}({}^tSAS)$ est un polynôme non nul le coefficient dominant, par rapport à l'une des indéterminées a_{ij} ou s_{ij} est de signe fixe, donc $\varepsilon(S, A) = \varepsilon$

$$\mathrm{Pf}({}^tSAS) = \varepsilon \det S.\mathrm{Pf}(A).$$

En faisant $S = I_{2r}$ la relation précédente se spécialise en

$$\mathrm{Pf}(A) = \varepsilon\,\mathrm{Pf}(A)$$

donc $\varepsilon = 1$ ($\det A \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Pf}(A) \neq 0$).

Dans tous les cas on a, quelle que soit la matrice S de $M_n(K)$,

$$\boxed{\mathrm{Pf}({}^tSAS) = \det S\,\mathrm{Pf}(A).}$$

En particulier si S est une matrice de permutation $S_\sigma = (\delta_{i,\sigma(i)})$ déduite de la matrice unité I_n, par la permutation $\sigma \in S_n$ sur les lignes alors

$$\mathrm{Pf}({}^tS_\sigma AS) = (\det S_\sigma) \times \mathrm{Pf}(A) = \varepsilon_\sigma\,\mathrm{Pf}(A)$$

où ε_σ est la signature de σ. Faire sur les lignes de A la permutation σ, revient à calculer $S_\sigma A$ et faire cette permutation sur les colonnes revient à calculer $A\,{}^tS_\sigma$, alors faire sur les lignes et les colonnes de A la même permutation revient à multiplier son pfaffien par ε_σ, propriété que nous appelerons *antisymétrie du pfaffien.*

Nous avons maintenant tous les outils techniques pour obtenir la formule récursive du pfaffien en suivant exactement le cours sur les déterminants. La dernière propriété établie, jouant un rôle pour le pfaffien, analogue à l'antisymétrie, pour les déterminants, l'alternance étant difficile à mettre en œuvre pour le pfaffien, à cause de l'antisymétrie de la matrice qui rend difficile l'identification de colonnes puis leur échange.

Un simple développement de det A par rapport à la colonne C^i, puis par rapport à la ligne $L_i = -{}^tC^i$ des cofacteurs, permet de constater que det A est un polynôme homogène et du second degré par rapport aux éléments de la colonne C^i, par conséquent le pfaffien de A est du premier degré par rapport à ces mêmes éléments $(a_{1i}, \ldots, a_{ni})$ donc linéaire, puisque homogène, par rapport aux colonnes de A. E_i étant le sous-espace vectoriel de K^n, formé des vecteurs dont la composante numéro i est nulle, le pfaffien est une forme multilinéaire sur $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ inclus dans K^n.

Par exemple pour $i = 1$, la linéarité par rapport à la première colonne de A nous donne

$$\mathrm{Pf}(A) = a_{21}\mathrm{Pf}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & a_{23} & & a_{2n} \\ 0 & -a_{23} & & & \\ 0 & & & \boxed{X} & \\ 0 & -a_{2n} & & & \end{pmatrix}$$

$$+ \cdots + a_{n1}\,\mathrm{Pf}\begin{pmatrix} 0 & & & & 1 \\ 0 & 0 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \boxed{X} & \\ -1 & -a_{2n} & & & \end{pmatrix}.$$

Dans cette formule, les pfaffiens notés P_{i1} facteurs des a_{i1}, vont jouer un rôle analogue à celui des cofacteurs, pour la théorie des déterminants, et le bloc X est la sous-matrice de A obtenue en supprimant de A les deux premières lignes et les deux premières colonnes.

En ajoutant à la ligne (colonne) numéro i, le produit par a_{2i} de la première ligne (colonne) on a

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & a_{23} & & a_{2n} \\ 0 & -a_{23} & & & \\ & & & \boxed{X} & \\ 0 & -a_{2n} & & & \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & & & & \\ & & & \boxed{X} & & \\ 0 & 0 & & & & \end{pmatrix} = [\mathrm{Pf}(X)]^2$$

donc

$$P_{21} = \varepsilon\,\mathrm{Pf}(X)$$

où $\varepsilon = \pm 1$ et ne dépend ni de X ni des a_{2i}.

En substituant aux a_{2i} la valeur zéro et J_{r-1} à X on a

$$\mathrm{Pf}(J_r) = \mathrm{Pf}(J_{r-1})$$

donc $\varepsilon = 1$ et $P_{21} = \mathrm{Pf}(X)$.

En utilisant l'« antisymétrie » du pfaffien pour amener simultanément la $i^{\text{ème}}$ ligne (colonne) à la place de la deuxième, on fait $i - 2$ transpositions et on a alors

$$P_{i1} = \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -a_{2i} & & & \\ \vdots & & & X & \\ 0 & -a_{2n} & & & \end{pmatrix} = (-1)^{i-2}\mathrm{Pf}$$

(sous-matrice de A obtenu en supprimant ligne et colonnes 1 et i).

Plus généralement appelons mineure pfaffiene de a_{ij} la matrice notée A_{ij} obtenue en retirant de A les lignes et les colonnes d'indices i et j, nous venons d'obtenir la formule de développement du pfaffien de A par rapport à la première colonne :

$$\mathrm{Pf}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}(-1)^i \,\mathrm{Pf}(A_{i1})$$

n'oublions pas $a_{11} = 0$ et $a_{ji} = -a_{ij}$.

Avec l'antisymétrie du pfaffien, on a enfin, comme pour les déterminants, la formule de développement du pfaffien par rapport à une rangée, par exemple la ligne numéro i :

$$\boxed{\mathrm{Pf}(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j-1}\,\mathrm{Pf}(A_{ij})a_{ij}}$$

$(-1)^{i+j-1}\,\mathrm{Pf}(A_{ij})$ sera appelé copfaffien de a_{ij} et $\mathrm{Pf}(A_{ij})$ mineur pfaffien de a_{ij} (rappelons que $a_{ii} = 0$).

La règle des signes en damier pour le pfaffien est exactement décalée d'une ligne et d'une colonne par rapport à celle du déterminant.

On aurait pu obtenir cette formule de développement, par exemple en développant le déterminant de P(A) obtenu au début de l'article par rapport à la dernière colonne par exemple, mais la justification du fait que les cofacteurs s'expriment en fonction des copfaffien, sans modification des a_{ij} (comme dans $f_3(x, x')$) serait pénible (quoique possible par combinaisons astucieuses des rangées, de façon à ne pas détruire l'antisymétrie).

De même, il est illusoire de vouloir généraliser la modification du pfaffien en ajoutant simultanément à la ligne (colonne) numéro i une combinaison linéaire des autres, car outre que une seule opération détruit l'antisymétrie, la deuxième ne la rétablit pas car elle utilise, pour la deuxième combinaison des éléments très modifiés de la ligne numéro i.

Par contre la linéarité du pfaffien par rapport à chacune des rangées de A, permet en n'utilisant que l'antisymétrie, exactement comme dans le cours sur l'expression générale des formes multilinéaires alternées et en opérant sur $E_1 \times \cdots \times E_n$, d'obtenir la formule explicite

$$\mathrm{Pf}(A) = \sum_{\sigma \in S_{2p}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)\sigma(2)} a_{\sigma(3)\sigma(4)} \dots a_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)}.$$

Mais nous préférons la formule antérieure, appliquée par exemple pour un développement par rapport à la dernière colonne, qui par son aspect récursif se prête mieux à une programmation en Pascal :

$$\boxed{\mathrm{Pf}_{2p}(A) = \sum_{i=1}^{2p-1} (-1)^{i-1}\,\mathrm{Pf}_{2p-2}(A_{i_{2p}})a_{i_{2p}}}$$

Programme

```
TYPE
   MATRICE=ARRAY[1..10,1..10] OF STRING[6];{car pour n=10 i ou j peuvent
                                             avoir 2 chiffres}
   SIG = '+'..'-';
   TER2  =ARRAY[1..1]        OF STRING[4];{faire tout TER10 sature}
   TER4  =ARRAY[1..3]        OF STRING[9];{deux coef+le point séparatif}
   TER6  =ARRAY[1..15]       OF STRING[14];
   TER8  =ARRAY[1..105]      OF STRING[19];
   TER10 =ARRAY[1..945]      OF STRING[26];{4.4.4.4.6}
VAR
  MAT,A     :MATRICE;
  N,p       :INTEGER;
  arret     :BOOLEAN;
  signe     :SIG    ;
  TERMES    :TER10  ;

PROCEDURE INITIALISATION ;
VAR
  i,j   :INTEGER;
  x,y   :STRING[6];
BEGIN
  FOR i:= 1 TO N  DO
                FOR j:=1 TO N DO
                             BEGIN
                                STR(i,x);STR(j,y);
                                A[i,j]:='A'+x+','+y  ;
                              END;
END;
```

```
FUNCTION NBTERMES(n:integer):INTEGER;{calcul de(n-1)*(n-3)...*3}
VAR u,j:INTEGER;
BEGIN
     u:=1;j:=1;
     WHILE j<= N-1 DO
                  BEGIN
                     u:=u*j;
                     j:=j+2;
                  END;
     NBTERMES:=u; { pour n=2,4,6 ,8  ,10 ,12   ,14..
     NBTERMES VAUT resp    1,3,15,105,945,10395,135135,..}
END;


PROCEDURE TERMES_PFAFF(VAR TERMES:TER10;
                     MAT:matrice ;n:INTEGER);
VAR    copf    : matrice ;
       i,j,k,km  :integer;

PROCEDURE COPFAFFIEN(VAR copf:matrice; c:integer);
var i,j :integer;                         {copf dépend implicitement de n
                                            et de mat variable globale de
                                            termes_pfaff}

BEGIN

     FOR  i:=1 TO c-1 DO
                    BEGIN
                        FOR j:=1 TO c-1 DO copf[i,j]:=mat[i,j];
                        FOR j:=c TO n-2 DO copf[i,j]:=mat[i,j+1];
                    END;
     FOR i:=c TO n-2 DO
                    BEGIN
                       FOR j:=1 TO c-1 DO copf[i,j]:=mat[i+1,j];
                       FOR j:=c TO n-2 DO copf[i,j]:=mat[i+1,j+1];
                    END;


BEGIN{programme principal de TERMES_PFAFF}

     if not keypressed
        then
          begin
             if n=2
             then   TERMES[1]:= mat[1,2]    {PAS DE; AVANT ELSE}
             else
                begin

                    FOR i:=1 TO NBTERMES(N) DO TERMES[i]:='';{initialisation}
                    FOR j:=N-1 DOWNTO 1 DO
                        BEGIN
                           COPFAFFIEN(copf,j);

                            TERMES_PFAFF(TERMES,copf,n-2);
                           km := NBTERMES(n-2);
                           FOR k:=1 TO km  DO
                                 TERMES[(j-1)*km+k]:=TERMES[k]+'.'+mat[j,n] ;
                        END;
                end;
          end {pas de ; avant else}
      ELSE   arret := true;
END;


BEGIN {programme principal}
  WRITELN;
  WRITELN;WRITELN(LST);
  WRITELN(' N (pair) de 2 à 10 = ? ');
  READLN(N);WRITELN(LST);
  WRITELN(LST,' N = ',N,'  :IL Y A ',NBTERMES(N),'  TERMES .');
  WRITELN(LST,'QUE VOICI: ');
  INITIALISATION;WRITELN;
  TERMES_PFAFF(TERMES,A,N);
               {pour éviter la saturation(255 termes par chaine
               on calcule les termes séparément et on les
               écrit avec leurs signes après au lieu de concaténer
               au fur et à mesure termes et signes}
```

```
signe:='+' ;{initialisation}
FOR p:=1 TO NBTERMES(n) DO
                BEGIN
                 WRITE(signe,TERMES[p]);      {le mode de construction
                                               montre par une récurrence
                                               immédiate et parce que n est
                                               pair que les signes sont
                                               alternés ce qui évite un
                                               programme avec
                                               record epsilon(i)
                                                      termes      .....end }
                                               {ou avec pos et del pour éli-}
                                               {miner les doubles signes}
                 WRITE(LST,signe,TERMES[p]);
                      if signe ='+' then signe:='-' else signe:='+';
                 END;

WRITELN(LST);{nécéssaire car il n'y a de retour chariot que si la ligne est
          entière, et le buffer garde le début de toute ligne incomplète}

END.
```

Résultats

```
N = 2  :IL Y A 1  TERME . QUE VOICI: +A1,2

N = 4  :IL Y A 3  TERMES . QUE VOICI: +A2,3.A1,4-A1,3.A2,4+A1,2.A3,4

N = 6  :IL Y A 15  TERMES . QUE VOICI:
+A3,4.A2,5.A1,6-A2,4.A3,5.A1,6+A2,3.A4,5.A1,6-A3,4.A1,5.A2,6+A1,4.A3,5.A2,6-A1,3
.A4,5.A2,6+A2,4.A1,5.A3,6-A1,4.A2,5.A3,6+A1,2.A4,5.A3,6-A2,3.A1,5.A4,6+A1,3.A2,5
.A4,6-A1,2.A3,5.A4,6+A2,3.A1,4.A5,6-A1,3.A2,4.A5,6+A1,2.A3,4.A5,6
```

La géométrie symplectique, qui possède en particulier le théorème de Witt n'est pas une notion uniquement abstraite : toute la mécanique a une nature symplectique, grâce d'une part à la nature antisymétrique du torseur des vitesses des points d'un solide, d'autre part comme le montrent les équations d'Hamilton :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i}.$$

La matrice antisymétrique associée, intervient au moment des conditions d'intégrabilité grâce au théorème de Schwarz de permutation des dérivations. Le système hamiltonien associé ayant comme matrice, antisymétrique

$$\left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_j}\right).$$

Enfin en appelant $\mathrm{S}p_n(\mathrm{K})$ (avec n pair), le sous-groupe des automorphismes *symplectiques* de K^n, et par $\mathrm{PS}p_n(\mathrm{K})$ son quotient par son centre, on peut démontrer en géométrie algébrique que $\mathrm{PS}p_2(\mathrm{F}3)$ qui est d'ordre 25 920 est le groupe des vingt-sept droites d'une surface cubique non réglée (théorème de Juel). La figure ainsi formée s'appelle l'Eikosiheptagramme. Une telle surface, en argent, (14 cm-85 g), comportant les 27 droites, taillée par le Joailler Evald NIELSEN fut offerte par le pro-