R 192. – Montrer les égalités suivantes :

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{Arc\,cos}\left(\frac{\cos t}{1+2\cos t}\right) \mathrm{d}t = \frac{5\pi^2}{24};$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{Arc\,cos}\left(\frac{1}{1+2\cos t}\right) \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8};$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{Arc\,cos}\left(\frac{1-\cos t}{1+2\cos t}\right) \mathrm{d}t = \frac{11\pi^2}{72}.$$

(L.-G. Vidiani)

L'auteur ne s'est pas contenté de poser ces questions mais il nous a en fait rédigé un manuscrit extrêmement volumineux sur ce sujet. Nous en publions ici les extraits nécessaires pour effectuer les calculs demandés.

Il fournit une histoire de ces égalités. En 1926, COXETER, alors jeune chercheur, les établit géométriquement : il en a eu besoin dans des problèmes de triangulation sur des espaces de dimension 4, pour le calcul des volumes de tétraèdes en théories des cristaux, et l'évaluation de l'ordre de leur groupe. Il soumet aux lecteurs de *Mathematical Gazette* ([2]) la question de la possibilité d'une preuve élémentaire. Seul répond Hardy : réponse en 14 pages : 4 pages de calcul et 10 de généralisations (calculs qui ne sont pas publiés). Ces intégrales interviennent incidemment comme cas particuliers dans des calculs de SCHLÄFLI (théorie riemannienne) et de LOBATCHEVSKI (théorie hyperbolique).

Les points **1.** à **6.** utilisent la référence [1].

Les points **7.** à **9.** sont dus à l'auteur, en raison du manque d'indications données dans l'ouvrage en question.

Réponse rédigée à partir du manuscrit de l'auteur.

Ces intégrales portent le nom d'intégrales de COXETER.

1. La fonction de SCHLÄFLI.

C'est l'instrument fondamental de la méthode proposée.

On note Δ l'ensemble des triplets de réels α, β, γ tels que :

$$0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \quad 0 \le \beta \le \pi \quad 0 \le \gamma \le \frac{\pi}{2} \quad |\cos\beta| \le \cos\alpha \cdot \cos\gamma,$$

les points $(0, 0, 0)$ et $(0, \pi, 0)$ étant exclus.

Pour tout θ de $[0, \pi]$ et tout y de $[-1, 1]$, on pose :

$$H(y, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n^2} \cos(2n\theta) - \theta^2.$$

On définit ainsi une application H continue sur $[-1, 1] \times [0, \pi]$ et C^1 sur $]-1, 1[\times[0, \pi]$.

On sait calculer, par exemple en utilisant les séries de FOURIER :

$$H(1, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\theta)}{n^2} - \theta^2 = \frac{\pi^2}{6} - \pi\theta,$$

$$H(-1, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(2n\theta)}{n^2} - \theta^2 = -\frac{\pi^2}{12} \quad \left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ou} \quad -\frac{\pi^2}{12} + \pi(\pi - 2\theta) \quad \left(\frac{\pi}{2} \le \theta \le 0\right).$$

Soit (α, β, γ) dans Δ. On pose :

$$\rho = \sqrt{\cos^2\alpha\,\cos^2\gamma - \cos^2\beta};$$

on a aussi :

$$\rho = \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha - \sin^2\gamma + \sin^2\alpha\,\sin^2\gamma}.$$

On pose ensuite

$$\tau = \frac{\rho - \sin\alpha \sin\gamma}{\rho + \sin\alpha \sin\gamma}. \text{ On a toujours } |\tau| \leq 1.$$

On pose enfin :

$$S(\alpha, \beta, \gamma) = H(\tau, \alpha) - H(\tau, \beta) + H(\tau, \gamma) - H(\tau, 0);$$

c'est la valeur en (α, β, γ) de la fonction de SCHLÄFLI. S est continue sur Δ et C^1 sur $\dot{\Delta}$.

Certaines valeurs de S sont immédiatement calculables et comme on calcule la différentielle de S on pourra en déduire d'autres valeurs et finalement les intégrales demandées.

2. Calcul de certaines valeurs de S.

Proposition 1. $S(\gamma, \beta, \alpha) = S(\alpha, \beta, \gamma)$.

Preuve. La définition de S est symétrique en (α, γ).

Proposition 2. $S(0, \beta, \gamma) = \pi(\beta - \gamma)$.

Preuve. Si $\alpha = 0$ alors $\tau = 1$ et $S(0, \beta, \gamma) = H(1, \gamma) - H(1, \beta)$.

Proposition 3. $S(\alpha, \pi - \beta, \gamma) - S(\alpha, \beta, \gamma) = \pi(\pi - 2\beta)$.

Preuve. β et $\pi - \beta$ définissent le même τ.

Proposition 4. Si $\cos\alpha \cos\gamma = \cos\beta$ alors $S(\alpha, \beta, \gamma) = 0$.

Preuve. On a $\rho = 0$, puis $\tau = -1$ et $S(-1, \theta) = -\frac{\pi^2}{12}$ si $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Proposition 5. Si $\sin^2\beta = \sin^2\alpha + \sin^2\gamma$, alors $S(\alpha, \beta, \gamma) = \beta^2 - \alpha^2 - \gamma^2$.

Preuve. On a $\rho = \sin\alpha \sin\gamma$, puis $\tau = 0$.

Voici quelques exemples issus de ces résultats :

S	0	$\frac{\pi^2}{48}$	$\frac{\pi^2}{144}$	$\frac{\pi^2}{90}$	$\frac{\pi^2}{450}$	$\frac{19\pi^2}{450}$
α	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{10}$
β	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{5}$
γ	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$

Les preuves en sont laissées au lecteur.

Le premier résultat découle de la proposition **4** et les autres de la proposition **5**.

On a toujours, en applications de la proposition **5** :

Proposition 6. $S(\alpha, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \alpha) = \alpha(\pi - 2\alpha)$.

3. La dérivation de S.

Le calcul des dérivées de S fait appel à celui des fonctions définies par des séries :

$$F(y, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} \cos(2n\theta),$$

et

$$G(y, \theta) = \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} \sin(2n\theta).$$

La première série converge sur $[-1, 1] \times [0, \pi]$ sauf en $(1, 0)$ et $(-1, \frac{\pi}{2})$ et l'on a :

$$F(y, \theta) = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2y\cos(2\theta) + y^2) = -\ln|1 - y e^{2i\theta}|.$$

La deuxième série converge toujours sur $[-1, 1] \times [0, \pi]$ et l'on a :

$$G(y, \theta) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1+y}{1-y} \tan\theta\right) \quad \text{si} \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad -1 \leq y < 1.$$

On ajoiute π au second membre si $\theta > \frac{\pi}{2}$. Enfin :

$$G(y, \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad G(1, \theta) = \frac{\pi}{2}.$$

G est continue sur $]-1, 1[\times [0, \pi]$. On a :

$$y \frac{\partial H}{\partial y} = -F \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial \theta} = -2G.$$

La simplification du calcul des dérivées de S vient de :

Proposition 7. Pour tout (α, β, γ) de Δ, τ étant défini comme ci-dessus, on a :

$$\frac{\partial}{\partial y}(H(y, \alpha) - H(y, \beta) + H(y, \gamma) - H(y, 0))_{y=\tau} = 0.$$

Preuve. On remarque que si (α, β, γ) est dans $\dot{\Delta}$, on a $\tau \neq 0$.

Posons $P = \dfrac{(\tau - e^{2i\alpha})(\tau - e^{2i\gamma})}{(\tau - e^{2i\beta})(\tau - 1)}$. Tout revient à montrer que $|P| = 1$. On trouve par le calcul :

$$P = i\, e^{i(\alpha - \beta + \gamma)} \frac{(\rho - i\cos\alpha\sin\gamma)(\rho - i\cos\gamma\sin\alpha)}{\rho\sin\beta - i\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma}.$$

Or $\quad |\rho - i\cos\alpha\sin\gamma|^2 = \cos^2\alpha - \cos^2\beta\,;\, |\rho - i\sin\alpha\cos\gamma|^2 = \cos^2\gamma - \cos^2\beta\,;$

$$|\rho\sin\beta - i\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma|^2 = (\cos^2\alpha - \cos^2\beta)(\cos^2\gamma - \cos^2\beta).$$

On en déduit donc que $|P| = 1$.

On a donc par exemple :

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{\partial \tau}{\partial \alpha}\frac{\partial}{\partial y}(H(y, \alpha) - H(y, \beta) + H(y, \gamma) - H(y, 0))_{y=\tau} - 2G(\tau, \alpha) = -2G(\tau, \alpha).$$

Il reste à simplifier le calcul de $G(\tau, \alpha)$, $G(\tau, \beta)$ et $G(\tau, \gamma)$. On a :

$$\frac{1+\tau}{1-\tau} = \frac{\rho}{\sin\alpha\sin\gamma},$$

$$\text{puis } G(\tau, \alpha) = \operatorname{Arctan}\frac{\rho}{\sin\alpha\sin\gamma},$$

$$G(\tau, \beta) = \operatorname{Arctan}\frac{\rho\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma} \quad (\text{ajouter } \pi \text{ si } \beta > \frac{\pi}{2})$$

$$\text{et } G(\tau, \gamma) = \operatorname{Arctan}\frac{\rho}{\sin\alpha\cos\gamma}.$$

On peut aussi utiliser Arccos. On montre ainsi :

Proposition 8. Pour tout (α, β, γ) intérieur à Δ, on a :

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = -2\operatorname{Arccos}\frac{\cos\alpha\sin\gamma}{\sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}} \qquad \frac{\partial S}{\partial \gamma} = -2\operatorname{Arccos}\frac{\cos\gamma\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\gamma - \cos^2\beta}}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = \delta \text{ ou } \pi - \delta \quad \text{selon que} \quad \beta \leq \frac{\pi}{2} \text{ ou } \beta \geq \frac{\pi}{2},$$

$$\text{avec } \delta = -2\operatorname{Arccos}\frac{\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma}{\sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}\,\sqrt{\cos^2\gamma - \cos^2\beta}}.$$

4. Le cas $\beta = \frac{\pi}{2}$.

Proposition 9. $S(\alpha, \frac{\pi}{2}, \gamma) = \frac{1}{2}(\pi - 2\alpha)(\pi - 2\gamma)$.

Preuve. Si $\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}$, c'est la proposition **6**. On pose

$$f(\alpha, \gamma) = S(\alpha, \frac{\pi}{2}, \gamma) - \frac{1}{2}(\pi - 2\alpha)(\pi - 2\gamma).$$

f est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]^2$, et nulle en $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, C^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}[^2$ et :

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = -2G(\tau, \alpha) + \pi - 2\gamma,$$

$$\text{avec} \quad G(\tau, \alpha) = \operatorname{Arc}\cos \frac{\cos\alpha \sin\gamma}{\cos\alpha} = \frac{\pi}{2} - \gamma.$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$.

De même $\frac{\partial f}{\partial \gamma} = 0$. Donc f est constante et finalement nulle.

On a ici $\tau = \frac{\cos(\alpha+\gamma)}{\cos(\alpha-\gamma)}$; donc, pour tous α, γ de $[0, \frac{\pi}{2}]$ on a l'identité :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(\alpha+\gamma)}{\cos(\alpha-\gamma)}\right)^n \frac{\cos(2n\gamma) + \cos(2n\gamma) - 1 - (-1)^n}{n^2} = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \gamma\right)^2.$$

En changeant de notations : pour $0 \le x \le \pi$ et $0 \le y \le \operatorname{Min}\{x, \pi - x\}$,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos x}{\cos y}\right)^n \frac{\cos(nx)\cos(ny) - \cos^2(n\frac{\pi}{2})}{n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2.}$$

5. Deux relations fonctionnelles.

On pose ici $\alpha_0 = \operatorname{Arccos} \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Proposition 10. Si $\frac{\pi}{4} \le \alpha \le \alpha_0$, on a $S(2\alpha - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{6}) = 4S(\alpha, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$.

Preuve. Posons $f(\alpha) = S(2\alpha - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{6}) - 4S(\alpha, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$. On a :

$$f(\frac{\pi}{4}) = S(0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}) - 4S(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}) = \frac{\pi^2}{12} - 4\frac{\pi^2}{48} = 0.$$

Posons $\eta = \operatorname{Arccos} \frac{\cos\alpha}{\sqrt{4\cos^2\alpha - 1}}$. On a :

$$f'(\alpha) = -8\eta + 4(2\eta) = 0.$$

Donc f est la fonction nulle.

Proposition 11. Si $0 < \alpha \le \alpha_0$, on a $S(\alpha, \pi - 2\alpha, \alpha) = 6S(\alpha, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$.

Preuve. Posons ici $f(\alpha) = S(\alpha, \pi - 2\alpha, \alpha) - 6S(\alpha, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$. On a :

$$f(\frac{\pi}{4}) = S(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}) - 4S(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}) = \frac{\pi^2}{8} - 6\frac{\pi^2}{48} = 0.$$

On a : $f'(\alpha) = -12\eta + 6(2\eta) = 0$. Donc f est la fonction nulle.

On en déduit de nouvelles valeurs de S :

S	$\frac{\pi^2}{15}$	$\frac{\pi^2}{1\,800}$	$\frac{\pi^2}{300}$	$\frac{11\pi^2}{300}$	$\frac{191\pi^2}{1\,800}$
α	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{10}$
β	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{3}$
γ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{6}$

En effet : on a à la fois

$$S\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)-S\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi^2}{3}\qquad\text{(proposition 3)}$$

et :

$$S\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)=6\,S\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)\qquad\text{(proposition 11).}$$

On en déduit bien

$$S\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi^2}{1\,800}.$$

On applique la proposition 10 puis la proposition 11 avec $\alpha=\frac{3\pi}{10}$ pour trouver :

$$S\left(\frac{3\pi}{10},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi^2}{1\,800},)$$

puis

$$S\left(\frac{3\pi}{10},\frac{2\pi}{5},\frac{3\pi}{10}\right)=\frac{\pi^2}{300}.$$

Explicitons à l'aide de séries ces dernières relations. On pose $\sigma=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$;

– au triplet $\left(\frac{3\pi}{10},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$ on associe $\rho=\frac{3-\sqrt{5}}{8}$, puis $\tau=-\sigma$;

– au triplet $\left(\frac{3\pi}{10},\frac{2\pi}{5},\frac{3\pi}{10}\right)$ on associe $\rho=\frac{-1+\sqrt{5}}{8}$, puis $\tau=-\sigma$.

On en tire les identités, en utilisant $\cos(n\pi-\theta)=(-1)^n\cos(n\theta)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma^n}{n^2}\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)-\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)-(-1)^n\right)=\frac{13\pi^2}{1\,800},$$

et :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma^n}{n^2}\left(2\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)-\cos\left(\frac{n\pi}{5}\right)-(-1)^n\right)=\frac{7\pi^2}{300}.$$

Par ailleurs, au triplet $\left(\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{10}\right)$, on associe $\tau=\sigma$. Donc, avec la proposition **9**, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma^n}{n^2}\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{n\pi}{5}\right)-1-(-1)^n\right)=\frac{\pi^2}{25};$$

– au triplet $\left(\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$ on associe $\rho=\frac{3+\sqrt{5}}{8}$, puis $\tau=\sigma$;

– au triplet $\left(\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{10}\right)$ on associe $\rho=\frac{1+\sqrt{5}}{8}$, puis $\tau=\sigma$.

Donc
$$S\left(\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma^n}{n^2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{5}\right)-\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)-1\right)=\frac{11\pi^2}{150}$$
$$=\frac{\pi^2}{25}-\frac{13\pi^2}{1\,800}+\frac{11\pi^2}{150}=\frac{191\pi^2}{1\,800},$$

et :
$$S\left(\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{10}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma^n}{n^2}\left(2\cos\left(\frac{n\pi}{5}\right)-\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)-1\right)+\frac{\pi^2}{50}$$
$$=\frac{\pi^2}{25}-\frac{7\pi^2}{300}+\frac{\pi^2}{50}=\frac{11\pi^2}{300}.$$

6. L'intégrale de Baker.

On définit $B(a,b,x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sqrt{a-b}\ \mathrm{Arctan}\sqrt{t}\ dt}{(a-t)\sqrt{b-t}}$.

Le changement de variable $\alpha = \mathrm{Arctan}\sqrt{\dfrac{b-t}{a-b}}$ montre, avec $d\alpha = \dfrac{-\sqrt{a-b}}{2(a-t)\sqrt{b-t}}\,dt$, que

$$B(a,b,x) = -2\int_0^x \mathrm{Arctan}\sqrt{t}\ d\left(\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{b-t}{a-b}}\right).$$

Soient β et γ fixés avec $\beta \le \frac{\pi}{2}$. En utilisant :

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = -2\ \mathrm{Arctan}\frac{\rho}{\cos\alpha\sin\gamma},\ (\rho = \sqrt{\cos^2\alpha\cos^2\gamma - \cos^2\beta}),$$

on exprime S comme la primitive s'annulant en ω de $\alpha \mapsto -2\ \mathrm{Arctan}\dfrac{ro}{\cos\alpha\sin\gamma}$.

On cherche à introduire a et b pour que t soit la variable $\left(\dfrac{\rho}{\cos\alpha\sin\gamma}\right)^2$. On trouve aisément

$$a = \mathrm{cotan}^2\gamma \quad\text{et}\quad b = \frac{\cos^2\gamma - \cos^2\beta}{\sin^2\gamma}.$$

Inversement :

$$\beta = \mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{1+b}{a-b}} \quad\text{et}\quad \gamma = \mathrm{Arctan}\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Comme S est nulle si ρ est nul, on arrive ainsi à l'égalité :

Proposition 12. $B(a,b,x) = S(\alpha,\beta,\gamma)$ dès que

$$\alpha = \mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{b-x}{a-b}}\quad \beta = \mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{1+b}{a-b}}\quad\text{et}\quad \gamma = \mathrm{Arctan}\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

---

7. La première égalité.

Dans la proposition 12, on prend $a = 3$ et $b = 2$. Posons

$$\theta = 2\ \mathrm{Arctan}\sqrt{2-x} \quad\text{soit}\quad x = \frac{3\cos\theta+1}{\cos\theta+1}$$

Donc $S(\frac{\theta}{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}) = B(2,3,x)$, puis :

$$\frac{d}{d\theta}\left(S(\frac{\theta}{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})\right) = -\mathrm{Arctan}\sqrt{x} = -\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{3\cos\theta+1}{\cos\theta+1}}$$

Pour $\cos\theta = -\frac{1}{}$, soit $\theta = \theta_0 = \mathrm{Arccos}(-\frac{1}{3})$, on a ici $\rho = 0$ donc $S = 0$. On a montré ainsi que :

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{3\cos t+1}{\cos t+1}}\,dt = -S(\frac{\theta}{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}).$$

On vérifie que

$$2\ \mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{3\cos t+1}{\cos t+1}}\,dt = \pi - \mathrm{Arccos}\frac{\cos t}{1+2\cos t}.$$

Donc

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \mathrm{Arccos}\frac{\cos t}{1+2\cos t}\,dt = \pi(\theta-\theta_0) + 2S(\frac{\theta}{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}).$$

On sait que $S(0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}) = \frac{\pi^2}{6}$. Donc, par différence :

$$\boxed{\int_{\theta_0}^{\theta} \text{Arccos}\,\frac{\cos t}{1+2\cos t}\,dt = \pi\,\theta + 2\,S(\frac{\theta}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}) - \frac{\pi^2}{3}.}$$

On trouve non seulement le résultat voulu pour la première égalité, mais aussi les valeurs suivantes de : $A_1(\theta) = \int_0^{\theta} \text{Arccos}\,\frac{\cos t}{1+2\cos t}\,dt$.

θ	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi^2}{5}$	$\frac{\pi}{5}$	θ_0	2φ
$S(\frac{\theta}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$	$\frac{\pi^2}{15}$	$\frac{\pi^2}{48}$	$\frac{\pi^2}{1\,800}$	$\frac{19\,\pi^2}{1\,800}$	0	0
$A_1(\theta)$	$\frac{2\,\pi^2}{15}$	$\frac{5\,\pi^2}{24}$	$\frac{241\,\pi^2}{900}$	$\frac{71\,\pi^2}{900}$	$\pi_0 - \frac{\pi}{3}$	$2\,\pi\,\varphi - \frac{\pi}{3}$

8. La deuxième égalité.

L'égalité :

$$\text{Arccos}\,(\frac{1}{1+2\cos\theta}) = 2\,\text{Arctan}\,\sqrt{x}$$

revient à :

$$x = \frac{\cos\theta}{1+\cos\theta} \quad \text{soit} \quad \cos\theta = \frac{x}{1-x}.$$

Posant $\alpha = \text{Arctan}\sqrt{\frac{b-x}{a-b}}$, on choisit a et b pour que α soit une fonction aussi simple que possible de θ. On a alors

$$\tan^2\alpha = \frac{b + b\cos\theta - \cos\theta}{(a-b)(1+\cos\theta)}.$$

On arrive à $\alpha = \frac{\theta}{2}$ en prenant $a = 1$ et $b = \frac{1}{2}$.

On a montré ainsi que $\int_{\pi/2}^{\theta} \text{Arccos}\,\frac{1}{1+2\cos\theta}\,dt = -2\,S(\frac{\theta}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$.

On sait que $S(0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^2}{12}$. Donc, par différence :

$$\boxed{\int_{\pi/2}^{\theta} \text{Arccos}\,\frac{1}{1+2\cos\theta}\,dt = -2\,S(\frac{\theta}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi^2}{6}.}$$

On trouve le résultat voulu pour la deuxième égalité. On trouve aussi d'autres valeurs pour

$$A_2(\theta) = \int_0^{\theta} \text{Arccos}\,\frac{1}{1+2\cos\theta}\,dt :$$

$$A_2(\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et par exemple} \quad A_2(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{6}.$$

9. La troisième égalité.

L'égalité : $\text{Arccos}\,(\frac{1-\cos\theta}{2\cos\theta}) = 2\,\text{Arctan}\,\sqrt{x}$ revient à :

$$x = \frac{3\cos\theta - 1}{1+\cos\theta} \quad \text{soit} \quad \cos\theta = \frac{1+x}{3-x}.$$

Ici $\theta_0 = \text{Arccos}\,(\frac{1}{3})$.

Posant $\alpha = \text{Arctan}\sqrt{\dfrac{b-x}{a-b}}$, on choisit encore a et b pour que α soit une fonction aussi simple que possible de θ . On a alors

$$\tan^2 \alpha = \frac{b + b\cos\theta - 3\cos\theta + 1}{(a-b)(1+\cos\theta)}.$$

On arrive à $\alpha = \dfrac{\theta}{2}$ en prenant $a = 3$ et $b = 1$.

On a montré ainsi que $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\theta} \text{Arccos}\frac{1-\cos t}{2\cos t}\,dt = -2\,S\left(\frac{\theta}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$.

On sait que $S\left(0, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi^2}{12}$. Donc, par différence :

$$\boxed{\int_0^{\theta} \text{Arccos}\,\frac{1}{1+2\cos t}\,dt = -2\,S\left(\frac{\theta}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi^2}{6}.}$$

On trouve le résultat voulu pour la deuxième égalité. On trouve aussi d'autres valeurs pour

$$A_3(\theta) = \int_0^{\theta} \text{Arccos}\,\frac{1}{1+2\cos t}\,dt :$$

$$A_3\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{11\,\pi^2}{72} \quad \text{et par exemple} \quad A_2(2\,\phi) = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{avec} \quad \phi = \text{Arccos}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

RÉFÉRENCES

[1] H.S.M. COXETER. *Twelve Geometric Essays*. Southern Illinois University Press, Carbondale, Illinois 62901, 1968, p. 4 à 20.

[2] H.S.M. COXETER. *Mathematical Gazette*, 13, 1926, p. 205.

FIN