93e année (1982-1983) Octobre 1982 - Mensuel n° 2

Revue de Mathématiques Spéciales

Quelques applications de l'inégalité des accroissements finis au calcul de normes dans des espaces fonctionnels

par L. G. Vidiani, professeur en Mathématiques supérieures au lycée Carnot de Dijon.

E étant un espace vectoriel normé, sur le corps des réels ou des complexes, a et b deux réels tels que $a < b$,

$$f : [a, b] \to E \qquad \text{et} \qquad g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$$

des applications continues admettant en tout point de $]a, b[- D$ (D étant un ensemble dénombrable de points de $[a, b]$) des dérivées à droite telles que

$$\forall t \in]a, b[- D, \qquad \|f'_d(t)\| \leqslant g'_d(t),$$

le théorème des accroissements finis qui s'écrit alors

$$\forall t \leqslant t', \qquad t, t' \in [a, b],$$

$$(1) \qquad \|f(t') - f(t)\| \leqslant g(t') - g(t)$$

a de multiples applications : généralisation de la notion de primitive, dans le cas de fonctions numériques, caractérisation d'applications monotones, droites affines d'appui, etc.

Le but de cet article est d'illustrer, sur deux exemples classiques, dont l'un lié à la notion de fonction de Green, comment utiliser le théorème des accroissements finis pour calculer des normes dans des espaces fonctionnels simples.

Nous nous limiterons à $E = \mathbb{R}$ muni de sa norme usuelle.

Donnons alors une interprétation géométrique, sur les graphes de f et g dans un repère affine, du théorème (1)

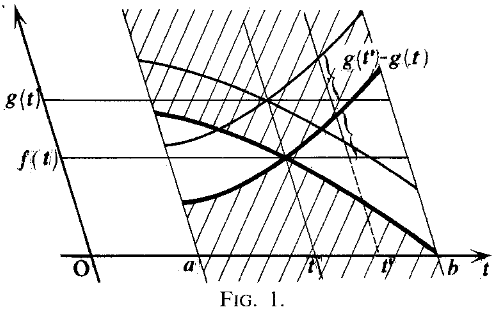

Fig. 1.

(1) signifie

$$\forall t \leqslant t', \; f(t) - (g(t') - g(t)) \leqslant f(t') \leqslant f(t) + g(t') - g(t)$$
$$\forall t' \leqslant t, \; f(t) - (g(t') - g(t)) \leqslant f(t') \leqslant f(t) + g(t') - g(t)$$

ce qui s'interprète, en constatant que les points $(t, f(t))$ $a \leqslant t \leqslant b$ sont dans la zone non hachurée du plan représenté sur la figure 1.

Première application : Comparaison de deux normes.

Soit $E = \{f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}) | f(0) = 0\}$ on définit les deux normes n et N par

$$n(f) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t) + f'(t)|$$

et

$$N(f) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| + \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)|.$$

Nous laissons au lecteur à titre d'exercice le soin de vérifier que n et N sont effectivement des normes sur E, et que (E, N) est complet (voir par exemple la Revue de mathématiques spéciales, avril 78). Nous nous proposons de démontrer que n et N sont deux normes équivalentes sur E, en idéalisant les constantes d'encadrement du rapport des normes.

D'abord, pour tout t de [0, 1], on a

$$|f(t) + f'(t)| \leqslant |f(t)| + |f(t')| \leqslant \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| + \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)| = N(f)$$

donc

$$n(f) \leqslant N(f).$$

Cette inégalité est la meilleure, puisqu'elle est atteinte pour $f = \mathrm{id}_{[0,1]}$.

Pour établir la dernière inégalité, qui nous donnera l'équivalence de n et N nous utilisons la fonction auxiliaire définie par

$$\varphi(t) = f(t)e^t \qquad \text{et} \qquad \varphi'(t) = [f'(t) + f(t)]e^t$$

alors

$$\forall t \in [0, 1], \qquad |f(t) + f'(t)| \leqslant k = n(f)$$

et, par conséquent,

$$|\varphi'(t)| \leqslant ke^t.$$

L'inégalité (1) des accroissements finis donne alors sur $[0, t]$ inclus dans $[0, 1]$

$$|\varphi(t) - \varphi(0)| \leqslant k(e^t - 1) \Leftrightarrow |e^t f(t)| \leqslant k|e^t - 1|$$

$$\Leftrightarrow |f(t)| \leqslant k(1 - e^{-t}) \leqslant k\left(1 - \frac{1}{e}\right) = k_0.$$

Par conséquent, $\forall t \in [0, 1]$,

$$\left.\begin{array}{l} -k_0 \leqslant -f(t) \leqslant k_0 \\ -k \leqslant f(t) + f'(t) \leqslant +k \end{array}\right\} \Rightarrow -k - k_0 \leqslant f'(t) \leqslant k + k_0$$

et donc, $\forall t,\ t' \in [0, 1]$,

$$|f'(t)| \leqslant k + k_0$$
$$|f(t')| \leqslant k_0$$

donc

$$\sup_{[0,1]} |f'(t)| + \sup_{[0,1]} |f(t)| \leqslant k + 2k_0 = k\left[1 + 2 - \frac{2}{e}\right] = k\left[3 - \frac{2}{e}\right]$$

par « conséquent »

$$n(f) \leqslant \mathrm{N}(f) \leqslant \left(3 - \frac{2}{e}\right)n(f).$$

Remarquons que cet encadrement est d'abord bien meilleur que celui fourni dans la Revue de mathématiques spéciales (avril 78) ($n(f) \leqslant \mathrm{N}(f) \leqslant 4en(f)$) puisque

$$4e = 10{,}873\,127\,31, \qquad 3 - \frac{2}{e} = 2{,}264\,241\,118,$$

$$\frac{4e}{3 - \dfrac{2}{e}} = 4{,}802\,106\,41\ldots$$

mais en outre il est le meilleur car le rapport $\mathrm{N}(f_n)/n(f_n)$ a pour limite $3 - 2/e$ pour n tendant vers plus l'infini, en prenant la suite de fonctions f_n, dont le graphe est ci-dessous et construite de la manière suivante :

k étant un nombre réel strictement positif nous posons $k_0 = k(1 - e^{-1})$. On prend $0 < \theta_n < \dfrac{1}{n}$ pour que

$$f'_n(x) = -ke^{-x} \quad \text{en} \quad x = 1 - \frac{3}{n} + \theta_n.$$

L'existence de θ_n se prouve par le théorème des valeurs intermédiaires et donne le raccordement des dérivées à droite et à gauche pour

- $f_n(t) = -k(1 - e^{-t})$ sur $\left[0,\ \theta_n + 1 - \dfrac{3}{n}\right]$.
- $f_n(t) = \mu - \dfrac{k\left(2 - \dfrac{1}{e}\right)}{n\pi} \times 2\cos\dfrac{n\pi}{2}\left(x - 1 + \dfrac{2}{n}\right)$

sur $\left[\theta_n + 1 - \dfrac{3}{n},\ 1\right]$. On choisit ensuite μ pour que

$$f_n\left(1 - \frac{3}{n} + \theta_n\right) = -k\left(1 - \exp -\left(1 - \frac{3}{n} + \theta_n\right)\right)$$

ce qui donne les raccords des valeurs de

$$f_n\left(1 - \frac{3}{n} + \theta_n + 0\right) \qquad \text{et} \qquad f_n\left(1 - \frac{3}{n} + \theta_n - 0\right)$$

Le graphe de f_n a l'allure suivante :

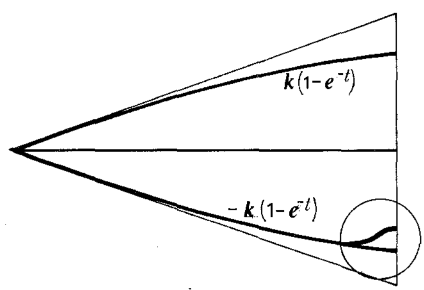

FIG. 2.

agrandissement

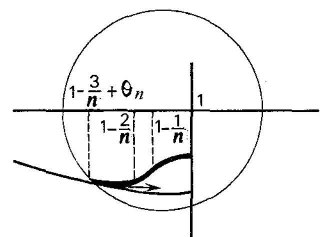

FIG. 3.

Seconde application : Calcul de la norme d'une application linéaire.

Soit $\mathrm{E} \subset \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ le sous espace des fonctions telles que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ normé par $\|f\| = \sup_{[0,1]} |f(x)|$; alors il est immédiat de vérifier que l'application $\varphi : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ telle que

$$\forall f \in \mathrm{E}, \quad \forall x \in [0, 1],$$

$$\varphi(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^1 (1 - t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

est linéaire continue puisque $x \in [0, 1]$,

$$|\varphi(f)(x)| \leqslant \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 (1-t)|f(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \|f\|\left(\int_0^x t\,\mathrm{d}t + \int_x^1 (1-t)\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= \left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)\|f\| \leqslant \frac{1}{2}\|f\|$$

et $$|||\varphi||| \leqslant \frac{1}{2}.$$

En considérant alors la fonction f_ε continue, affine par morceaux définie de la façon suivante, pour $\varepsilon \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$,

$$f_\varepsilon(x) = 1, \qquad \forall x \in \left[0, \frac{1}{2} - \varepsilon\right],$$

$$f_\varepsilon(x) = -1, \qquad \forall x \in \left[\frac{1}{2} + \varepsilon, 1\right]$$

$$f_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon}\left[x - \frac{1}{2}\right], \qquad \forall x \in \left[\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon\right];$$

il est manifeste que $f_\varepsilon \in \mathrm{E}$ et $\|f_\varepsilon\| = 1$

$$\int_0^1 tf_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon} t\,\mathrm{d}t$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}+\varepsilon} -\frac{t}{\varepsilon}\left(t - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t - \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^{1} t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon^2}{3}.$$

Quant à $\int_0^x f_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t$, elle prend manifestement ses valeurs dans $\left[0, \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right]$. Il en résulte que

$$|||\varphi(f_\varepsilon)||| = \sup\left(\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon^2}{3}, \frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{3}\right) = \frac{1}{4} - \frac{\varepsilon^2}{3}$$

et, par suite, $$|||\varphi||| \geqslant \frac{1}{4} - \frac{\varepsilon^2}{3}.$$

En faisant tendre ε vers 0, on en déduit

$$|||\varphi||| \geqslant \frac{1}{4}.$$

Puisque $\varphi(f)$ est dans E et que $\varphi(f)' = f$ on a $\varphi(f)(0) = \varphi(f)(1)$. Pour f de E telle que $\|f\| = 1$ on déduit que $|||\varphi||| > \frac{1}{4}$ est impossible en effet si l'on pose pour simplifier les notations $g = \varphi(f)$

$$\frac{1}{4} + \varepsilon = \|g\| > \frac{1}{4}$$

est impossible : en effet d'après l'interprétation géométrique de l'inégalité des accroissements finis, donnée au début de l'article il n'y aurait pas de compensation possible, l'aire positive entre Ox et le graphe de g étant strictement supérieure (car supérieure à $\frac{1}{2} + 2\varepsilon$) à la valeur absolue de l'aire négative qui est majorée par l'aire d'un triangle d'hypothénuse $\frac{1}{2} - 2\varepsilon$ (on notera qu'il y a deux cas de figure, mais comme la pente des côtés est $+1$ ou -1 il y a compensation des aires des petits triangles hachurés).

De plus l'aire d'un triangle de hauteur h, d'hypothénuse portée par Ox est $2h$ quand ses côtés ont pour pente $+1$ ou -1.

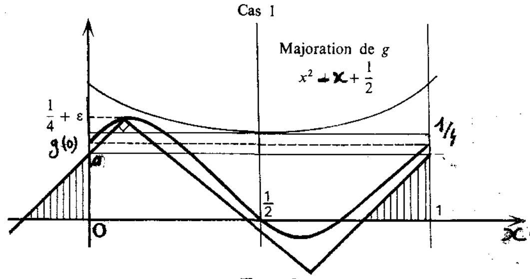

FIG. 3.

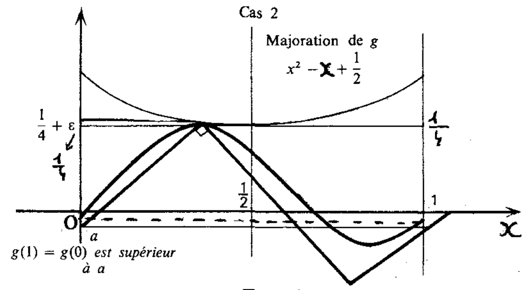

FIG. 4.

L'aire positive délimitée par Ox et le graphe de g est en effet supérieure à $\frac{1}{2} + 2\varepsilon$; l'aire négative déliminée par Ox et le graphe de g est en effet supérieure à $-\left(\frac{1}{2} - 2\varepsilon\right)$, on ne peut donc avoir $\int_0^1 g = 0$, puisque $\int_0^1 g \geqslant 4\varepsilon$: g n'appartient pas à E.

Pour minorer le graphe de g, on tient compte de $g(0) = g(1)$ et de ce que d'après le théorème des accroissements finis

$$g(0) = g(1) \geqslant a.$$

L'hypothèse $\|g\| > \frac{1}{4}$ est absurde par conséquent

$$|||\varphi||| = \frac{1}{4}.$$

Le maximum de g étant atteint en x_0 on a :

$$\frac{\frac{1}{4} + \varepsilon - a}{x_0 - 0} = 1 \text{ d'où } a.$$

En désignant par E′ (respectivement E″) le sous espace des éléments de E vérifiant pour tout x de $[0, 1]$ $f(1-x) = f(x)$ (respectivement $f(1-x) = -f(x)$) on pourra à titre d'exercice montrer que

$$\varphi(\mathrm{E}'') \subset \mathrm{E}', \qquad \varphi(\mathrm{E}') \subset \mathrm{E}''$$

et que φ n'est pas surjective. Chercher à quelle condition h élément dérivable de E a un antécédent dans E, (réponse $h(0) = h(1)$).

Puis en posant

$$E'_\infty = E' \cap C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$$

et

$$E''_\infty = E'' \cap C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$$

on montrera que

$$\varphi(E''_\infty) = E'_\infty \qquad \text{et} \qquad \varphi(E'_\infty) \subsetneqq E''_\infty$$

et on cherchera les fonctions propres de φ.