91e Année (1980-1981) · Février 1981 · Mensuel N° 6

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME D'HADAMARD POUR LA LOCALISATION DES VALEURS PROPRES D'UNE MATRICE A COEFFICIENTS COMPLEXES

par L. G. Vidiani, professeur en Mathématiques spéciales M' au lycée Berthollet à Annecy.

La question **I-3°** de la première épreuve du concours d'entrée 1980 aux Écoles normales supérieures de Saint-Cloud et de Fontenay demandait de démontrer le théorème de Farnell (1944). Outre le fait que la condition « il existe un entier i entre 1 et n tel que

$$|a_{ii} - \lambda| \leqslant \sqrt{P_i Q_i} \text{ »}$$

n'était pas facile à conjecturer (*), que le cas $n = 2$ n'était pas générique, il me semble que l'énoncé aurait pu guider les candidats, car cette question était, contrairement à ce que semblait suggérer sa place dans l'énoncé, complètement indépendante des questions précédentes.

En fait, les résultats d'Hadamard (**I-1°**), de Farnell (**I-3°**), de Brauer (**IV-1°**) et, dans une moindre mesure, **III-2°**, sont des cas adhérents ou particuliers des deux théorèmes d'Ostrowski (1951). Ce sont ces deux théorèmes qui font l'objet de la présente note. Les notations utilisées sont celles de l'énoncé du problème « Saint-Cloud 80 ».

(*) La question **I-3°** peut se démontrer de la façon suivante :

• On montre d'abord qu'il existe un entier $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que

$$|a_{ii} - \lambda| \leqslant \sqrt{P_i Q_i}.$$

La méthode est celle de la démonstration du premier théorème d'Ostrowski contenu dans cette note, l'inégalité de Hölder pour $\alpha = \frac{1}{2}$ n'étant autre qu'une inégalité de Cauchy-Schwarz.

• On écrit ensuite

$$|\lambda| \leqslant |\lambda - a_{ii}| + |a_{ii}| \leqslant \sqrt{P_i Q_i} + |a_{ii}|$$

$$\leqslant \sqrt{P_i + |a_{ii}|}\,\sqrt{Q_i + |a_{ii}|} = \sqrt{R_i T_i} \leqslant \sup_r \sqrt{R_r T_r}.$$

Le corrigé donné dans la Revue n° 5 proposait une autre méthode. (N.D.L.R.).

I. — Premier théorème d'Ostrowski. — *Une condition nécessaire pour que la matrice* A *soit singulière est que, pour tout réel* $\alpha \in]0, 1[$, *il existe un entier* i *entre* 1 *et* n *tel que*

$$|a_{ii}| \leqslant P_i^\alpha . Q_i^{1-\alpha}.$$

Le système non cramérien $AX = 0$ admet une solution $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ non banale, c'est-à-dire telle que $\operatorname{Max}_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$ soit non nul. Soit p l'un des indices tels que $|x_p| = \operatorname{Max}_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$. Pour tout entier i entre 1 et n, la ligne numéro i du système donne

$$(1) \qquad |a_{ii}x_i| = \left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j\right| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\,|x_j| \leqslant P_i|x_p|.$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que, pour tout entier i entre 1 et n,

$$(2) \qquad |a_{ii}| > P_i^\alpha Q_i^{1-\alpha}.$$

Alors, (1) et (2) impliqueraient

$$P_i^\alpha Q_i^{1-\alpha}|x_i| \leqslant |a_{ii}|\,|x_i| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\,|x_j| = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|^\alpha |a_{ij}|^{1-\alpha}|x_j|,$$

la première inégalité étant stricte pour au moins un i de $\{1, \ldots, n\}$, puisque les x_i ne sont pas tous nuls.

Majorons le second membre en utilisant l'inégalité de Hölder :

$$\left|\sum_{j\in A} \alpha_j\beta_j\right| \leqslant \left(\sum_{j\in A} |\alpha_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j\in A} |\beta_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

où A est une partie finie de N, p et q étant deux réels strictement plus grands que 1 et tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On choisit

$$\alpha_j = |a_{ij}|^\alpha, \qquad \beta_j = |a_{ij}|^{1-\alpha}|x_j|,$$
$$p = \frac{1}{\alpha}, \qquad q = \frac{1}{1-\alpha},$$

A est l'ensemble des entiers compris entre 1 et n et distincts de i :

$$P_i^\alpha Q_i^{1-\alpha}|x_i| \leqslant \left(\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n |a_{ij}|\right)^\alpha \left(\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n |a_{ij}|\,|x_j|^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha}$$

$$= P_i^\alpha \left(\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n |a_{ij}|\,|x_j|^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha}.$$

- Si P_i n'est pas nul, on en déduit

$$(3) \qquad Q_i^{1-\alpha}|x_i| \leqslant \left(\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n |a_{ij}|\,|x_j|^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha}.$$

- Si $P_i = 0$, comme (2) implique $a_{ii} \neq 0$, (1) implique $x_i = 0$ et (3) est encore vraie.

L'une au moins des inégalités (3) est stricte. Mettons ces inégalités sous la forme (3′) suivante et sommons de 1 à n puis permutons les sommations :

$$(3') \qquad Q_i|x_i|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n |a_{ij}|\,|x_j|^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

$$\sum_{i=1}^n Q_i|x_i|^{\frac{1}{1-\alpha}} < \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n |a_{ij}|\,|x_j|^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^n |a_{ij}|\,|x_j|^{\frac{1}{1-\alpha}}\right) = \sum_{j=1}^n Q_j|x_j|^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Nous aboutissons à une contradiction, donc (2) est fausse et le théorème 1 d'Ostrowski est vrai.

Nous constatons que les cas adhérents $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ sont les théorèmes d'Hadamard, objets de la question **1°**. Le cas $\alpha = \frac{1}{2}$ constitue le cas de Farnell, l'inégalité de Hölder intervenant étant alors une inégalité de Cauchy-Schwarz.

Comme les valeurs propres λ de A sont telles que $A - \lambda I$ soit singulière, les valeurs propres de A ont leurs images dans la réunion des n disques fermés définis par

$$|a_{ii} - z| \leqslant P_i^\alpha Q_i^{1-\alpha}.$$

L'intérêt de ce dernier résultat est qu'on peut affiner la localisation des valeurs propres de A en faisant varier le paramètre α dans $[0, 1]$.

II. — Second théorème d'Ostrowski. — *Une condition nécessaire pour que la matrice* A *soit singulière est que, pour tout réel* $\alpha \in]0, 1[$, *il existe deux indices distincts i et j tels que*

$$|a_{ii}a_{jj}| \leqslant P_i^\alpha Q_i^{1-\alpha} P_j^\alpha Q_j^{1-\alpha}.$$

Remarquons que le premier théorème d'Ostrowski est conséquence du second.

Raisonnons par l'absurde en supposant que, pour tout couple (i, j) d'indices distincts, on ait

$$|a_{ii}a_{jj}| > (P_iP_j)^\alpha(Q_iQ_j)^{1-\alpha}.$$

Alors, comme $a_{ii} \neq 0$, si on pose

$$s_i = \frac{1}{|a_{ii}|} P_i^\alpha Q_i^{1-\alpha},$$

on a $s_is_j < 1$ pour tout i et tout j tels que $i \neq j$.

Soit maintenant r l'un des indices tels que $s_r = \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} s_i$ et t l'un des indices, distinct de r, tels que $s_t = \sup\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq r}} s_i$.

On a donc, pour tout i distinct de r,

$$s_r \geqslant s_t \geqslant s_i.$$

Posons $q = \sqrt{\frac{s_r}{s_t}} \geqslant 1$ et introduisons la matrice A′ déduite de A en multipliant par q la ligne et la colonne d'indice r :

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r}q & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}q & \dots & a_{rr}q^2 & \dots & a_{rn}q \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nr}q & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Appelons P'_i, Q'_i, s'_i les valeurs de P_i, Q_i, s_i relatives à la matrice A′. On a

- pour $i \neq r$,

$$s'_i = \frac{1}{|a_{ii}|}\left(\sum_{\substack{j=1\\j\neq i,r}}^n |a_{ij}| + |a_{ir}|q\right)^\alpha \left(\sum_{\substack{j=1\\j\neq i,r}}^n |a_{ji}| + |a_{ri}|q\right)^{1-\alpha}$$

$$s'_i \leqslant qs_i = \sqrt{\frac{s_r}{s_t}}\, s_i^2 \leqslant \sqrt{\frac{s_rs_t^2}{s_t}} = \sqrt{s_rs_t} < 1;$$

- pour $i = r$,

$$s'_r = \frac{1}{|a_{rr}|q^2}\left(\sum_{\substack{j=1\\j\neq r}}^n |a_{rj}|q\right)^\alpha \left(\sum_{\substack{j=1\\j\neq r}}^n |a_{jr}|q\right)^{1-\alpha}$$

$$= \frac{1}{q}s_r = \sqrt{s_ts_r} < 1.$$

On a donc, pour tout indice i, $s'_i < 1$.

Ceci prouve que A′ ne satisfait pas à la condition nécessaire du premier théorème d'Ostrowski. La matrice A′ est donc inversible et, comme

$$q^2 \det A = \det A'$$

il en est de même de A, ce qui contredit l'hypothèse faite : le second théorème d'Ostrowski est ainsi démontré.

Nous constatons que le cas adhérent $\alpha = 0$ est le théorème de Brauer démontré en **IV-1°** du problème de Saint-Cloud.

En appliquant le second théorème d'Ostrowski à la matrice $A - \lambda I$, on trouve que, pour tout $\alpha \in [0, 1]$, les valeurs propres de A ont leurs images dans la réunion des $\frac{n(n-1)}{2}$ « disques » fermés (limités par des ovales de Cassini) définis par

$$|a_{ii} - z|\,|a_{jj} - z| \leqslant P_i^\alpha Q_i^{1-\alpha} P_j^\alpha Q_j^{1-\alpha}.$$

On peut affiner la localisation en faisant varier le paramètre α dans le segment $[0, 1]$.

III. – Applications. – On peut utiliser la localisation des valeurs propres de A pour faire un décompte des racines de $\det(A - zI)$ dont les images sont situées dans des domaines disjoints : si les régions où se trouvent les images des valeurs propres de A se décomposent en divers domaines D_v disjoints formés respectivement de k_v disques ou ovales $\left(\sum_v k_v = n\right)$, la matrice A possède alors k_v valeurs propres dans chacune des régions D_v. En effet, introduisons la matrice $B(t)$ telle que $\forall t \in [0, 1]$,

$$b_{ii}(t) = a_{ii}, \qquad b_{ij}(t) = ta_{ij} \qquad \text{pour} \qquad i \neq j.$$

Les valeurs propres de $B(t)$ varient continûment en fonction de t (*cf.* Agrégation 1977), de celles de $B(0)$, foyers des ovales de Cassini à celles de A pour $t = 1$. Comme les ovales associés à $B(t)$ sont de mêmes foyers que ceux de A et inclus dans ceux de A (puisque, par exemple

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |b_{ij}(t)| = tP_i \leqslant P_i),$$

on en déduit le résultat annoncé. En particulier, si les a_{ij}, $i = 1 \ldots n$, sont réels ainsi que les coefficients du polynôme caractéristique de A, tout domaine D_v formé par un nombre impair de disques contient au moins une valeur propre réelle.

Enfin, les théorèmes d'Ostrowski permettent des localisations assez fines des racines d'un polynôme

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

qui sont les valeurs propres de sa matrice compagnon :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{pmatrix}$$

Bibliographie : PARODI, *Localisation des valeurs propres.*