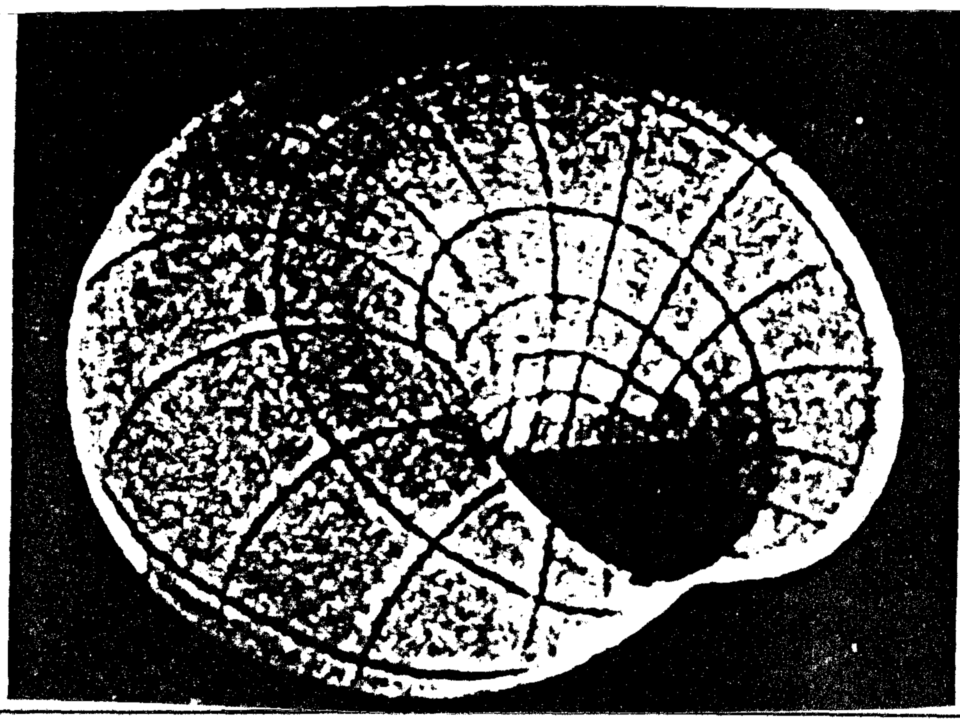


École supérieure d'ingénieurs de Marseille 84

p378

Option M
Deuxième épreuve Spé mai 85

6405. Coniques focales. Enveloppe d'une famille de sphères. Cyclide de Dupin.

(Voir l'énoncé complet dans la Revue n° 1, page .)

Solution par L. G. VIDIANI.

M1

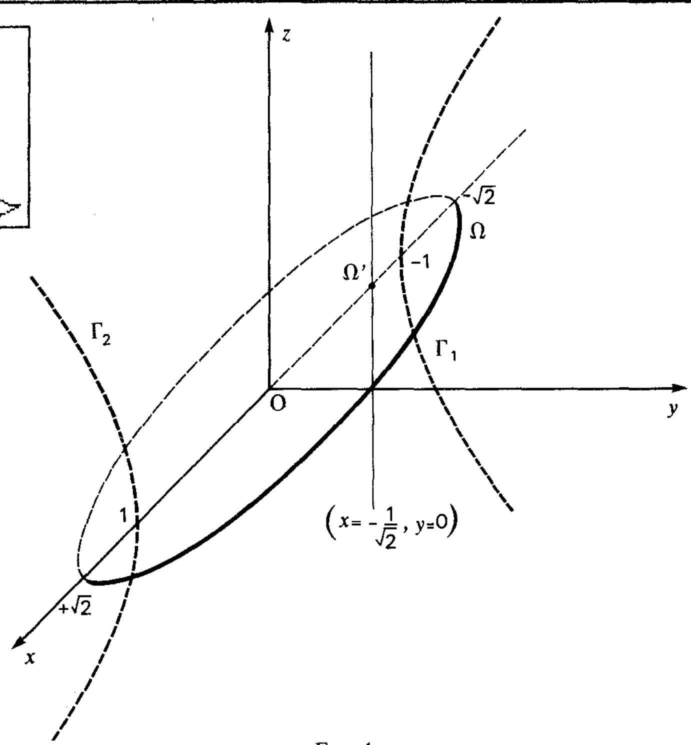


FIG. 1.

I 1°

I. — **1°** L'équation normale de (S_1) dans le repère (R) est

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2 = \left(\frac{x_1}{\sqrt{2}} + 1\right)^2, \quad \text{soit} \quad \boxed{F = x^2 + y^2 + z^2 - 2x_1x - 2y_1y - \sqrt{2}x_1 = 0.}$$

2° La condition d'élimination entre

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial y_1} dy_1 = (-2x - \sqrt{2})\, dx_1 - 2y\, dy_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad x_1\, dx_1 + 2y_1\, dy_1 = 0$$

est

$$\begin{vmatrix} -2x - \sqrt{2} & -2y \\ x_1 & 2y_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \boxed{2xy_1 - yx_1 + \sqrt{2}y_1 = 0 \qquad (\pi_1).}$$

(π_1) est donc le plan, parallèle à Oz, contenant la droite $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y = 0$ et dont un vecteur normal est $\boxed{(2y_1, -x_1, 0).}$

3° C_1 étant le centre de (C_1), le rayon r_1 de (C_1) vérifie $r_1^2 = \left(1 + \dfrac{x_1}{\sqrt{2}}\right)^2 - M_1C_1^2$, M_1C_1 étant la distance de M_1 au plan (π_1)

$$r_1^2 = \left(1 + \frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{(x_1y_1 + \sqrt{2}y_1)^2}{4y_1^2 + x_1^2} = \frac{(x_1 + \sqrt{2})^2}{2(4y_1^2 + x_1^2)}[4y_1^2 + x_1^2 - 2y_1^2] = \frac{(x_1 + \sqrt{2})^2}{4 - x_1^2},$$

$$\boxed{r_1 = \frac{x_1 + \sqrt{2}}{\sqrt{4 - x_1^2}}.}$$

C_1 est l'intersection de (π_1) et de la droite contenant M_1, parallèle au vecteur normal de (π_1). Cette droite a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = x_1 + \rho(2y_1) \\ y = y_1 - \rho x_1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Le paramètre du point C_1, est donné en reportant dans l'équation de (π_1), soit

$$\rho_{C_1}(4y_1^2 + x_1^2) = -y_1(\sqrt{2} + x_1).$$

Les coordonnées de C_1, sont en tenant compte de ce que $2y_1^2 + x_1^2 = 2$:

$$\boxed{x_{C_1} = \frac{2(x_1 - y_1^2\sqrt{2})}{4 - x_1^2},} \quad \boxed{y_{C_1} = \frac{y_1(4 + \sqrt{2}x_1)}{4 - x_1^2},} \quad \boxed{z_{C_1} = 0.}$$

4° Pour former l'équation du support (Σ) des cercles (C_1), éliminons x_1, y_1 entre les équations de

$$\left.\begin{array}{ll} (S_1) & \sqrt{2}x_1(1 + \sqrt{2}x) + 2y_1y = x^2 + y^2 + z^2 \\ (\pi_1) & -yx_1 + \sqrt{2}y_1(1 + \sqrt{2}x) = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

et l'équation de (Γ_1).

Le système (1) est cramérien, sauf au point $\left(\pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, z\right)$ où il est incompatible

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & 2y \\ 0 & \sqrt{2}(1 + \sqrt{2}x) \end{vmatrix}}{2(1 + \sqrt{2}x)^2 + 2y^2} = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{2}(1 + \sqrt{2}x)}{2[(1 + \sqrt{2}x)^2 + y^2]},$$

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} \sqrt{2}(1 + \sqrt{2}x) & x^2 + y^2 + z^2 \\ -y & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)y}{\Delta}.$$

L'équation de (Σ) s'obtient en exprimant que $\dfrac{x_1^2}{2} + y_1^2 = 1$, d'où

$$(x^2 + y^2 + 2^2)^2 \frac{(1 + \sqrt{2}x)^2 + y^2}{4[(1 + \sqrt{2}x)^2 + y^2]^2} = 1, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{(\Sigma)\ (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 4[(1 + \sqrt{2}x)^2 + y^2] = 0.}$$

(Σ) est une surface algébrique du quatrième degré, dont l'intersection avec le plan de l'infini, d'équation $T = 0$ en coordonnées homogènes, est l'ombilicale $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$ comptée deux fois : (Σ) est donc une *cyclide de Dupin*, enveloppe d'une famille de sphères tangentes à trois sphères données, ou encore inverse de tore, cylindre ou cône.

Dans l'exemple proposé dans le concours ESIM 84 nous verrons que (Σ) est en fait inverse d'un cylindre de révolution (et également d'un tore).

Recherchons les points critiques de (Σ) : ils vérifient $F = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 0$,

$$\begin{cases} F = 0 \\ 4x(x^2 + y^2 + z^2) - 8\sqrt{2}(1 + \sqrt{2}x) = 0 \\ 4y(x^2 + y^2 + z^2) - 8y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 - 4((1 + \sqrt{2}x)^2 + y^2) = 0 \\ y(x^2 + y^2 - 2) = 0 \\ z = 0 \\ (x^2 + y^2)x - 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2}x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = (1 + \sqrt{2}x)^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 = 2 \\ z = 0 \\ 2x - 2\sqrt{2} - 4x = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x^4 - 4(1 + \sqrt{2}x)^2 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ x^3 - 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2}x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ (x + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}x) = 0 \\ x^3 = 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2}x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

(Σ) *a donc un seul point critique le point* $\Omega(-\sqrt{2}, 0, 0)$.

5° Les deux sphères (S) et (S_1) sont sécantes. En effet la distance de leurs centres est comprise entre la somme et la valeur absolue de la différence de leurs rayons.

$$R_1 - R_2 = \frac{x_1}{\sqrt{2}} + 1 - \sqrt{2}$$

$$M_1O^2 = x_1^2 + y_1^2 = \frac{2x_1^2 + 2y_1^2}{2} = \frac{x_1^2}{2} + 1, \qquad (R_1 - R_2)^2 = \frac{x_1^2}{2} + 1 + 2(1 - \sqrt{2})\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}} + 1\right) \leqslant M_1O^2$$

car sur (Γ_1) $\left|\dfrac{x_1}{\sqrt{2}}\right| \leqslant 1$,

$$(R_1 + R_2)^2 = \frac{x_1^2}{2} + 1 + 2(1 + \sqrt{2})\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}} + 1\right) \geqslant M_1O^2$$

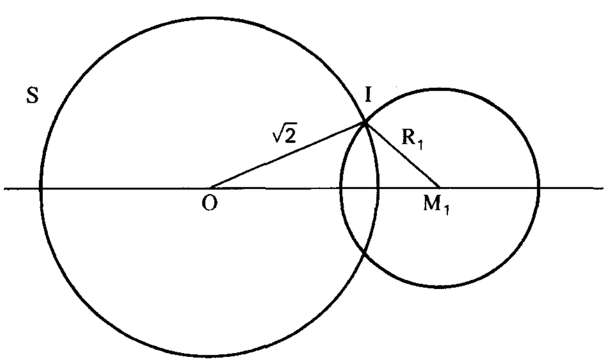


FIG. 2.

L'angle des plans tangents à S et S_1 en un point I de leur intersection est celui des rayons OI et M_1I

$$\cos \hat{I} = \frac{OI^2 + IM_1^2 - OM_1^2}{2OI.IM_1} = \frac{2 + \left(\frac{x_1}{\sqrt{2}} + 1\right)^2 - \frac{x_1^2}{2} - 1}{2\sqrt{2}\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}} + 1\right)} = \frac{2 + \sqrt{2}x_1}{2(x_1 + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\boxed{\text{Une mesure de l'angle demandé est donc } \frac{\pi}{4}.}$

6° Pour obtenir l'intersection de (Σ) avec $(O;\ \vec{i}, \vec{j})$ on remplace z par 0 dans l'équation de (Σ) et on utilise la technique de factorisation de Villarceau, ce qui donne

$$0 = (x^2 + y^2)^2 - 4y^2 - 4(1 + \sqrt{2}x)^2 = (x^2 + y^2 - 2)^2 + 4x^2 - 4 - 4(1 + \sqrt{2}x)^2$$
$$= (x^2 + y^2 - 2)^2 - 4(\sqrt{2} + x)^2$$
$$0 = (x^2 + y^2 - 2 + 2(x + \sqrt{2})(x^2 + y^2 - 2 - 2(x + \sqrt{2}))$$
$$= ((x + 1)^2 + y^2 - 3 + 2\sqrt{2})((x - 1)^2 + y^2 - 3 - 2\sqrt{2})$$
$$0 = [(x + 1)^2 + y^2 - (\sqrt{2} - 1)^2][(x - 1)^2 + y^2 - (\sqrt{2} + 1)^2].$$

L'intersection de (Σ) et de xOy est donc constituée de deux cercles dont centres et rayons sont en évidences. Les rayons sont inverses l'un de l'autre.

La différence des rayons est égale à la distance des centres, les deux cercles sont donc tangents intérieurement en Ω. Les autres points d'intersection respectifs avec Ox ont pour abscisses $2 + \sqrt{2}$ et $\sqrt{2} - 2$.

En procédant de manière analogue, l'équation de l'intersection de (Σ) et de xOz, obtenue en faisant $y = 0$ dans l'équation de (Σ) est

$$0 = (x^2 + z^2 - 2\sqrt{2}x - 2)(x^2 + z^2 + 2 + 2\sqrt{2}x) = ((x - \sqrt{2})^2 + z^2 - 4)((x + \sqrt{2})^2 + z^2) = 0.$$

On reconnaît le cercle point Ω et le cercle de centre $(\sqrt{2}, 0)$ de rayon 2, qui coupe Ox en les deux points d'abscisses $\sqrt{2} \pm 2$. Ce qui donne la figure ci-dessous :

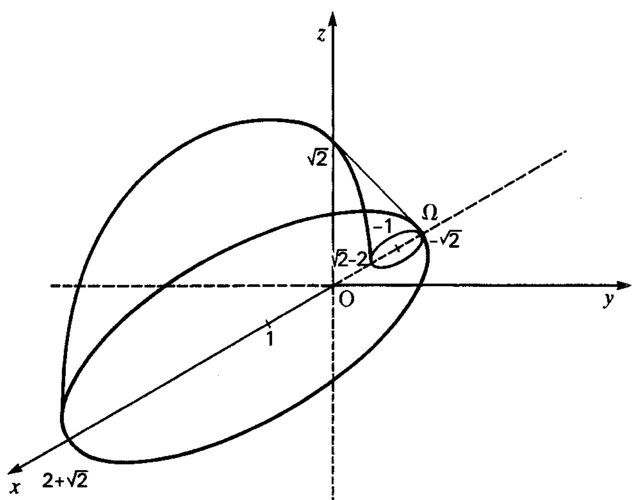


FIG. 3.

En outre les droites joignant Ω à l'intersection de (Σ) et de Oz sont tangentes au cercle de centre $(\sqrt{2}, 0)$ de rayon 2.

Le cercle point Ω sera le centre de l'inversion qui transforme la cyclide (Σ) en un cylindre.

La remarque précédente suggère de prendre l'inversion $\mathscr{I}(\Omega, 4)$. Le cercle $y = 0$, $(x - \sqrt{2})^2 + z^2 = 4$ sera alors globalement invariant. En posant $\Delta = (x + \sqrt{2})^2 + y^2 + z^2$ l'équation de (Σ) s'écrit

$$(\Delta - 2 - 2x\sqrt{2})^2 = \Delta^2 - 4\Delta(1 + x\sqrt{2}) + 4 + 8x^2 + 8\sqrt{2}x = 4 + 8x^2 + 8x\sqrt{2} + 4y^2,$$

soit

$$\Delta^2 - 4\Delta\sqrt{2}(x + \sqrt{2}) + 4(x + \sqrt{2})^2 + 4z^2 = 0.$$

Les formules analytiques de l'inversion citée sont

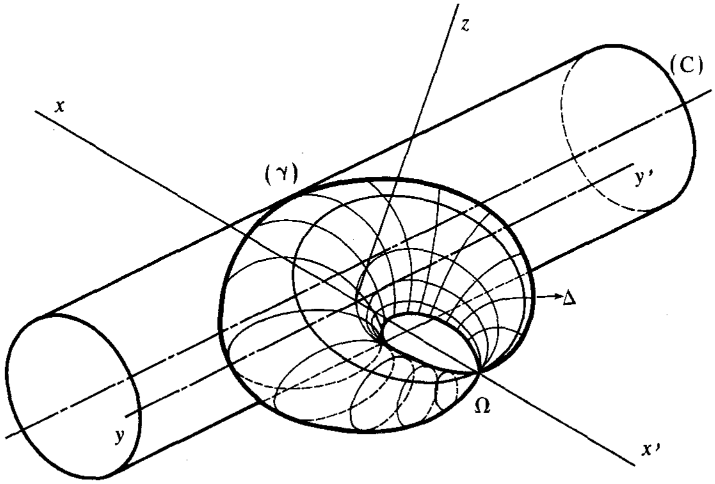
$$x' + \sqrt{2} = \frac{x + \sqrt{2}}{\Delta} \times 4, \qquad y' = \frac{4y}{\Delta}, \qquad z' = \frac{4z}{\Delta}.$$

En divisant l'équation précédente de (Σ) par $\frac{\Delta^2}{4}$ on a

$$4 - 4\sqrt{2}(x' + \sqrt{2}) + (x' + \sqrt{2})^2 + z'^2 = 0, \qquad (x' + \sqrt{2} - 2\sqrt{2})^2 + z'^2 + 4 - 8 = 0$$

$$\boxed{(x' - \sqrt{2})^2 + z'^2 - 4 = 0.}$$

L'inverse de la cyclide de Dupin (Σ) dans l'inversion $\mathscr{I}$ (Ω, 4) est donc le cylindre droit, parallèle à Ox dont la base est l'intersection, privée de Ω, de (Σ) et du plan xOz. Nous avons représenté (Σ) et son cylindre inverse ainsi que les divers éléments intervenant dans le problème dans la figure perspective qui suit.



Cylindre (C) = $\mathscr{I}(\Omega, 4)(\Sigma)$.

FIG. 4. — *Cyclide de Dupin.*

En représentant paramétriquement le cylindre inverse par

$$x' - \sqrt{2} = 2\frac{1 - v^2}{1 + v^2}, \qquad z' = \frac{4v}{1 + v^2}.$$

On peut obtenir une représentation paramétrique de la cyclide :

$$\mathrm{X} + \sqrt{2} = \frac{4x' + \sqrt{2}}{(x' + \sqrt{2})^2 + y'^2 + z'^2}, \qquad \mathrm{Y} = \frac{4y'}{\Delta'}, \qquad \mathrm{Z} = \frac{4z'}{\Delta'}$$

$$\Delta' = (x' + \sqrt{2})^2 + y'^2 + z'^2 = 12 + 8\sqrt{2}\frac{1 - v^2}{1 + v^2} + y'^2$$

et on peut prendre v et y' comme paramètres : plus généralement on peut démontrer que les cyclides ont en coordonnées polysphériques des représentations paramétriques, homogènes du second degré.

7° ***a)*** En donnant à x la valeur zéro dans l'équation de (Σ) on a l'équation de (Γ) :

$$(y^2 + z^2)^2 - 4(1 + y^2) = 0$$

ce qui donne en coordonnées polaires :

$$y = \rho\cos\theta, \qquad z = \rho\sin\theta, \qquad \rho^4 - 4\rho^2\cos^2\theta - 4 = 0.$$

Comme le produit des racines en ρ^2 est -1, seul le signe positif convient

$$\rho^2 = 2\cos^2\theta + 2\sqrt{1 + \cos^4\theta}.$$

Comme le changement θ en $\theta + \pi$ donne ρ changé en $-\rho$ (le même point) Γ est représentée en polaire par

$$\boxed{\rho = +\sqrt{2(\cos^2\theta + \sqrt{1+\cos^4\theta})}.}$$

b) Dans l'équation implicite de (Γ), dérivons par rapport à y on a

$$4(y + zz')(y^2 + z^2) = 8y.$$

$z' = 0$ donne $y(y^2 + z^2 - 2) = 0$ qui dans les deux cas $y = 0$ ou $y^2 + z^2 = 2$ donnent, en reportant dans l'équation de (Γ), les deux points $(0, \pm\sqrt{2})$ où la tangente est parallèle à Oy.

De même en dérivant par rapport à z, la condition $\dfrac{dy}{dz} = 0$ dans

$$\left(y\frac{dy}{dz} + z\right)(y^2 + z^2) - 2y\frac{dy}{dz} = 0$$

donne

$$z(y^2 + z^2) = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow y^4 - 4y^2 - 4 = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2 + 2\sqrt{2}},$$

d'où les points de (Γ) à tangente parallèle à Oz $\boxed{\text{sont } (y = \pm\sqrt{2+2\sqrt{2}},\ z = 0).}$

c) Le rayon de courbure en un point est donné par

$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}.$$

on constate que

$$\rho' = -\rho\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1+\cos^4\theta}},$$

ce qui permet de simplifier le calcul de ρ''

$$\rho'' = \frac{\rho}{(1+\cos^4\theta)\sqrt{1+\cos^4\theta}}(\sin^2\theta\cos^2\theta\sqrt{1+\cos^4\theta} - 1 + 2\sin^2\theta - \cos^4\theta).$$

Le report dans la formule donnant R donne

$$\boxed{R = \rho\frac{(1+\cos^2\theta)^{3/2}}{(1+\cos^2\theta)\sqrt{1+\cos^4\theta} + (\cos^2\theta+1)^2 - 2}}$$

comme $\rho \geqslant 0$ la concavité vers O est donnée lorsque $R \geqslant 0$. Or

$$(1+\cos^2\theta)\sqrt{1+\cos^4\theta} \geqslant 1 \qquad \text{et} \qquad (\cos^2\theta + 1)^2 - 2 \geqslant -1 \qquad \text{donc} \qquad R \geqslant 0$$

$\left(R = +\infty \text{ pour } \theta = \dfrac{\pi}{2}[\pi]\right)\cdot$ La concavité de (Γ) est toujours vers O.

Pour étudier (Γ) on peut étudier sa restriction à $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ puis effectuer une symétrie par rapport à chacun des axes. Dans l'intervalle considéré, comme

$$\rho' = -\frac{\rho\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1+\cos^4\theta}}$$

ρ est décroissant

θ	0		$\dfrac{\pi}{2}$
ρ	$\sqrt{2+8\sqrt{2}} = 2{,}20$ ($\rho' = 0$)	↘	$\sqrt{2} = 1{,}41$ ($\rho' = 0$)

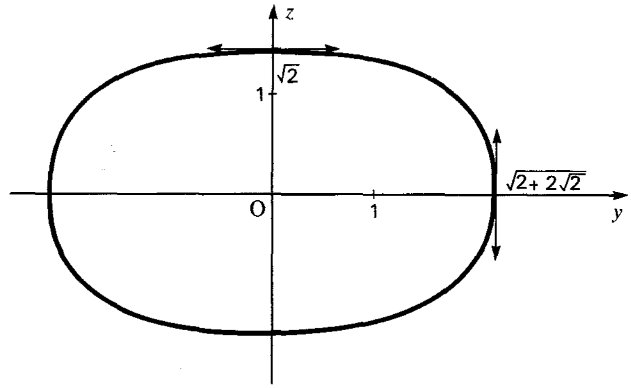


FIG. 5.

II. — 1° *a*) Le carré de la distance des centres des deux sphères est

$$M_1M_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + y_1^2 + z_2^2 = \frac{x_1^2}{2} - 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

est égal au carré de

$$R_1 - \varepsilon R_2 = \frac{x_1}{\sqrt{2}} + 1 - \varepsilon|1 + \sqrt{2}x_2| = \frac{x_1}{\sqrt{2}} + 1 - 1 - \sqrt{2}x_2,$$

ε étant du signe de $x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot$ Donc les deux sphères sont tangentes, intérieurement si $x_2 > -\frac{1}{\sqrt{2}}$, extérieurement si $x_2 < -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot$

b) L'équation normale de (S_2) est $(x - x_2)^2 + y^2 + (z - z_2)^2 - 2x_2^2 - 1 - 2\sqrt{2}x_2 = 0$, ainsi

$$\boxed{G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x_2x - 2z_2z - 2\sqrt{2}x_2 - 2 = 0.}$$

On vérifie que (S_2) contient Ω.

2° L'élimination de dx_2 et dz_2 entre

$$\frac{\partial G}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial G}{\partial z_2}dz_2 = (-2x - 2\sqrt{2})\,dx_2 - 2z\,dz_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad 0 = 2x_2\,dx_2 - 2z_2\,dz_2$$

obtenue par $\begin{vmatrix} -2x - 2\sqrt{2} & -2z \\ 2x_2 & -2z_2 \end{vmatrix} = 0$ donne l'équation de $\boxed{(\pi_2)\ (\sqrt{2} + x)z_2 + x_2z = 0.}$

C'est le plan contenant la droite parallèle à Oy menée par Ω dont la trace sur xOz est de direction symétrique de celle de OM_2, par rapport à Oz.

3° Éliminons x_2 et z_2 entre les équations de (S_2) et π_2. Le système

$$(2) \qquad \begin{cases} 2x_2(x + \sqrt{2}) + 2z_2z = x^2 + y^2 + z^2 - 2 \\ x_2z + z_2(\sqrt{2} + x) = 0 \end{cases}$$

n'est cramérien que si $\sqrt{2} + x \neq \varepsilon z$ et alors l'élimination de

$$x_2 = \frac{(x^2 + y^2 + z^2 - 2)(\sqrt{2} + x)}{2[(\sqrt{2} + x)^2 - z^2]} \qquad \text{et} \qquad z_2 = -\frac{(x^2 + y^2 + z^2 - 2)z}{2[(\sqrt{2} + x)^2 - z^2]}$$

par $1 = x_2^2 - z_2^2$ donne

$$4[(\sqrt{2} + x)^2 - z^2] - (x^2 + y^2 + z^2 - 2)^2 \Rightarrow (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4\left((1 + \sqrt{2}x)^2 + y^2\right).$$

Dans le cas non cramérien le système devient

$$(2') \qquad \begin{cases} 2z(\varepsilon x_2 + z_2) = x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 2z^2 - 2\varepsilon\sqrt{2}z + y^2 \\ z(\varepsilon z_2 + x_2) = 0, \end{cases}$$

compte tenu de $(\varepsilon x_2 - z_2)(\varepsilon x_2 + z_2) = 1$: $(\varepsilon x_2 + z_2) \neq 0$. Le système n'est compatible que si $z = 0$, $y = 0$, $x = -\sqrt{2}$, c'est-à-dire si le point est Ω. Mais ce point vérifie aussi l'équation de (Σ') confondue avec (Σ). En fait le lieu de C_2 est $\boxed{(\Sigma - \Delta - \Delta') \cup \{\Omega\}}$.

4° *a*) M de (Σ) étant donné, le système **I.** — **4°**, étant compatible en x_1, y_1 (condition d'élimination), donne en effet un point M_1 de (Γ_1) et un seul, qui détermine C_1.

Ce résultat est d'ailleurs évident géométriquement sur la figure : les cercles C_1 sont les sections de (Σ) par les plans méridiens pivotant autour de la droite d'équations $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y = 0$.

***b*)** Le point Ω déjà évoqué, convient car ses coordonnées vérifient l'équation de tout plan (π_2) et de toute sphère (S_2).

Le système **II.** — **3°** n'est cramérien que si $(x + \sqrt{2})^2 \neq z^2$ et alors il n'admet qu'une solution en x_2 et z_2 d'où l'unicité du cercle (C_2) contenant un tel point de (Σ). Si par contre $\sqrt{2} + x = \varepsilon z$, le système (2)′ est ou bien indéterminé au point Ω ($x = -\sqrt{2}$, $y = 0$, $z = 0$) ou bien incompatible : pour les points différents de Ω de (Σ) qui vérifient

$$\begin{cases} \varepsilon z = \sqrt{2} + x \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

puisque $\varepsilon z_2 + x_2 = 0$ correspond aux points à l'infini de l'hyperbole (Γ_2).

Sur la figure, les cercles (C_2) sont les intersections de (Σ) et de (π_2). Les cercles Δ et Δ' correspondent au cas où le plan (π_2) est tangent à (Σ) le centre de (S_2) est à l'infini sur l'hyperbole et son rayon est infini, Δ est mis en évidence sur la figure, Δ' est son symétrique par rapport à xOy. Δ et Δ' sont tangents en Ω.

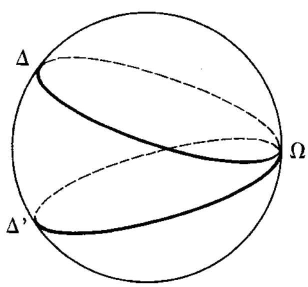


FIG. 6.

5° *a*) D'après **II.** — **1° *a*)** (S_2) est tangente à (S_1) en M leur point commun. Il suffit donc de vérifier que le plan tangent en M à (Σ_0) obtenu par la méthode du gradient à partir du premier membre de l'équation de (Σ) est orthogonal au rayon MM_1 qui d'après **I.** — **4°** compte tenu de

$$2[(1 + \sqrt{2}x)^2 + y^2] = \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{2}$$

est déterminé par

$$M_1\left(x_1 = \frac{(1 + \sqrt{2}x)2\sqrt{2}}{x^2 + y^2 + z^2},\ y_1 = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2},\ z_1 = 0\right), \qquad M_1M \begin{cases} -\dfrac{(1 + \sqrt{2}x)2\sqrt{2}}{x^2 + y^2 + z^2} + x \\ -\dfrac{2y}{x^2 + y^2 + z^2} + y \end{cases}$$

dont les composantes sont proportionnelles au gradient du premier membre de l'équation de (Σ) qui a pour composantes

$$\begin{pmatrix} 4x(x^2 + y^2 + z^2) - 8\sqrt{2}(1 + \sqrt{2}x) \\ 4y(x^2 + y^2 + z^2) - 8y \\ 4z \end{pmatrix}$$

***b*)** La démonstration précédente est encore valable puisque en tout point de (Σ) sauf (Ω) le gradient précédent est non nul.

6° D'après **II.** — **5°** (S_1) est tangente en tout point de (C_1) à (Σ). La normale en M contient donc M_1, sommet d'un cône de révolution dont l'axe est M_1C_1 (C_1 centre de (C_1)). Or, d'après **I.** — **3°**, $M_1C_1\begin{cases}\rho_{C_1}(2y_1)\\ \rho_{C_1}(-x_1)\end{cases}$ est parallèle à $\begin{pmatrix}2y_1\\ -x_1\end{pmatrix}$ donc orthogonal à $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\dfrac{x_1^2}{2}+y_1^2\right)$ qui dirige la normale en M_1 à (Γ_1) : l'axe du cône de révolution, lieu des normales en M à (Σ) le long d'un cercle C_1, est la tangente en M_1 centre de (S_1) à Γ_1.

Les cercles (C_1), puisque les normales à (Σ) le long de (C_1) engendrent une développable, sont des lignes de courbures de (Σ). Le fait que toutes les lignes de courbure d'une surface soient des cercles caractérise les cyclides de Dupin.

Les cyclides de Dupin sont également les surfaces dont les deux nappes de la développées sont réduites à deux courbes (qui sont alors nécessairement des coniques focales). Les cyclides de Dupin sont également les enveloppes de sphères tangentes à trois sphères fixes. Ce sont des inverses de cônes, cylindres ou tores tous de révolution.

On peut démontrer que les cyclides en général, dont les cyclides de Dupin font partie, contiennent six familles de cercles : deux cercles d'une même famille n'étant (comme les génératrices rectilignes d'une quadrique propre... on peut d'ailleurs se ramener aux quadriques : les cyclides étant les quadriques projectives de l'espace S(E) des sphères...) jamais sécants, deux cercles de deux familles différentes étant *paratactiques*, c'est-à-dire faisant un angle constant en leurs intersections.

Les tores sont des cas particuliers de cyclides, il y a alors confusion de certaines familles de cercles : il n'y en a que quatre, méridiens, parallèles et les deux familles de Villarceau : ces deux familles étant bien *paratactiques*, comme le lecteur pourra le vérifier. Il y a au plus 16 droites sur une cyclide.

Le cas écarté dans l'énoncé, correspond au cas où (S_1) est de rayon nul.

III. — **1°** Écrivons les équations des trois sphères :

$$\begin{array}{ll}(S_1) & x^2+y^2+z^2-2\sqrt{2x}-2=0\\ (S_1') & x^2+y^2+z^2-2y=0\\ (S_1'') & x^2+y^2+z^2+2y=0\end{array}$$

En retranchant les premiers membres de (S_1') et (S_1'') on obtient $y=0$ donc $(S_1')\cap(S_1'')=\{0\}$ qui n'est pas sur (S_1) par conséquent

$$\boxed{(S_1)\cap(S_1')\cap(S_1'')=\varnothing.}$$

2° La tangente à un cercle est dans son plan or les trois rayons tangents contiennent M_1, M_1', M_1''. Le plan d'un cercle éventuel répondant à la question ne peut être que le plan M_1, M_1', M_1'' c'est-à-dire (xOy).

Les cercles $\begin{array}{l}(S_1)\cap(xOy)\\ (S_1')\cap(xOy)\\ (S_1'')\cap(xOy)\end{array}$ ont pour équation

$$\begin{array}{l}x^2+y^2-2\sqrt{2x}-2=0\\ x^2+y^2-2y=0\\ x^2+y^2+2y=0.\end{array}$$

L'unicité de (C) provient de ce qu'il doit appartenir à deux faisceaux conjugués de lignes des centres concourantes ou encore analytiquement, la condition d'orthogonalité de deux cercles d'équations respectives

$$x^2+y^2-2ax-2by+d=0,\quad x^2+y^2-2a'x-2b'y+d'=0$$

étant $2aa'+2bb'=d+d'$, le système exprimant l'orthogonalité avec les trois cercles précédents

$$\begin{cases}2a\sqrt{2}=-2+d\\ 2b=d\\ -2b=d\end{cases}$$

admet la solution unique $a=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $d=0$, $b=0$. Le cercle cherché est le cercle d'équation $x^2+y^2+\sqrt{2}x=0$,

$$\boxed{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{2}\cdot}$$

3° Les formules analytiques de l'inversion I(0, 1) sont

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad y' = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad z' = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

divisons les deux membres de l'équation des sphères considérées par $x^2 + y^2 + z^2$ on obtient les équations de leurs images $y' = \frac{1}{2}$, $y'' = -\frac{1}{2}$ pour (S'_1) et (S''_1). Pour (S_1) comme $x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$ on obtient

$$1 - 2\sqrt{2}\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{2}{x^2 + y^2 + z^2} = 0.$$

L'image de (S_1) est donc la sphère

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + \sqrt{2}x' - \frac{1}{2} = 0, \qquad \boxed{\left(x' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + y'^2 + z'^2 - 1 = 0.}$$

L'inversion étant anticonforme, l'inverse de C dans l'inversion considérée, qui est d'ailleurs (en divisant par $x^2 + y^2$) la droite d'équation $1 + \sqrt{2}x' = 0$ rencontre orthogonalement les plans $y =$ Cte et la sphère image de (S_1) dont elle est un diamètre.

4° (Σ) a pour équation $(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 4(1 + 2\sqrt{2}x + 2x^2 + y^2) = 0$. En utilisant les formules de l'inversion et le fait que $x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$ on obtient, en divisant par $(x^2 + y^2 + z^2)^2$, l'équation de (Σ'')

$$0 = 1 - 4((x'^2 + y'^2 + z'^2)^2 + 2\sqrt{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2)x' + 2x'^2 + y'^2)$$

qui étant de la forme $1 - 4[(x'^2 + y'^2 + z'^2 + \sqrt{2}x')^2 + y'^2] = 0$ est bien une surface de révolution dont l'axe est la droite menée du centre de la sphère d'équation $x'^2 + y'^2 + z'^2 + \sqrt{2}x' = 0$ au plan d'équation $y' = 0$. L'axe est donc la droite (D) d'équations $\boxed{x = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ z = 0.}$

Soit directement sur son équation, soit en la considérant comme enveloppe des sphères tangentes aux plans $y = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$ et à la sphère (S''_1), on reconnaît que (Σ'') est le *tore à collier nul*, engendré par la rotation autour de l'axe $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $z = 0$ du cercle qui lui est tangent, situé dans le plan méridien $z = 0$: $\left(x + \frac{\sqrt{2} - 1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ obtenu par la méthode de factorisation de Villarceau.

On constate que les sphères tangentes extérieurement à (S''_1) et aux plans $y = +\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$ enveloppent un tore ouvert Σ''' de même axe dont il serait intéressant d'interpréter la cyclide inverse en cherchant son lien avec (Σ).

Les sections orthogonales de (Σ'') par les plans orthogonaux à (D) sont les cercles d'équations

$$\begin{cases} y = \lambda \\ (x^2 + y^2 + z^2 + \sqrt{2}x)^2 = \frac{1}{4} - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda \\ x^2 + \lambda^2 + z^2 + \sqrt{2}x = \varepsilon\sqrt{\frac{1}{4} - \lambda^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda \\ \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + z^2 + \lambda^2 - \frac{1}{2} = \varepsilon\sqrt{\frac{1}{4} - \lambda^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda \\ \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{1}{2} - \lambda^2 + \varepsilon\sqrt{\frac{1}{4} - \lambda^2}. \end{cases}$$

Le volume V de (Σ'') est donc donné par $V = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \zeta(\lambda)\, d\lambda$ où $\zeta(\lambda)$ est l'aire de la couronne comprise entre les deux cercles précédents.

$$\zeta(\lambda) = \pi\left[\frac{1}{2} - \lambda^2 + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda^2} - \left(\frac{1}{2} - \lambda^2 - \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda^2}\right)\right] = 2\pi\sqrt{\frac{1}{4} - \lambda^2}.$$

Posons $\lambda = \frac{1}{2}\sin\theta$;

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} 2\pi \frac{1}{2}\cos\theta \frac{1}{2}\cos\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{4}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}.$$

On aurait pu établir ce résultat par le théorème de Guldin

$$\boxed{V = \left(\pi\frac{1}{4}\right) \times \left(2\pi\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}.}$$

(Σ) est donc inverse dans deux inversions de centres différents, d'un cylindre de révolution et d'un tore à collier nul.

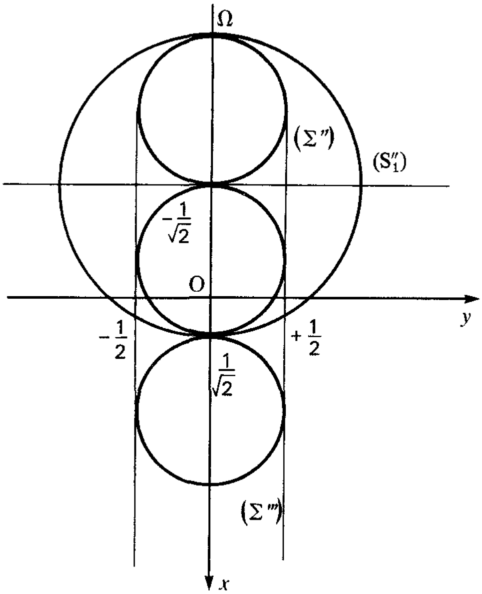


FIG. 7.

Bibliographie :

Georges VALIRON, *Équations fonctionnelles*, Masson, 2e édition 1950, pages 479-480.
Jean FAVARD, *Cours de géométrie différentielle locale*, Gauthiers Villars, 1956, page 348.
Marcel BERGER, *Géométrie 5*, CEDIC, 1979, pages 137 à 139, tome 2, page 196.
Marcel BERGER, *Problèmes de géométrie*, page 251 à 258.
Gaston DARBOUX, *Principes de géométrie analytique*, Gauthiers Villars, 1917, pages 405 à 505.
Paul ROBERT, *Brochure APM n° 2, Congruence paratactiques de CYCLES*, pages 46-48.
Gaston JULIA, *Exercices de géométrie infinitésimale*, Gauthiers Villars, 1952, pages 309 à 314.
oeuvres T1 p80 application de l'arithmétique

- Centrale 86 ... Bual LGV + RMS mai 87