96^e année (1985-1986) Juin 1986 - Mensuel n° 10

Revue de Mathématiques Spéciales

16 pages. p 967-982

Limites et équivalents de fonctions définies par des intégrales (ou séries) dépendant de paramètres

$$\int_{u(t)}^{v(t)} f(t, x)\,\mathrm{d}x.$$

par L. G. Vidiani, professeur en Mathématiques spéciales au lycée Carnot de Dijon.

Les méthodes d'intégration des relations de comparaison figurent dans tous les bons cours de Mathématiques spéciales. Sont également bien connues des taupins, les méthodes de changement de variable $\left(\text{du type } x = bt \text{ dans } \int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{b^n - x^n}},\right.$ $b > 0)$ pour obtenir une limite ou un équivalent en $n = +\infty$, ou le théorème de Riemann de comparaison d'une série et d'une intégrale qui permet bien souvent de trouver un équivalent de la somme partielle de rang n, d'une série divergente, ou du reste d'une série convergente.

Mais, depuis 1974, sont proposés aux oraux des concours des Grandes écoles scientifiques, des exercices dont le thème principal est de déterminer l'équivalent en une valeur adhérente t_0 de $\overline{\mathbb{R}}$ d'un paramètre, t ou n (on peut se limiter à t appartenant à $\mathbb{R}$ puis faire $t = n$ dans les exemples qui suivent), d'une intégrale (ou de la somme d'une série) d'une fonction dépendant de ce paramètre, et où ces méthodes classiques ne s'appliquent pas directement, les bornes pouvant également dépendre de ce paramètre.

Le manque d'une justification d'un point de départ logique et d'un appel à un indice, si ténu soit-il, pour étayer l'intuition d'un procédé, en un mot l'absence d'une méthode générale font penser à l'empirisme du physicien ou au somnambulisme pincé du littéraire.

Le but de cet article est de donner quelques directions possibles. Il ne faut bien sûr pas oublier de vérifier la convergence des intégrales ou séries. Dans chaque exemple nous supposerons que cela a été déjà fait.

Par quelques exemples significatifs, il propose d'illustrer les différentes méthodes qui permettent de traiter la généralité des exercices proposés à l'oral.

Rappelons seulement pour mémoire les procédés

- ou tellement classiques qu'ils sont connus de tous :

— permutation (justifiée) de limite et d'intégrale $\left(\text{ou de } \sum_0^{\infty}\right)$ [1];

— intégration des relations de comparaison [1] et [2], page 437;

— équivalent de la différence (par développement limité de Taylor) entre intégrale et somme de Riemann pour un équi-partage;

— intégrale de Frullani [3], page 94, [4], page 116;

— critère f'/f, [2], page 443;

— théorème de Dirichlet : $\lim \int_a^b g(x)f(nx)\,\mathrm{d}x$ où f est périodique (commencer par g palier, puis escalier, puis intégrable...);

- ou purement techniques :

— calcul effectif de l'intégrale ou reconnaissance parmi les solutions d'une équation différentielle;

— théorème de la moyenne;

— majoration (ex. :

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{x^3}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{3n^3} - \frac{\pi^2}{2n^2} + \frac{\pi}{n} - \operatorname{Log}\left(1 + \frac{\pi}{n}\right)\Bigg)$$

de la différence avec la limite ou l'équivalent;

— Chasles et théorème des séries oscillantes.

Ces méthodes sont en effet tellement caractérisées que leur emploi est évident dans la forme même de l'intégrale proposée.

Les méthodes suivantes, moins générales ont cependant l'avantage que leur choix (plusieurs méthodes peuvent convenir, bien sûr, pour une même intégrale, et nous le signalerons) est généralement évident dans la forme de l'intégrale proposée. Il s'agit des techniques suivantes :

– calcul récurrent et domination éventuelle;
– changement de variable;
– intégration par parties;
– scission par Chasles (cette méthode est la planche de salut dans les cas désespérés (qui sont aussi les plus beaux...). Elle est d'ailleurs utilisée pour démontrer la méthode de Laplace;
– la méthode de Laplace prémisse ou préliminaire au calcul symbolique et aux problèmes de distribution de masse;
– méthode de l'équation fonctionnelle ou différentielle;
– majoration de la différence entre l'intégrale et son équivalent supposé (trouvé par exemple par permutation non justifiée de limite et intégrale).

Les propriétés utilisées de $\int$ et $\sum$, relation de Chasles, linéarité, positivité étant les mêmes, les méthodes sont exactement les mêmes pour les séries d'autant que par l'intermédiaire de la fonction associée u^* on peut écrire

$$\sum_0^{\infty} u_n(t) = \int_0^{\infty} u^*(x, t)\, dx.$$

De plus le théorème de comparaison de série et d'intégrale, permet souvent de ramener le cas série au cas intégral, car ce théorème est encore valable lorsque des paramètres interviennent (voir par exemple son utilisation pour la série $\Sigma r(n)t^n$ où $r(n)$ est le nombre de solutions entières de l'équation $x^2 + y^2 = n$).

Nous ne détaillerons donc pas les procédés pour les séries. Nous nous contenterons de donner quelques exemples bien caractéristiques, quelques procédés particuliers aux séries et remarquerons, que dans le cas particulier de séries entières les techniques démontrées dans le cas intégral, permettent de déterminer le rayon de convergence, voire la convergence sur le cercle de convergence de séries entières $u_n t^n$ dont le coefficient u_n est une intégrale.

Calcul récurrent.

Deux exemples classiques permettent de dégager une idée de méthode

$$f_n(t) = \int_1^t \frac{dx}{x^n\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Posons $I_n = f_n(+\infty)$;

$$f_n(t) - f_{n+2}(t) = \int_1^t \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^{n+2}}\, dx.$$

Une intégration par parties avec

$$u = \sqrt{x^2 - 1}, \qquad dv = x^{-n-2}\, dx$$

donne

$$f_n(t) - f_{n+2}(t) = \left[\frac{-\sqrt{x^2-1}}{(n+1)x^{n+1}}\right]_1^t + \frac{1}{n+1}\int_1^t \frac{dx}{x^n\sqrt{x^2-1}}$$

$$= -\frac{\sqrt{t^2-1}}{(n+1)t^{n+1}} + \frac{f_n(t)}{n+1}$$

$$f_{n+2}(t) = \frac{n}{n+1} f_n(t) + \frac{\sqrt{t^2-1}}{(n+1)t^{n+1}},$$

d'où

$$I_{n+2} = \frac{n}{n+1} I_n.$$

I_n étant décroissante, pour montrer qu'elle tend vers zéro, il suffit de se limiter à $n = 2p$. Posons $J_p = I_{2p}$ et $u_p = \frac{1}{\sqrt[3]{p}}$; on a

$$\frac{J_{p+1}}{J_p} = \left(1 + \frac{1}{2p}\right)^{-1} = 1 - \frac{\left(1 + o\left(\frac{1}{p}\right)\right)}{2p}$$

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} = 1 - \frac{1 + o\left(\frac{1}{p}\right)}{3p}.$$

Pour p assez grand, $\frac{J_{p+1}}{J_p} < \frac{u_{p+1}}{u_p}$; il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $J_p < ku_p$ donc J_p et I_{2p} tendent vers zéro avec $\frac{1}{p}$.

Le changement de variable $x = \frac{1}{\sin u}$ dans I_n permet de constater que I_n est l'intégrale de Wallis, W_{n-1}, ce qui nous permettra ultérieurement de préciser ce résultat, soit directement sur I_n ou W_n par la méthode de Laplace soit en scindant et en écrivant

$$I_n = \int_1^{1+h} + \int_{1+h}^{\infty} < \int_1^{1+h} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} + \int_{1+h}^{\infty} \frac{dx}{x(1 + h)^{n-1}}.$$

Comme deuxième exemple

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}\, dx.$$

Les formules trigonométriques donnent :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin (2n + 1) \sin x}{\sin^2 x}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin (2n + 1)x}{\sin x}\, dx$$

$$(I_{n+2} - I_{n+1}) - (I_{n+1} - I_n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos 2(n + 1)x\, dx = 0$$

donc $$I_{n+1} - I_n = I_1 - I_0 = \frac{\pi}{2},$$

$$I_n = n\frac{\pi}{2}.$$

Changement de variable.

Si le changement de variable à utiliser est souvent évident, cette méthode doit souvent être coordonnée avec d'autres pour conduire aux résultats voulus.

Exemple 1 :

$$I(t) = \int_0^\infty x^\alpha e^{-ctx^\beta}\,dx$$

avec $\beta > 0$, $\alpha > -1$ et $c > 0$, donne avec le changement de variable $X = ctx^\beta$,

$$x^\beta = \frac{X}{ct}, \qquad x = \frac{X^{\frac{1}{\beta}}}{c^{\frac{1}{\beta}}t^{\frac{1}{\beta}}},$$

$$dx = \frac{1}{\beta}\frac{1}{c^{\frac{1}{\beta}}t^{\frac{1}{\beta}}}X^{\frac{1}{\beta}-1}\,dX$$

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_0^{+\infty} \frac{X^{\frac{\alpha}{\beta}}}{c^{\frac{\alpha}{\beta}}t^{\frac{\alpha}{\beta}}} e^{-X}\frac{1}{\beta}\frac{1}{c^{\frac{1}{\beta}}t^{\frac{1}{\beta}}}X^{\frac{1}{\beta}-1}\,dX \\ &= (ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}\frac{1}{\beta}\int_0^\infty X^{\left(\frac{\alpha+1}{\beta}-1\right)}e^{-X}\,dX \\ &= \frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)(ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}, \end{aligned}$$

où Γ est le symbole de la fonction eulérienne gamma.

Pour tout A strictement positif, comme ct A tend vers plus l'infini avec t, on a

$$\int_0^A x^\alpha e^{-ctx^\beta}\,dx \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)(ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}.$$

Cet exemple nous servira au moment de la méthode de Laplace.

Exemple 2 :

$$I(t) = \int_{-t}^{+t}\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(t^2-x^2)}}$$

effectuons le changement de variable $x = tX$ pour fixer les bornes :

$$I(t) = \int_{-1}^{+1}\frac{dX}{\sqrt{(1-X^2)(1+t^2X^2)}}$$

comme

$$\forall X \in [-1, +1], \quad 1 \leqslant \sqrt{1+t^2X^2} \leqslant \sqrt{1+t^2}$$

on a

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}I(0) \leqslant I(t) \leqslant I(0) = \pi$$

donc $I(t) \to \pi$ pour t tendant vers zéro.

Exemple 3 :

$$I(n) = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt[n]{a^n - x^n}}.$$

Le changement $x = aX$ donne

$$I(n) = \int_0^1 \frac{dX}{\sqrt[n]{1-X^n}}$$

et, pour tout a de $]0, 1[$, par Chasles on a

$$\begin{aligned} I(n) - 1 = &\int_0^a \left(\frac{1}{\sqrt[n]{1-X^n}} - 1\right)dX \\ &+ \int_a^1 \left(\frac{1}{\sqrt[n]{1-X^n}} - 1\right)dX. \end{aligned}$$

La deuxième intégrale est généralisée, convergente en -1, et pour tout epsilon strictement positif il existe a_0 indépendant de n de $]0, 1[$ tel que

$$\left|\int_{a_0}^1 \left(\frac{1}{\sqrt[n]{1-X^n}} - 1\right)dX\right| < \varepsilon.$$

L'application $X \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[n]{1-X^n}}$ étant croissante, on a

$$0 < \int_0^{a_0}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{1-X^n}} - 1\right)dX < a_0\left(\frac{1}{\sqrt[n]{1-a_0^n}} - 1\right).$$

Or $\dfrac{1}{\sqrt[n]{1-a_0^n}}$ tend vers 1 quand n tend vers plus l'infini (car égal à $e^{-\frac{1}{n}\operatorname{Log}(1-a_0^n)}$). Il existe donc n_0 de $\mathbb{N}$ tel que, pour tout n supérieur strictement à n_0, on ait

$$\left|\int_0^{a_0}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{1-X^n}} - 1\right)dX\right| < \varepsilon$$

donc $$\lim_{+\infty} I(n) = 1.$$

De même, pour $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2}}$ le changement de variable $x = n \operatorname{tg} X$ ramène à une intégrale de Wallis.

Exemple 4 :

$$I(t) = \int_1^t \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(t-x)}}$$

pour t tendant vers $1 + 0$.

Le changement de variable affine

$$x = (t-1)X + 2 - t$$

donne, en fixant les bornes,

$$I(t) = \int_1^2 \frac{dX}{\sqrt{(2-X)(X-1)[(t-1)X+2-t]}}.$$

Or $I(1) = \pi$ $\left(\text{poser } X = \dfrac{3+\cos\theta}{2}\right)$ et

$$I(1) - I(t) = \int_1^2 \frac{dX}{\sqrt{(X-1)(2-X)}}\left[\frac{-1+\sqrt{(t-1)X+2-t}}{\sqrt{(t-1)X+2-t}}\right].$$

On majore le crochet en remplaçant X par 2 au numérateur et par 1 au dénominateur :

$$0 < I(1) - I(t) < \pi(\sqrt{t} - 1)$$

qui tend vers zéro avec $t - 1$.

On verra aussi l'exemple deux de la méthode de scission.

Intégration par parties.

Cette méthode est très rapide quand elle est utilisable, et réitérée peut donner un développement asymptotique.

Le crochet de variation donne un équivalent facile lorsque l'intégrale du deuxième membre est négligeable devant ce crochet.

Exemple 1 :

$$I(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^t}\,dx;$$

posons $x = \dfrac{1}{X}$,

$$I(t) = \int_0^\infty X^{t-2}e^{-X}\,dX \geqslant J(t) = \int_1^{+\infty} X^{t-2}e^{-X}\,dX.$$

Comme $(t' > t > 2)$ et $X > 1$ impliquent

$$X^{t-2}e^{-X} < X^{t'-2}e^{-X},$$

J est croissante et une intégration par parties donne

$$J(t+1) > (t-1)J(t)$$

donc

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{J(t+1)}{J(t)} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} J(t) = +\infty,$$

puis $\qquad \lim\limits_{t\to+\infty} I(t) = +\infty.$

Exemple 2 :

$$I(t) = \int_t^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{e^{-t^2}}{2t} - \frac{1}{2}\int_t^{+\infty} e^{-x^2}\frac{dx}{x^2}$$

et une nouvelle intégration par parties donne

$$\int_t^{+\infty} e^{-x^2}\frac{dx}{x^2} = \frac{e^{-t^2}}{2t}\left[\frac{1}{2t^2} - \frac{3}{2}te^{t^2}\int_t^{+\infty}\frac{e^{-x^2}}{x^4}\,dx\right] = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{e^{-t^2}}{t}\right)$$

car $\displaystyle\int_t^{+\infty} e^{-x^2}\frac{dx}{x^4} < \frac{e^{-t^2}}{t}$ pour $t \geqslant 1$. Par suite

$$I(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-t^2}}{2t}.$$

Exemple 3 :

$$I(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}\,dx = 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx \cos nx}{\operatorname{tg} x}\,dx = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx}{\operatorname{tg} x}\,dx.$$

$$\frac{I(n)}{n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx}{x}\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x \operatorname{tg} x}\sin 2nx\,dx$$

qui par Dirichlet tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ donc $I(n) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n\pi}{2}$.

Exemple 4 : La même méthode d'intégration par parties donne par des calculs analogues à l'exemple 2

$$\int_e^t \operatorname{Log}(\operatorname{Log} x)\,dx \underset{+\infty}{\sim} t \operatorname{Log}\operatorname{Log} t$$

et

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{x}}\,dx \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-t}}{t}$$

et

$$\int_0^b \sin x e^{it\sin x^2}\,dx \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{it}\frac{\sin b}{2b\cos b}e^{it\sin b^2} - \frac{1}{2it}.$$

Ce dernier exemple étant pour b dans $\left]0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right[$.

La méthode d'intégration par parties conduit souvent au résultat lorsqu'on connaît le comportement de $f'(x)/f(x)$ au voisinage de t_0.

Méthode de la scission (1920).

Par Chasles on s'est préalablement ramené à une intégrale éventuellement une seule fois impropre.

L'idée consiste à séparer la borne litigieuse (soit parce que l'intégrale y est impropre, soit que ce soit elle qui crée l'indétermination ou l'accumulation de masse pour le passage à la limite) afin qu'un des termes soit négligeable, au voisinage de t_0 devant l'autre dont un équivalent ou la limite est facilement calculable éventuellement par une des autres méthodes dont j'ai donné la liste au début de l'article.

Exemple 1 : Déjà vu lors de la première méthode :

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n\sqrt{x^2-1}} = \int_1^{1+h} \frac{dx}{x^n\sqrt{x^2-1}} + \int_{1+h}^{+\infty} \frac{dx}{x^n\sqrt{x^2-1}}$$

pour tout h positif.

$$I_n \leqslant \int_1^{1+h} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} + \int_{1+h}^{+\infty} \frac{dx}{(1+h)^{n-1}x\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \operatorname{Log}(1 + h + \sqrt{h^2+2h}) + \frac{1}{(1+h)^{n-1}}\operatorname{Arc\,sin}\left(\frac{1}{1+h}\right)$$

dont la limite est bien zéro lorsque n tend vers l'infini.

Exemple 2 :

$$\mathrm{I}(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}\,dx$$
$$= \int_0^a + \int_a^{+\infty} < \int_0^a \frac{dx}{1+x^2} + e^{-ta^2}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctg}\, a\right).$$

On peut choisir $a > 0$ tel que Artg $a < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ donné quelconque) et il existe alors A tel que

$$\forall t > \mathrm{A}, \quad e^{-ta^2}\frac{\pi}{2} < \varepsilon$$

alors

$$\lim_{\infty} \mathrm{I}(t) = 0.$$

Le changement de variable $\mathrm{X} = \sqrt{t}x$ donne

$$\sqrt{t}\mathrm{I}(t) = \int_0^{\infty} e^{-\mathrm{X}^2}\frac{t}{t+\mathrm{X}}\,d\mathrm{X}$$

et un calcul plus poussé donne plus précisément

$$\mathrm{I}(t) \sim \sqrt{\frac{\pi}{t}} \times \frac{1}{2}$$

résultat que l'on pourrait établir directement par la méthode de Laplace.

Exemple 3 :

$$\mathrm{I}_n = \int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,dx$$

Le changement $\mathrm{X} = x^n$ donne

$$n\mathrm{I}_n = \int_1^{+\infty} \mathrm{X}^{\frac{1}{n}}\frac{e^{-\mathrm{X}}\,d\mathrm{X}}{\mathrm{X}}.$$

En posant $\mathrm{K} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\mathrm{X}}}{\mathrm{X}}\,d\mathrm{X}$, on a pour $\mathrm{A} > 1$

$$0 < n\mathrm{I}_n - \mathrm{K} < \int_1^{\mathrm{A}} (\mathrm{X}^{\frac{1}{n}} - 1)\frac{e^{-\mathrm{X}}}{\mathrm{X}}\,d\mathrm{X} + \int_{\mathrm{A}}^{+\infty} (\mathrm{X}^{\frac{1}{n}} - 1)\frac{e^{-\mathrm{X}}}{\mathrm{X}}\,d\mathrm{X}$$
$$< (\mathrm{A}^{\frac{1}{n}} - 1)\int_1^{\mathrm{A}} d\mathrm{X} + \int_{\mathrm{A}}^{+\infty} e^{-\mathrm{X}}\,d\mathrm{X}.$$

Ainsi $0 < n\mathrm{I}_n - \mathrm{K} < (\mathrm{A}-1)(\mathrm{A}^{\frac{1}{n}} - 1) + e^{-\mathrm{A}}$. Le choix de A puis de n montre que $\mathrm{I}_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{K}}{n}$.

Exemple 4 : f étant continue sur $[0, 1]$:

$$\mathrm{I}_n = n\int_0^1 x^n f(x)\,dx.$$

L'accumulation de masse se produit en $x = 1$, d'autre part I_n dépendant linéairement de f on peut se ramener à une fonction nulle en 1 par remplacement de f par $f - f(1)$:

$$\mathrm{I}_n(f) - \mathrm{I}_n(f(1)) = \mathrm{I}_n(f) - \frac{n}{n+1}f(1)$$
$$= n\int_0^1 x^n(f(x) - f(1))\,dx.$$

Pour tout epsilon de $\mathbb{R}^{+*}$, la continuité de f en 1 donne l'existence de $h \in]0, 1[$ tel que

$$\forall x \in [1-h, 1], \ |f(x) - f(1)| < \varepsilon$$

$$|\mathrm{I}_n(f) - \mathrm{I}_n(f(1))| \leqslant 2 \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|n\int_0^{1-h} x^n\,dx + \varepsilon\frac{n}{n+1}(1 - (1-h)^{n+1})$$
$$\leqslant 2 \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|(1-h)^{n+1} + \varepsilon.$$

Comme pour h fixé de $]0, 1[$, $(1-h)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ on a

$$\mathrm{I}_n(f) \underset{n\to+\infty}{\to} f(1) = \lim \mathrm{I}_n[f(1)].$$

Si $f(1) \neq 0$, $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,dx \sim \frac{f(1)}{n}$.

Ce résultat ne peut se retrouver directement par la méthode de Laplace « courante » car $\left(\dfrac{dx}{dx}\right)_{x=1} \neq 0$.

Exemple 5 : Étudier $\displaystyle\lim_{t\to 1^-} f(t)$.

$$f(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - t\cos^2 x}}.$$

On constate que $f(1)$ est divergente à cause de la borne $x = 0$.

Le changement de variable $\mathrm{X} = \mathrm{tg}\, x$ donne

$$f(t) = \int_0^{+\infty} \frac{d\mathrm{X}}{\sqrt{(1+\mathrm{X}^2)(1-t+\mathrm{X}^2)}}$$
$$\geqslant \int_0^1 \frac{d\mathrm{X}}{\sqrt{(1+\mathrm{X}^2)(1-t+\mathrm{X}^2)}}$$

$$f(t) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{d\mathrm{X}}{\sqrt{1-t+\mathrm{X}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{Arg\,sh}\frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

d'où

$$\lim_{+\infty} f(t) = +\infty.$$

En outre

$$f(t) = \int_0^1 \frac{d\mathrm{X}}{\sqrt{(1+\mathrm{X}^2)(1-t+\mathrm{X}^2)}} + \int_1^{+\infty} \frac{d\mathrm{X}}{\sqrt{(1+\mathrm{X}^2)(1-t+\mathrm{X}^2)}}.$$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} = o\left(\int_0^1\right)$ puisque

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{d\mathrm{X}}{\mathrm{X}^2} = 1$$

et $\lim_{1} \int_0^1 \frac{dX}{\sqrt{(1+X^2)(1-t+X^2)}} = +\infty$

donc

$$f(t) \underset{t=1}{\sim} \int_0^1 \frac{dX}{\sqrt{(1+X^2)(1-t+X^2)}}.$$

Il y a accumulation de masse pour $t = 1$, $X = 0$, et au voisinage de la borne litigieuse $X = 0$, la fonction sous le signe somme équivaut à $\frac{1}{\sqrt{1-t+X^2}}$, il est donc naturel d'étudier :

$$\left| f(t) - \int_0^1 \frac{dX}{\sqrt{1-t+X^2}} \right|$$

$$= \int_0^1 \frac{X^2\, dX}{(1+\sqrt{1+X^2})\sqrt{(1+X^2)(1-t+X^2)}}$$

$$\leqslant \int_0^1 \frac{X^2\, dX}{\sqrt{1-t+X^2}} \leqslant \int_0^1 X\, dX = \frac{1}{2} = o(f(t)).$$

Par conséquent

$$f(t) \underset{1_-}{\sim} \int_0^1 \frac{dX}{\sqrt{1-t+X^2}} = \operatorname{Arg\,sh} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

$$= \operatorname{Log}\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}} + \sqrt{\frac{1}{1-t} + 1} \right)$$

et donc $f(t) \underset{1_-}{\sim} \operatorname{Log} \frac{1}{\sqrt{1-t}} = -\frac{1}{2} \operatorname{Log}(1-t)$.

Exemple 6 : L'idée des calculs de cet exemple (exercice d'oral n° 108, Revue de Mathématiques spéciales 1984-1985) m'a été donné par Monsieur Carpentier.

$$I(t) = \int_2^{+\infty} \frac{\cos 2\pi x t}{x \operatorname{Log} x}\, dx.$$

Nous voulons un équivalent en $t = 0$. Le changement de variable évident $X = xt$ donne

$$I(t) = \int_{2t}^{+\infty} \frac{\cos 2\pi X}{\operatorname{Log} \frac{X}{t}} \frac{dX}{X}.$$

Supposons $t \in \left]0, \frac{1}{8}\right[$ (on étudie $I(t)$ pour t tendant vers zéro). La scission par Chasles donne

$$I(t) = \int_{2t}^{\frac{1}{4}} + \int_{\frac{1}{4}}^{+\infty}.$$

A cause du théorème des séries oscillantes, puis une majoration grossière on a

$$\left| \int_{\frac{1}{4}}^{\infty} \frac{\cos 2\pi X}{\operatorname{Log} \frac{X}{t}} \frac{dX}{X} \right| \leqslant \left| \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{\cos 2\pi X}{\operatorname{Log} X - \operatorname{Log} t} \frac{dX}{X} \right|$$

$$\leqslant \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{\frac{1}{4}} \times \frac{1}{-\operatorname{Log} t} = \frac{2}{|\operatorname{Log} t|} \to 0.$$

De même

$$\int_{2t}^{\frac{1}{4}} \frac{\cos 2\pi X\, dX}{\operatorname{Log} X - \operatorname{Log} t} \frac{dX}{X}$$

$$= \int_{2t}^{\frac{1}{4}} \frac{\cos 2\pi X - 1}{\operatorname{Log} X - \operatorname{Log} t} \frac{dX}{X} + \int_{2t}^{\frac{1}{4}} \frac{dX}{(\operatorname{Log} X - \operatorname{Log} t) X}.$$

Car nous avons remarqué que $\int_0^{\frac{1}{4}}$ et $I(0)$ divergent et ceci incite à faire intervenir la valeur en zéro (borne litigieuse).

• Comme $1 - \cos \alpha \leqslant \frac{\alpha^2}{2}$. La première intégrale est majorée en valeur absolue par

$$\int_{2t}^{\frac{1}{4}} \frac{4\pi^2 X^2}{2X(\operatorname{Log} X - \operatorname{Log} t)}\, dX$$

$$= 2\pi^2 \int_{2t}^{\frac{1}{4}} \frac{X\, dX}{\operatorname{Log} X - \operatorname{Log} t}$$

$$\leqslant 2\pi^2 \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dX}{-\operatorname{Log} t} = \frac{\pi^2}{2|\operatorname{Log} t|} \to 0.$$

• La seconde intégrale devient par le changement de variable $Y = \operatorname{Log} X$:

$$\int_{2t}^{\frac{1}{4}} \frac{dX}{(\operatorname{Log} X - \operatorname{Log} t) X} = \int_{\operatorname{Log} 2t}^{\operatorname{Log} \frac{1}{4}} \frac{dY}{Y - \operatorname{Log} t}$$

$$= \Big[\operatorname{Log} |Y - \operatorname{Log} t| \Big]_{\operatorname{Log} 2t}^{\operatorname{Log} \frac{1}{4}}$$

soit

$$\int_{2t}^{\frac{1}{4}} \frac{dX}{(\operatorname{Log} X - \operatorname{Log} t) X}$$

$$= \operatorname{Log}\left(\operatorname{Log} \frac{1}{4} - \operatorname{Log} t \right) - \operatorname{Log} \operatorname{Log} 2 \sim \operatorname{Log} |\operatorname{Log} t|.$$

En regroupant on a donc

$$I(t) \underset{t=0}{\sim} \operatorname{Log} |\operatorname{Log} t|.$$

On montrerait de même (et aussi par Laplace) que

$$\int_0^1 (t^n - t^{n+1}) f(t) n^2\, dt$$

tend vers $f(1)$ pour n tendant vers plus l'infini. Et aussi, en faisant intervenir la moyenne arithmético-géométrique de Gauss que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\cos^2 x + t^2 \sin^2 x}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\operatorname{Log} t}{t}$$

et donc

$$\operatorname{mag}(1, t) \sim \frac{\pi}{2} \frac{t}{\operatorname{Log} t} \sim \frac{\pi}{2} \times \pi(t)$$

ce qui donne un lien entre la moyenne arithmético-géométrique et le théorème de Tchebicheff de répartition des nombres premiers.

Méthode de Laplace.

On considère l'intégrale

$$K(t) = \int_a^b g(x)e^{th(x)}\,dx$$

avec a et b de $\bar{\mathbb{R}}$, a inférieur à b strictement (dans la pratique si l'on a $\int_a^b g(x)(f(x))^t\,dx$ il faudra écrire

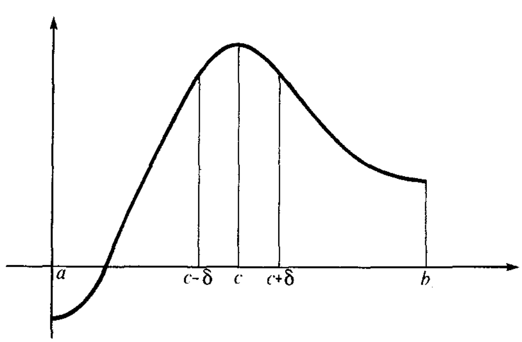
$$\int_a^b g(x)e^{t\,\mathrm{Log}f(x)}\,dx$$

et poser $h(x) = \mathrm{Log}f(x)$ avec $f(x) > 0$ sur $[a, b]$).

Nous faisons les hypothèses suivantes : g et h sont continues par morceaux sur $]a, b[$; h a un maximum absolu unique H atteint en c de (a, b), (on peut, en utilisant la relation de Chasles, se ramener à une somme finie d'intégrales sur des intervalles où H n'est atteint qu'une seule fois) et *hypothèse* H_0 $\exists\, \delta_0 > 0$ tel que

$$\forall\, \delta \in]0, \delta_0[\quad \text{et} \quad \forall x \notin]c - \delta,\ c + \delta[\cap [a, b],$$
$$h(x) \leqslant \min\,(h(x - \delta),\ h(x + \delta))$$

ce qui correspond pour h, au graphe analogue à la figure ci-dessous.



On suppose en outre que :

H_1 : $\int_a^b |g(x)|e^{h(x)}\,dx$ est convergente, ce qui assurera l'existence de $K(t)$ pour tout $t \geqslant 1$;

H_2 : $g(x) \underset{c}{\sim} A|x - c|^\alpha$ avec $\alpha > -1$ (ce qui assure la convergence en c) et $A \neq 0$;

H_3 : $h(x) = H - (B + o(x - c))|x - c|^\beta$ avec $B > 0$ et $\beta > 0$ et $H = h(c)$ ce qui assura que h a un maximum isolé en c, $h - H$ ayant un ordre en c.

Par Chasles

$$K(t) = \int_a^c + \int_c^b = J(t) + I(t).$$

Si $c = a$ ou b, il n'y a qu'une des deux intégrales I ou J à considérer.

Le résultat trouvé pour I sera applicable pour J, puisque g et h ont des équivalents pairs en c et qu'on peut toujours se ramener au maximum pris en la borne inférieure de l'intégrale par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} a < c, \quad J(t) &= \int_a^c g(x)e^{th(x)}\,dx \\ &= \int_{-a}^{-c} g(-X)e^{th(-X)}\,d(-X) \\ &= \int_{-c}^{-a} g(-X)e^{th(-X)}\,dX, \quad -c < -a. \end{aligned}$$

Remarquons d'autre part, avant de commencer le calcul proprement dit, que la linéarité de l'intégrale, permet pour la démonstration, en remplaçant g par $-g$, de supposer A strictement positif, et en écrivant $g = A\,g/A$ de se ramener au cas $A = 1$ et en écrivant

$$K(t) = e^{Ht}\int_a^b g(x)e^{t(h(x)-H)}\,dx$$

au cas $H = 0$.

Nous préférons traiter le cas général, pour que le principe du calcul puisse être repris dans chaque cas particulier.

En utilisant, comme nous l'avons déjà annoncé la méthode de scission de Chasles *seul importe le point c, où h prend son maximum* (car on verra

$$\int_{c+\delta(\lambda)}^b \underset{t=+\infty}{=} o\left(\int_c^{c+\delta(\lambda)}\right).$$

Soit $\lambda \in]0, 1[$ alors il existe $\delta(\lambda) > 0$ tel que d'après H_2 et H_3

$$0 < x - c < \delta(\lambda)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} A(1 - \lambda)(x - c)^\alpha \leqslant g(x) \\ \qquad \leqslant A(1 + \lambda)(x - c)^\alpha \\ -B(1 + \lambda)(x - c)^\beta \leqslant h(x) - H \\ \qquad \leqslant -B(1 - \lambda)(x - c)^\beta. \end{cases}$$

L'exponentielle étant croissante

$$e^{Ht}e^{-B(1+\lambda)(x-c)^\beta t} \leqslant e^{h(x)t} \leqslant e^{Ht}e^{-B(1-\lambda)(x-c)^\beta t}$$

les trois membres de cette inégalité étant positifs $\forall t > 0$,

$$\begin{aligned} (1-\lambda)e^{Ht}&\int_c^{c+\delta(\lambda)} A(x-c)^\alpha e^{-B(1+\lambda)(x-c)^\beta t}\,dx \\ &\leqslant \int_\tau^{c+\delta(\lambda)} g(x)e^{th(x)}\,dx \\ &\leqslant (1+\lambda)e^{Ht}\int_c^{c+\delta(\lambda)} A(x-c)^\alpha e^{-B(1-\lambda)(x-c)^\beta t}\,dx. \end{aligned}$$

Or d'après l'exemple 1 de la méthode « Changement de variable », (on s'y ramène en posant

$X = x - c$), on sait que

$$(1-\lambda)\int_c^{c+\delta(\lambda)} (x-c)^\alpha e^{-B(1+\lambda)(x-c)^\beta t}\,dx \underset{t=+\infty}{\sim} \frac{1-\lambda}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)[B(1+\lambda)t]^{-\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)}$$

$$(1+\lambda)\int_c^{c+\delta(\lambda)} (x-c)^\alpha e^{-B(1-\lambda)(x-c)^\beta t}\,dx \underset{t=+\infty}{\sim} \frac{1+\lambda}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)[B(1-\lambda)t]^{-\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)}.$$

On sait donc qu'il existe $t_1(\lambda) > 0$ tel que, pour tout $t > t_1(\lambda)$, on ait

$$(1-\lambda)\left[\frac{1-\lambda}{\beta}\right]\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)[B(1+\lambda)t]^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \leqslant (1-\lambda)\int_0^\delta X^\alpha e^{-Bt(1+\lambda)X^\beta}\,dX$$

$$(1+\lambda)\left[\frac{1+\lambda}{\beta}\right]\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)[B(1-\lambda)t]^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \geqslant (1+\lambda)\int_0^\delta e^{-Bt(1-\lambda)X^\beta}\,dX.$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, choisissons $\lambda(\varepsilon) \in]0, 1[$ tel que

$$(1-\lambda)^2(1+\lambda)^{-\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)} > 1-\varepsilon$$

et

$$(1+\lambda)^2(1-\lambda)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} < 1+\varepsilon$$

ce qui est possible, puisque les fonctions en λ, des premiers membres sont continues en $\lambda = 0$ où elles prennent la valeur 1.

Pour ce $\lambda(\varepsilon)$ et $\forall t > t_1(\lambda(\varepsilon))$ on a donc

$$A(1-\varepsilon)e^{Ht}\frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)(Bt)^{-\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)} \leqslant \int_c^{c+\delta(\lambda(\varepsilon))} g(x)e^{th(x)}\,dx \leqslant (1+\varepsilon)\frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)(Bt)^{-\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)}e^{Ht}\times A.$$

En outre comme il y a extrémum strict de h en c et d'après l'hypothèse H_0 on a

$$\mu = h(c+\delta(\lambda)) < H = h(c)$$

et, pour λ suffisament petit pour que $\delta(\lambda) \in]0, \delta_0[$, on a, pour tout $x \geqslant c + \delta(\lambda)$,

$$h(x) \leqslant h(c+\delta(\lambda)) < H.$$

Donc, pour tout $t > 1$,

$$t[h(x) - \mu] \leqslant h(x) - \mu$$

soit

$$th(x) \leqslant h(x) + \mu(t-1).$$

Ce qui par domination implique, à cause de H_1, la convergence de $I(t)$.

Puisque

$$\left|\int_{c+\delta}^b g(x)e^{th(x)}\,dx\right| \leqslant \int_{c+\delta}^b |g(x)|e^{th(x)}\,dx \leqslant e^{+(t-1)\mu}\int_{c+\delta}^b |g(x)|e^{h(x)}\,dx < +\infty$$

$\int_{c+\delta}^b g(x)e^{th(x)}\,dx$ est donc absolument convergente, donc convergente, $\mathbb{R}$ étant complet. Or

$$e^{t\mu-\mu} \underset{t=+\infty}{=} o\left(t^{-\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)}e^{Ht}\right);$$

en effet

$$\frac{e^{t\mu-\mu}}{e^{Ht}} = e^{t(\mu-H)-\mu}$$

et

$$\mu - H < 0.$$

En tenant compte de ce qui précède, pour tout t supérieur à $\max(t_1, 1)$, on a

$$A(1-\varepsilon)e^{Ht}\frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)(Bt)^{-\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)} \leqslant I(t) + o\left(\frac{e^{Ht}}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)(Bt)^{-\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)}\right) \leqslant A(1+\varepsilon)e^{Ht}\frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)(Bt)^{-\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)}$$

et donc

$$I(t) \underset{t=+\infty}{\sim} A\frac{e^{Ht}}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)(Bt)^{-\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)}.$$

Si c est dans $]a, b[$ en ajoutant les parties principales (qui ne se réduisent pas !!!) de $J(t)$ et $I(t)$, on a

$$\boxed{\int_a^b g(x)e^{th(x)}\,dx \underset{t=+\infty}{\sim} 2A\frac{e^{Ht}}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)(Bt)^{-\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)}.}$$

Dans le cas où le maximum de h est atteint en une des bornes, il faut diviser l'équivalent par 2.

Le cas le plus courant d'application de la méthode de Laplace est le cas des intégrales

$$I_n = \int_a^b g(x)[f(x)]^n\,dx$$

où f est positive de classe C^2 admettant un extrémum unique dans $[a, b]$ avec $f'(c) = 0$, $f''(c) < 0$ et g continue par morceaux telle que $g(c) > 0$. Alors

$$h(x) = e^{\operatorname{Log} f(x)} = f(c) + \frac{(x-c)^2}{2}\left[\frac{f''(c)}{f(c)} + o(x-c)\right]$$

et on applique ce qui précède avec

$$\begin{cases} A = g(c), \quad H = \operatorname{Log} f(c) \\ \alpha = 0 \\ \beta = 2 \\ B = -\dfrac{1}{2}\dfrac{f''(c)}{f(c)} \end{cases}$$

et donc

$$\int_a^b g(x)(f(x))^n \, dx \underset{+\infty}{\sim}$$

$$\begin{cases} 2g(c)\dfrac{(f(c))^n}{2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{n}{2}\dfrac{f''(c)}{f(c)}\right)^{-\frac{1}{2}} & \text{si} \quad c \in]a, b[\\ g(c)\dfrac{(f(c))^n}{2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{\dfrac{-2f(c)}{nf''(c)}} & \text{si} \quad c = a \text{ ou } b. \end{cases}$$

Or $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$; si $c \in]a, b[$

$$\boxed{I_n = \int_a^b g(x)(f(x))^n \, dx \underset{n=+\infty}{\sim} g(c)(f(c))^n \sqrt{\frac{-2\pi f(c)}{nf''(c)}}.}$$

L'équivalent doit être divisé par deux si c est en a ou b, on obtient dans le cas où g est positive sur (a, b), un résultat plus précis que le classique :

$$\lim_{\infty} \sqrt[n]{I_n} = \operatorname*{Max}_{x \in [a, b]} f(x) = f(c),$$

que l'on retrouve dans le cas des hypothèses, en prenant les racines $n^{\text{-ièmes}}$ des deux membres, car l'équivalence est compatible avec $\sqrt[n]{\ }$ contrairement à l'exponentielle.

La méthode courante de Laplace ne s'applique pas à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^n x f(x) \, dx$$

car

$$c = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

En reprenant le calcul on verrait que si $t \in \mathbb{N}$ le calcul est valable si $f(c) \in \mathbb{R}^*$ et si $g(c) \neq 0$.

En appliquant la méthode précédente, on peut donner les exemples suivants résumés dans le tableau ci-dessous :

Intégrale I_n ou $I(t)$	Équivalent en $n = +\infty$ ou $t = +\infty$	Valeur de c
$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}$	0
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^t dx$	$\sqrt{\frac{\pi}{2t}}$	$\frac{\pi}{2}$
$\int_0^{\infty} e^{-tx \operatorname{Log} x} dx$	$e^{\frac{t}{e}}\sqrt{\frac{\pi}{2et}}$	$\frac{1}{e}$
$\int_0^1 (1 - x^2e^x)^n dx$	$(-1)^n \frac{(e-1)^{n+1}}{3en}$	1
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{t \cos x} dx$	$\sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^t$	0
$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^t}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}$	0
$\int_0^1 x^n f(x) dx$	$\frac{f(1)}{n}$ si $f(1) \neq 0$	1
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^n x f(x) dx$ $\left(f \text{ continue en } \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{n}$	$\frac{\pi}{2}$
$\int_0^{\infty} e^{tx(1 - \operatorname{Log} x)} dx$	$\sqrt{\frac{2\pi}{t}} e^t$	1

Intégrale I_n ou $I(t)$	Équivalent en $n = +\infty$ ou $t = +\infty$	Valeur de c
$\int_0^\infty e^{-tx \operatorname{Log} x}\, dx$	$\frac{1}{e^{t+1}}\sqrt{\frac{2\pi}{t}}$	$\frac{1}{e}$
$\int_0^\pi \sin x\, x^t\, dx$	$\frac{\pi^2}{t^2} e^{t \operatorname{Log} \pi}$	π
$\int_0^1 e^x \frac{x^n}{(1+x^2)^n}\, dx$	$\frac{e}{2^n}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$	1
$\int_0^{+\infty} e^{t(2\sqrt{x}-x)}\, dx$	$\frac{2e^t}{\sqrt{t}}\sqrt{\pi}$	1
$I(t+1) = \int_0^\infty e^{-x} e^{t \operatorname{Log} x}\, dx$	$\sqrt{2\pi}\, t^{t+\frac{1}{2}} e^{-t}$ qui avec $I(t+1) = tI(t)$ permet de retrouver la formule de Stirling.	1

Méthode de l'équation fonctionnelle ou différentielle

On cherche alors un développement formel, par la méthode des coefficients indéterminés vérifiant les mêmes conditions initiales que $I(t)$. Il peut arriver aussi (rarement) que l'on sache expliciter les solutions de cette équation : $I(t)$ est alors calculée !

Exemple 1 : Soit à déterminer un développement limité en 0 de

$$I(t) = e^{-t^2}\int_0^t e^{x^2}\, dx.$$

On vérifie

$$I'(t) = 1 - 2tI(t).$$

I est donc solution de l'équation différentielle

$$y' + 2ty = 1$$

et vérifie $I(0) = 0$ et est impaire

$$I(t) = \sum_0^N a_{2n+1} t^{2n+1} + o(t^{2N+1})$$

La méthode des coefficients indéterminés donne

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{4^n n!}{(2n+1)!}.$$

La même méthode avec le changement $T = 1/t$ permet d'avoir un développement asymptotique au voisinage de plus l'infini.

On traite de la même manière l'exemple :

$$I(t) = e^{-2t^2}\int_0^t e^{2x^2}\, dx.$$

La même méthode, permet un développement de la fonction de Airy

$$I(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \cos\left(tx + \frac{x^3}{3}\right) dx.$$

On consultera avec profit C. Georges, *Exercices et problèmes d'intégration*, page 158 (Gauthiers-Villars, 1980).

Exemple 2 : Il est classique que, $I(t)$ étant l'intégrale de Wallis

$$I(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^t\, dx,$$

on a, en montrant qu'elle est de période 1 et a une limite à l'infini,

$$t \mapsto (t+1)I(t)I(t+1) = \frac{\pi}{2}.$$

Puis $t \mapsto I(t)$ étant décroissante

$$(I(t+1))^2 \leqslant \frac{\pi}{2(t+1)} \leqslant (I(t))^2$$

et donc

$$\frac{\pi}{2(t+1)} < I(t)^2 < \frac{\pi}{2t} \quad \text{et} \quad I(t) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2t}}.$$

On peut bien sûr utiliser cette méthode pour

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\, dx$$

car

$$\Gamma(t+1) = t.\Gamma(t). \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+^*;$$

et aussi pour $I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+itx}\, dx$ et

$$I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t+itx}\, dt$$

solution de

$$y' + \frac{1}{2(t-2)} y = 0$$

qu'on peut résoudre au moyen de fonctions usuelles.

Méthode de l'équivalent.

L'idée consiste à remplacer la fonction sous le signe somme, par son équivalent au voisinage du point litigieux (indétermination, accumulation de masse, ou de non limite uniforme) en modifiant au besoin les bornes, si l'intégrale de l'équivalent avec les bornes initiales ne converge pas, et de majorer la différence, au besoin en scindant, pour justifier la comparaison.

Exemple 1 : Pour trouver un équivalent en 0 de

$$I(t) = \int_{t^2}^{t^3} \frac{e^x}{\operatorname{Arc\,sin} x}\,dx$$

on remarque que

$$\frac{e^x}{\operatorname{Arc\,sin} x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$$

et

$$\int_{t^2}^{t^3} \frac{1}{x}\,dx = \operatorname{Log}\left|\frac{t^3}{t^2}\right| = \operatorname{Log}|t|$$

puis que, pour t suffisamment petit,

$$\begin{aligned}|I(t) - \operatorname{Log}|t|| &= \left|\int_{t^2}^{t^3}\left(\frac{e^x}{\operatorname{Arc\,sin} x} - \frac{1}{x}\right)dx\right| \\ &= \left|\int_{t^2}^{t^3}\left(1 + \frac{x}{3} + o(x)\right)dx\right| \\ &\leqslant 2|t^3 - t^2| = o\,|\operatorname{Log}|t||\end{aligned}$$

donc

$$I(t) \underset{0}{\sim} \operatorname{Log}|t|.$$

Exemple 2 : Pour montrer que cette méthode ne marche pas toujours, sans modifications initiales, reprenons l'exemple 2 de la méthode « Changement de variable ».

Si $I(t) = \displaystyle\int_{-t}^{+t} \frac{dx}{\sqrt{(1 + x^2)(t^2 - x^2)}}$ était équivalent en zéro à

$$J(t) = \int_{-t}^{+t} \frac{1}{\sqrt{2t(1 + t^2)}}\frac{1}{\sqrt{t - x}}\,dx = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1 + t^2}}$$

la limite en zéro de $I(t)$ serait $2\sqrt{2}$ et non π :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2t(1 + t^2)}}\frac{1}{\sqrt{t - x}} \underset{x=t}{\sim} \frac{1}{\sqrt{(1 + x^2)(t^2 - x^2)}}\right).$$

Par contre après un changement de variable

$$\begin{aligned}I(t) &= \int_{-1}^{+1} \frac{dX}{\sqrt{1 - X^2}\sqrt{1 + t^2X^2}} \\ &= 2\int_0^1 \frac{dX}{\sqrt{1 - X^2}\sqrt{1 + t^2X^2}}\end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{1 - X^2}}\frac{1}{\sqrt{1 + t^2X^2}} \underset{t=0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1 - X^2}}$$

et

$$\begin{aligned}|I(t) - \pi| &= 2\left|\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - X^2}}\left[\frac{1}{\sqrt{1 + t^2X^2}} - 1\right]dX\right| \\ &= 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - X^2}}\frac{t^2X^2}{\sqrt{1 + t^2X^2}} \leqslant \frac{2t^2\pi}{2} = o(t).\end{aligned}$$

Exemple 3 : Équivalent en $t = 1$ de

$$I(t) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1 - x)(1 - t^2x)}}.$$

On remarque que

$$\frac{1}{\sqrt{x(1 - x)(1 - t^2x)}} \underset{x=1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{(1 - x)(1 - t^2x)}}$$

dont le calcul d'une primitive est possible par le changement de variable $x = \dfrac{X^2 - 1}{X^2 - t^2}$ qui donne

$$\begin{aligned}J(t) &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x)(1 - t^2x)}} \\ &= \int_1^{\infty} \frac{2\,dX}{X^2 - t^2} = \frac{1}{t}\operatorname{Log}\left|\frac{1 + t}{1 - t}\right|\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|I(t) - J(t)| &= \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - x}}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})\sqrt{1 - t^2x}}\,dx \\ &< \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1 - t^2x}} \\ &< \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1 - x}} = \pi = o(J(t))\end{aligned}$$

et donc

$$I(t) \underset{t=1}{\sim} -\operatorname{Log}(1 - t).$$

On peut aussi remarquer que

$$\frac{1}{\sqrt{x(1 + x)(1 - t^2x)}} \underset{t=1}{\sim} \frac{1}{(1 - x)\sqrt{x}}$$

et majorer la différence

$$\begin{aligned}&\left|I(t) - \operatorname{Log}\left(\frac{1 + \sqrt{t}}{1 - \sqrt{t}}\right)\right| \\ &\qquad = \left|I(t) - \int_0^{1-(1-t)} \frac{dx}{(1 - x)\sqrt{x}}\right|\end{aligned}$$

puis remarquer que

$$\operatorname{Log}\frac{1 + \sqrt{t}}{1 - \sqrt{r}} \underset{t=1}{\sim} -\operatorname{Log}(1 - t).$$

Exemple 4 : L'exemple 6 de la méthode de scission peut se traiter aussi en remarquant que, en $t = 0$,

$$\frac{\cos 2\pi xt}{x \operatorname{Log} x} \sim \frac{1}{x \operatorname{Log} x}$$

et on considère

$$J(t) = \int_2^{\frac{1}{t}} \frac{dx}{x \operatorname{Log} x}$$

$$J(t) = \operatorname{Log}\left|\operatorname{Log}\frac{1}{t}\right| - \operatorname{Log}\operatorname{Log} 2 \underset{t=0}{\sim} \operatorname{Log}\operatorname{Log} t.$$

il suffit de majorer la différence $I(t) - J(t)$ (ce qui est laissé au soin du lecteur) pour retrouver le résultat déjà établi.

On peut établir, par cette méthode, les exemples ci-dessous :

$I(t)$ ou I_n	$J(t)$ ou J_n	Borne ou point litigieux
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} n \cos x \sin^n x f(x)\, dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} n \cos x \sin^n x f\left(\frac{\pi}{2}\right) dx$	$\frac{\pi}{2}$
$\int_0^1 nx^n f(x)\, dx$	$\int_0^1 nx^n f(1)\, dx$ si $f(1) \neq 0$. Si f est C_2 $f(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2} f''(1) + o(x-1)^2$ donne un développement limité de I_n	1
$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} f(x)\, dx$	$\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^n} f(1)\, dx$ si $f(1) \neq 0$	1
$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}} f(x)\, dx$	$\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}} f(1)\, dx$ si $f(1) \neq 0$	1
$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{t-1}\, dx$	$\int_0^\infty e^{-x} x^{t-1}\, dx$	$n = +\infty$
$\int_0^\infty \frac{x^3 e^{-nx}}{\sqrt{1+x^4}}\, dt$	$\int_0^\infty x^3 e^{-nx}\, dx$	$x = 0$
ou par changement de variable : $X = nx$ $\int_0^\infty \frac{1}{n^4} \frac{X^3 e^{-X}}{\sqrt{1 + \frac{X^4}{n^4}}}\, dX$	$\frac{1}{n^4} \int_0^\infty X^3 e^{-X}\, dX$	$n = \infty$
$\int_1^{+\infty} n e^{-x^n}\, dx = \int_1^{+\infty} X^{\frac{1}{n}} e^{-X} \frac{dX}{X}$	$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-X}}{X}\, dX$	$X = 1$
$\operatorname{mag}(1, t) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta}}} = \frac{\pi}{2I(t)}$	$I(t) \sim \frac{\operatorname{Log} t}{t}$ (remplacer $\sin\theta$ par θ) $\operatorname{mag}(1, t) \sim \frac{\pi}{2} \frac{t}{\operatorname{Log} t}$ (formule asymptotique des nombres premiers)	$\theta = 0$

Je n'ai pas évoqué des méthodes dépassant souvent le programme de Mathématiques spéciales pour établir des développements asymptotiques de fonctions définies par des intégrales : le lecteur intéréssé pourra se reporter au remarquable livre de C. George déjà cité où en plus des méthodes évoquées ici on fait appel aux théorèmes de la convergence dominée et de Lebesgue.

Comme annoncé, je ne détaille pas les méthodes pour les séries, dont le terme général dépend d'un paramètre t : il suffit ou bien d'utiliser les mêmes méthodes en remplaçant le signe intégral par le signe sigma, ou de se ramener à une intégrale par l'intermédiaire de la fonction associée. D'ailleurs lorsque le terme général de la série est défini au moyen d'une intégrale, les méthodes précédentes permettent par équivalence, lorsque ce terme est positif, d'en établir la nature.

Donnons seulement des exemples, où l'utilisation des séries permet par contre d'obtenir des équivalents pour les intégrales, et un exemple d'équivalent de la somme d'une série, dépendant d'un paramètre, établi uniquement dans le langage des séries.

Exemple 1 : L'utilisation d'un développement en série va permettre d'obtenir un équivalent pour une intégrale en utilisant le théorème classique bien connu (par exemple voir [3], p. 262) : soit b_n une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, telle que (Σb_n) diverge et $(\Sigma b_n x^n)$ ait pour rayon 1, alors, si a_n est une suite de réels telle que $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$,

$$\lim_{x \to 1^-} \left(\sum_1^\infty a_n x^n \right) \Big/ \left(\sum_1^\infty b_n x^n \right) = 1.$$

Considérons $\mathrm{I}(t) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-t^2x^2)}}$. Si $t \in]0, 1[$, $\forall x \in]0, 1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) \cdots \left(\frac{1}{2}+n-1\right)\frac{t^{2n}}{n!}x^{2n}.$$

Comme cette série converge uniformément en x sur $[0, 1]$,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-t^2x^2)}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) \cdots \left(\frac{1}{2}+n-1\right)\frac{t^{2n}}{n!}\int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Or

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} u\, du = \mathrm{W}_{2n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$$

et W_{2n} est une intégrale de Wallis

$$\mathrm{W}_{2n} = \frac{1 \times 3 \times 5 \ldots \times 2n-1}{2 \times 4 \times 6 \ldots \times 2n} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Or

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) \cdots \left(\frac{1}{2}+n-1\right)\frac{\mathrm{W}_{2n}}{n!} = \frac{2^n n!}{2^n n!(2n+1)} \frac{\mathrm{W}_{2n}}{\mathrm{W}_{2n+1}} \sim \frac{1}{2n}.$$

D'après le théorème cité :

$$\mathrm{I}(t) \underset{t \mapsto 1^-}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}(t^2)^n = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{1}{1-t^2} \sim \frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{1}{1-t}$$

et donc

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-t^2x^2)}} \underset{t=1^-}{\sim} -\frac{1}{2}\operatorname{Log}(1-t).$$

Exemple 2 : Traitons maintenant un exemple spécifique aux séries, où l'on se ramène au problème « intégrale » par l'utilisation du théorème de Riemann de comparaison de séries et d'intégrales (voir une autre méthode, plus particulière : *Algèbre et Analyse, exercices corrigés* Jacques Vauthier, édition Eska 1985, p. 123).

Soit à déterminer un équivalent en $1-0$ de

$$\mathrm{I}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nt^n}{1-t^n}.$$

Pour $0 < t < 1$, étudions $g_t(u) = \frac{ut^u}{1-t^u}$

$$g_t'(u) = \frac{u \operatorname{Log} t - e^{u \operatorname{Log} t} + 1}{(1-t^u)^2}\, t^u$$

est négatif pour tout u de $\mathbb{R}^+$.

D'après le théorème de comparaison de série et d'intégrale, on a donc

$$\mathrm{I}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nt^n}{1-t^n} \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{ut^u}{1-t^u}\,du \geqslant \mathrm{I}(t) - \frac{t}{1-t}$$

et donc

$$\lim_{t \to 1_-} (1-t)^2 \mathrm{I}(t) = \lim_{t \to 1_-} (1-t)^2 \int_1^{+\infty} \frac{ut^u}{1-t^u}\,du.$$

Par le changement de variable $\mathrm{U} = t^u$ on a $u = \frac{\operatorname{Log} \mathrm{U}}{\operatorname{Log} t}$,

$$du = \frac{d\mathrm{U}}{\mathrm{U}} \frac{1}{\operatorname{Log} t} \begin{cases} u = 1 & \Rightarrow \mathrm{U} = t \\ u = +\infty & \Rightarrow \mathrm{U} = 0 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{ut^u}{1-t^u}\,du = -\frac{1}{(\operatorname{Log} t)^2} \int_0^t \frac{\operatorname{Log} \mathrm{U}}{1-\mathrm{U}}\,d\mathrm{U}$$

et, comme $(\operatorname{Log} t)^2 \underset{t=1}{\sim} (1-t)^2$, on a

$$\lim_{t \to 1_-} (1-t)^2 \mathrm{I}(t) = \int_0^1 -\frac{\operatorname{Log} \mathrm{U}}{1-\mathrm{U}}\,d\mathrm{U} = \mathrm{K}.$$

Calculons K dont la convergence est immédiate

$$\frac{\text{Log U}}{1-\text{U}} = \text{Log U} + \text{U Log U} + \cdots + \text{U}^n \text{Log U} + \frac{\text{U}^{n+1}\text{Log U}}{1-\text{U}}.$$

$\text{U} \mapsto \dfrac{\text{U Log U}}{1-\text{U}}$ étant borné sur $]0,1[$ on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \text{U}^n \frac{\text{U Log U}}{1-\text{U}}\,\text{dU} = 0.$$

En intégrant par parties

$$\int_0^1 \text{U}^n \text{Log U dU} = \left[\frac{\text{U}^{n+1}}{n+1}\text{Log U}\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \text{U}^n\,\text{dU} = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Par conséquent

$$\int_0^1 \frac{\text{Log U}}{1-\text{U}}\,\text{dU} = -\sum_1^\infty \frac{1}{(n+1)^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

Par suite

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nt^n}{1-t^n} \underset{t=1}{\sim} \frac{1}{(t-1)^2}\frac{\pi^2}{6}.$$

Pour essayer d'être complet, citons le lemme classique : *f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ étant localement intégrable, monotone au voisinage de plus l'infini, alors*

$$\lim_{\substack{h\to+0\\h>0}} h\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) = \int_0^{+\infty} f(x)\,\text{d}x$$

si cette dernière intégrale converge, ce qui donne par exemple

$$(1-t)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{1-t^n} \underset{t=1}{\sim} \text{Log}\frac{1}{1-t}$$

ou le lemme plus particulier :

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant t} a_n\varphi(n) = \text{A}(t)\varphi(t) - \int_1^t \text{A}(x)\varphi'(x)\,\text{d}x$$

avec

$$\varphi \in \text{C}^1([1,\ +\infty[,\ \mathbb{C})$$

dont l'application donne aussi des résultats intéressants.

Pour terminer, donnons à titre indicatif au lecteur, en lui laissant le soin de détailler les calculs, quelques exemples caractéristiques, concernant les séries, soit qu'il s'agisse d'avoir un équivalent de la somme, soit la nature lorsque le terme général est défini par une intégrale.

Exemple	Méthode	Équivalent de la somme ou du reste ou conclusion
$\sum_0^\infty e^{-t\sqrt{n}}, \quad t=0$	Comparaison série et intégrale (notée SI)	$\frac{2}{t^2}$
$\sum_1^\infty \frac{1}{(t+n)^2}, \quad t=+\infty$	SI	$\frac{1}{t}$
$\sum_0^\infty t^\alpha e^{-n^2 t}, \quad t=0^+$	SI	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}t^{\alpha-\frac{1}{2}}$
$\sum_0^\infty t^{n^2}, \quad t=1^-$	SI	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{1-t}} \Rightarrow \left(\sum_0^\infty t^{n^2}\right)^2 = \sum_0^\infty r(n)t^n \sim \frac{\pi}{4}\frac{1}{1-t}$
$\sum_1^\infty \frac{1}{n^t}, \quad t=1^+$	SI	$\frac{1}{t-1}$
$\sum_0^{+\infty} \frac{a^n}{t+n}, \quad t=+\infty$	Scinder le développement de $\frac{1}{t+n}$	$\frac{1}{1-a}\frac{1}{t}$
$u_n = \int_0^\infty \frac{\text{d}x}{(1+x^3)^n}$	Laplace, récurrence, minorer	Diverge
$u_n = \int_n^{2n} \frac{\text{d}x}{1+x^{\frac{3}{2}}}$	Minorer	Diverge

Exemple	Méthode	Équivalent de la somme ou du reste ou conclusion
$u_n = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dt$	Encadrer	Diverge
$u_n = \frac{1}{n!} \int_1^a (\text{Log } x)^n\, dt$ $a \neq 0, \quad a \neq 1, \quad a > 0$	Majorer	Converge
$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{n^5 + x^5}}$	Changement de variable	Converge
$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{n}\, dx$	Laplace	Converge
$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n\, dx$	Laplace; récurrence	Diverge
$u_n = \int_1^{+\infty} e^{-x^n}\, dx$	Scission ou minorer	Diverge
$u_n = \int_0^{+\infty} e^{-x}(\sin x)^{2n}\, dx$	Laplace ou Chasles $u_n = \dfrac{\int_0^{\pi} e^{-x} \sin^{2n} x\, dx}{1 - e^{-\pi}}$	Diverge

Enfin le lecteur pourra être tenté d'appliquer ce qui précède à la question d'oral de Centrale Lyon 1985.

• Si on pose

$$r(n) = \text{Card}\,\{(x, y) \in \mathbb{N}^2, x^2 + y^2 = n\}$$

déterminer un équivalent de

$$f(t) = \sum_1^{\infty} r(n) t^n$$

pour t tend vers $1 - 0$.

Réponse :

$$f(t) = (\Sigma t^{n^2})^2 \sim \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} \frac{dx}{\sqrt{-\text{Log } t}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{-\text{Log } t}}\right)^2 \sim \frac{\pi}{4(1-t)}.$$

Le premier équivalent s'obtenant par le théorème de Riemann de comparaison d'une série et d'une intégrale — théorème valable, même si la fonction satisfaisant aux hypothèses, dépend d'un paramètre.

Cette question est susceptible de nombreux prolongements en particulier avec

— les nombres premiers dans $\mathbb{Z}(i)$,

— les séries de Lambert par

$$\sum_1^{\infty} r(n) t^n = \sum_1^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-1}}{1 - t^{2n-1}}.$$

— Programme du calcul visualisé (en BASIC) du p.g.c.d. dans $\mathbb{Z}(i)$,

— les fonctions elliptiques,

— programme de calcul BASIC de $r(n)$!!

— l'équation de Pythagore $x^2 + y^2 = z^2$.

D'ailleurs on peut démontrer que

$$r(n) = [d_1(n) - d_3(n)]$$

où $d_i(n)$ représente le nombre des diviseurs de n de la forme $4k + i$. D'ailleurs plus précisément si n est de la forme :

$$n = 2^p \prod_{t \in T} t^{q_t} \prod_{u \in U} u^{s(u)}$$

$$r(n) = \prod_{u \in U} (1 + s(u)) \prod_{t \in T} \left(\frac{1 + (-1)^{q_t}}{2}\right)$$

U (resp. T) ensemble des diviseurs premiers de n de la forme $4k + 1$ (respectivement $4k + 3$).

Bibliographie.

[1] RAMIS, ODOUX, DESCHAMP, *Cours de Mathématiques Spéciales*, tome 3 et 4, Masson 1979.

[2] CHAMBADAL et OVAERT, *Cours de Mathématiques, Analyse*, Gauthiers-Villars 1972.
[3] RÂ, IV^ème Dynastie. *Exercices d'analyse*, Masson 1968.
[4] BASS, *Exercices d'analyse*, Masson.
DIEUDONNÉ, *Calcul infinitésimal*, pages 140, 195, Hermann 1968.
Exercices d'oraux d'Analyse, Bréal.
LEICHTNAMM, SCHAUER. *Exercices corrigés de mathématiques aux thèmes séries et intégrales*, tome 3, SPM Marketing, 1982.
FLORY. *Exercices : topologie et analyse*, tome 3, Vuibert, 1976.
LELONG FERRAND. *Exercices d'Analyse*, Dunod 1977.
POLYA et SZEGÖ, tome 2, page 127 et tome 1, page 53.
RAMIS, DESCHAMPS, ODOUX, *Exercices d'Analyse*, tomes 1 et 2, Masson 1983 et 1985.
Revues de Mathématiques spéciales, juin 1976 à 1985.
VAUTHIER, Algèbre et analyse, *Exercices corrigés*, Grand oral de Polytechnique, ESKA, 1985, (puisque les exercices ne sont pas regroupés par thèmes : pages 120, 123, 137, 144, 209, 236, 258, 278).

Examens oraux des concours d'entrée aux grandes écoles

École polytechnique

6. — Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $f \in L(E) : P \mapsto (1 + X^2)P'' - 2XP'$; existe-t-il, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $h \in L(E)$ tel que $h^n = f$?

Cherchons d'abord les éléments propres de f; $P = \sum_0^p a_k X^k$ vérifie $f(P) = \lambda P$ si

$$(\forall k \leqslant p - 2), \qquad (k + 1)(k + 2)a_{k+2} + (k(k - 1) - 2k - \lambda)a_k = 0$$

avec

$$a_{p-1} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda = p(p - 3).$$

On met ainsi en évidence un polynôme P_p (avec $a_p = 1$) de degré p, qui est pair ou impair selon les parité de p. La famille $(P_p)_{p \in \mathbb{N}}$ constitue une base de E; les valeurs propres λ_p obtenues sont toutes $\geqslant 0$, sauf pour $p = 1$ et $p = 2$ ($\lambda_1 = \lambda_2 = -2$).

On obtient alors, pour tout $n \geqslant 1$, un $h \in L(E)$ tel que $h^n = f$ en définissant h sur la base (P_p) :

- pour $p \neq 1$ et $p \neq 2$: $h(P_p) = \sqrt[n]{\lambda_p}\,P_p$;
- pour $p = 1$ et $p = 2$, la restriction de f à $\mathrm{Vect}(P_1, P_2)$ est une similitude de matrice

$$2\begin{bmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{bmatrix}$$

(dans la base P_1, P_2), on prendra pour h l'application de matrice

$$\sqrt[n]{2}\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{n} & -\sin\frac{\pi}{n} \\ \sin\frac{\pi}{n} & \cos\frac{\pi}{n} \end{bmatrix}$$

dont la puissance $n^{\text{ième}}$ est la matrice précédente.

D. LUÇON.

Très bonne solution de X. SIEFRIDT.

16. Étudier $f(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{Log}\,(x^2 - 2x\cos a + 1)}{x}\,dx$, sachant que

$$f\left(\frac{a}{2}\right) + f\left(\pi - \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2} f(a).$$