École supérieure d'ingénieurs de Marseille 88

spé fev 89

Option M
Deuxième épreuve

6504. **Grand théorème de Poncelet pour les cercles.**

(Voir l'énoncé complet dans la Revue n° 1, page 81.)

Solution par M. VIDIANI, Professeur de Spéciales au Lycée Carnot à Dijon.

INTRODUCTION

La tangente en M_0 est la normale en M_0 à CM_0 où $C(a, b)$ est le centre du cercle ; son équation est donc

$$(x_0 - a)(X - x_0) + (y_0 - b)(Y - y_0) = 0$$

soit :

$$x_0X + y_0Y - aX - bY + ax_0 + by_0 - x_0^2 - y_0^2 = 0.$$

Or M_0 étant sur le cercle, on a :

$$x_0^2 + y_0^2 - ax_0 - by_0 = c + ax_0 + by_0$$

soit en remplaçant dans l'équation de la tangente :

$$x_0X + y_0Y - a(X + x_0) - b(Y + y_0) + c = 0,$$

forme polaire de q obtenue par la règle du dédoublement.

I

1° Par la décomposition de Gauss déjà effectuée q_1 et q_2 ont comme rang le nombre de carrés de formes linéaires indépendantes en X, Y, T dans leur décomposition de Gauss, leur signature est (2, 0), et leurs matrices respectives sont :

$$\boxed{A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -d & 0 \\ -d & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -R^2 \end{bmatrix}} \quad \text{et} \quad \boxed{A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -R^2 \end{bmatrix}}$$

2° La demande signifie que sur la nouvelle base la forme quadratique q_1' est égale à $-X'T' + Y'^2$ ce que nous allons obtenir en partant de la décomposition de Gauss initiale $(X - dT)^2 - R^2 + Y^2$ en effectuant une différence de carrés (gardant momentanément les coordonnées ordinaires pour la commodité des écritures) :

$$(x - d - R)(x - d + R) + y^2 = q_1.$$

Posons comme il est naturel :

$$X' = -X + (d + R)T, \qquad Y' = Y, \qquad T' = X + (-d + R)T$$

d'où en combinant :

$$X' + T' = 2RT, \qquad Y' = Y, \qquad (R - d)X' - (R + d)T' = -2RX$$

soit enfin :

$$\begin{cases} X = \dfrac{d - R}{2R}X' + \dfrac{d + R}{2R}T' \\ Y = Y' \\ T = \dfrac{X'}{2R} + \dfrac{T'}{2R} \end{cases} \qquad \boxed{P = \begin{bmatrix} \dfrac{d - R}{2R} & 0 & \dfrac{d + R}{2R} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{2R} & 0 & \dfrac{1}{2R} \end{bmatrix}},$$

3° La représentation paramétrique de Γ_1 dans la nouvelle base est ($X' = t^2, Y' = t, T' = 1$) ce qui donne en particulier $2RT = t^2 + 1$ et, puisque T n'est jamais nul, les anciennes coordonnées de M sont :

$$x = \frac{(d - R)t^2 + (d + R)}{t^2 + 1}, \qquad y = \frac{2Rt}{t^2 + 1}.$$

Comme la valeur $t = \infty$ n'est pas réelle, le point Ω est $(d - R, 0)$, c'est-à-dire le point le plus à gauche du cercle qui n'est jamais obtenu.

4° ***a)*** En combinant les formules données plus haut on a :

$$u' = \frac{d - R}{2R} u + \frac{1}{2R} h, \qquad v' = vh' = \frac{d + R}{2R} u + \frac{1}{2R} h, \qquad U' = {}^tPU.$$

b) Ce résultat est beaucoup plus général : pour qu'un hyperplan soit tangent à une hyperquadrique, il faut et il suffit qu'il contienne son pôle (défini en géométrie projective, depuis longtemps hors du programme des classes de Spéciales). Contentons-nous de démontrer le résultat dans le cas particulier proposé.

D'après l'introduction, l'équation d'une tangente est :

$$[x_0 y_0 1] A_2 M = 0.$$

Or pour que deux droites soient confondues il faut et il suffit que leurs coefficients soient proportionnels :

$$[uvh] = \lambda [x_0 y_0 1] A_2$$

d'où le résultat en transposant.

c) (1) implique (2) : la tangente D contient M_0 ; or d'après le ***b)*** on a $M_0 = A_2^{-1} U$ (A_2 est symétrique).

(2) équivaut à (3) : d'après le ***a)*** $U' = {}^tPU$ avec P inversible.

(2) implique (1) : la droite ${}^tUM = 0$ contient le point $M_0 = A_2^{-1}U$ qui est sur Γ_2 car ${}^tM_0A_2M_0 = {}^tUA_2^{-1} = 0$ et la droite D d'équation ${}^tUM = 0$ est bien tangente en M_0 car $U = A_2M_0$ montre qu'elle admet également ${}^tM_0A_2M = 0$ comme équation, ce qui équivaut par dédoublement à l'égalité $\varphi(M_0, M) = 0$ démontrée dans l'introduction.

5° Il s'agit d'écrire l'équation d'une droite contenant deux points distincts de la parabole $y' = x'^2$ soit, en divisant par $(t_1 - t_2)$:

$$\boxed{X' - (t_1 + t_2)Y' + t_1t_2 = 0.}$$

6° On pourrait remarquer que 4° ***b)*** donne $U = \lambda A_2 M_0$; or par changement de base $M = PM'$ donne ${}^tUM = {}^tUPM'$ et $U' = {}^tPU = \lambda {}^tPA_2M_0$ mais on peut aller plus vite en développant la condition du ***c)*** avec $u' = 1$, $v' = -t_1 - t_2$, $h' = t_1t_2$ d'où :

$$a + a'(t_1 + t_2)^2 + a''t_1^2t_2^2 - 2b''(t_1 + t_2) + 2b't_1t_2 - 2b(t_1^2t_2 + t_2^2t_1) = 0$$

soit, en posant $X_i = t_i^2$, $Y_i = t_i$ et $Z_i = 1$:

$$0 = aZ_1Z_2 + a'(X_1Z_2 + X_2Z_1 + 2Y_1Y_2) + a''X_1X_2 - 2b''(Y_1Z_2 + Y_2Z_1) + 2b'Y_1Y_2 - 2b(X_1Y_2 + X_2Y_1)$$

et par suite :

$$\boxed{C = \begin{bmatrix} a'' & -2b & a' \\ -2b & 2b' + 2a' & -2b'' \\ a' & -2b'' & a \end{bmatrix}.}$$

On peut vérifier que

$$C = A_1A_2^{-1}A_1 - \frac{1}{2}\text{trace}\ (A_1A_2^{-1})A_1.$$

(La relation trouvée signifie que M_1 et M_2 sont conjugués par rapport à la conique C de matrice C : d'un point M de Γ_1 on mène deux tangentes à Γ_2 qui recoupent Γ_1 en M_1 et M_2, M_1M_2 est la polaire de M par rapport à C et enveloppe la conique A_1^*, polaire réciproque de Γ_1 par rapport à C, de matrice $A_1^* = CA_1^{-1}C$.)

II

1° Les inégalités données signifient que Ω est toujours à l'intérieur de Γ_2 et $(d + r, 0)$ toujours à l'extérieur : les deux cercles sont donc sécants. On a l'ordre $(-r,\ 0,\ d - R,\ r,\ d + R)$ si $d > R$ et $(-r,\ d - R,\ 0,\ d + R)$ si $d < R$.

Nous avons vu en **I. 3°** une représentation paramétrique de Γ_1. Par soustraction de leurs équations normales les points communs à Γ_1 et Γ_2 vérifient l'égalité $2\,dx = r^2 + d^2 - R^2$ d'où, en remplaçant x par son expression paramétrique :

$$(r^2 + d^2 - R^2)(1 + t^2) = 2\,d[(d - R)t^2 + R + d]$$
$$t^2[r^2 - (d - R)^2] = (d + R)^2 - r^2$$

et $\boxed{t_0 = \sqrt{\dfrac{(d + R)^2 - r^2}{r^2 - (d - R)^2}}}$ qui existe bien à cause des inégalités.

2° ***a)*** Sinon les deux droites M_1M_2 et M_1M_3 seraient confondues, M_1 serait un point d'où l'on peut ne mener qu'une tangente à Γ_2, M_1 serait à l'intersection des deux cercles et t serait égal à t_0 ce qui est exclu.

b) A cause du **I. 6°** on a ${}^tM_1CM_2 = 0$ et ${}^tM_1CM_3 = 0$; or l'équation de la droite M_2M_3 peut être définie par une relation barycentrique du type $M = \alpha M_2 + \beta M_3$ d'où, par combinaison, ${}^tM_1CM = 0$. Or ${}^tM_1C$ n'est pas nulle (sinon la condition du (6) ne saurait être nécessaire et suffisante). ${}^tM_1CM = 0$ est donc bien l'équation de M_1M_2 et le résultat en découle.

c) En effet la condition (3) du **I. 4°** est alors bien vérifiée car après associativité

$${}^tM_1CA_2'^{-1} = \lambda {}^tM_1A_1M_1 = 0$$

car M_1 est sur Γ_1.

3° ***a)*** Il serait maladroit de partir de la relation **2° *c)***. Comme λ est non nul, C est inversible comme A_1' : nous préférerons donc partir de la relation équivalente $\lambda A_2' = CA_1'^{-1}C$. Un calcul facile (non détaillé ici) donne :

$$CA_1'^{-1}C = -2\begin{bmatrix} 2a'a'' - 2b^2 & 2bb' - 2a''b'' & a'^2 - 2bb'' + aa'' \\ 2bb' - 2a''b'' & 8bb'' - 2(a' + b')^2 & 2b'b'' - 2ab \\ a'^2 - 2bb'' + aa'' & 2b'b'' - 2ab & 2aa' - 2b''^2 \end{bmatrix}.$$

Alors $\Phi = a'^2 - 4bb'' + aa'' + 2a'b'$; dans les coefficients de la matrice précédente, on retrouve les cofacteurs de $A_2'^{-1}$ multipliés par -4, ce qui permet d'écrire :

$$CA_1'^{-1}C = -4\,\mathrm{Com}\,(A_2'^{-1}) - 4\Phi A_1' = -4\det(A_2'^{-1})A_2' - 4\Phi A_1'.$$

Si $\Phi = 0$ (ce qui est supposé par la condition **2° *c)***) $CA_1'C = \lambda A_2'$ est réalisée : M_2M_3 est tangente à Γ_2, d'où l'existence demandée du triangle inscrit à Γ_1 et circonscrit à Γ_2.

3° ***b)*** Rappelons que la trace d'une comatrice est égale à la somme des trois cofacteurs de la diagonale principale. Or nous avons :

$$S' = A_1'A_2'^{-1} = -\begin{bmatrix} \dfrac{b'}{2} & \dfrac{b}{2} & \dfrac{a''}{2} \\ -b'' & -a' & -b \\ \dfrac{a}{2} & \dfrac{b''}{2} & \dfrac{b'}{2} \end{bmatrix}.$$

La relation (5) signifiant $(\text{trace } S')^2 = k$ (trace com S'), soit :

$$4(-b' + a')^2 = k(-4b'a' + 4bb'' + b'^2 - aa''),$$

on voit aussitôt que $k = 4$ donne l'équivalence des relations (4) et (5). (On pourra remarquer, en vue de la partie **III**, que (5) signifie que l'une des racines carrées des valeurs propres de $A_1A_2^{-1}$ est somme de deux racines carrées des autres en élevant deux fois au carré.)

c) Soit P la matrice de passage conduisant à $A_i' = P^{-1}A_iP$: le caractère invariant des valeurs propres et l'égalité $S' = P^{-1}A_1A_2^{-1}P$ permettent de répondre à la question.

d) Par un calcul immédiat on trouve :

$$r^2 S = \begin{bmatrix} r^2 & 0 & d \\ 0 & r^2 & 0 \\ -dr^2 & 0 & R^2 - d^2 \end{bmatrix},$$

soit encore

$$(2r^2 + R^2 - d^2)^2 = 4r^2(r^2 + 2R^2 - d^2)$$

ou enfin

$$(R^2 - d^2)^2 = 4R^2r^2, \qquad \text{soit} \qquad (R^2 - d^2 - 2Rr)(R^2 - d^2 + 2Rr) = 0.$$

Or la relation $d^2 = R^2 - 2Rr = (R - r)^2 - r^2$ impliquerait $d < |R - r|$ et l'un des cercles serait intérieur à l'autre ce qui n'est pas. C'est donc l'autre relation qui est vraie, soit $\boxed{R^2 - d^2 + 2Rr = 0.}$ Cela montre en outre que Γ_2 ne peut être que l'un des cercles ex-inscrits au triangle, car le cercle inscrit est obligatoirement inclus dans le cercle circonscrit et Γ_2 n'est pas inclus dans Γ_1.

III

1° D'après **II. 6°** la condition de contact s'exprime par ${}^tM_iCM_j = 0$; or aucun des CM_i ne peut être nul sinon n'importe quelle droite MM_i serait tangente à Γ_2 pour tout point M de Γ_1. De même si CM_i et CM_j étaient liés avec $i \neq j$ toute tangente menée de M_i serait également tangente menée de M_j puisque les conditions de contact de toute droite MM_i serait automatiquement vérifiée pour la droite MM_j et M_i et M_j seraient confondus ce qui est écarté par l'hypothèse. Or le fait que ψ soit dégénérée signifie que le rang de C est 2 ; CM_i est donc combinaison linéaire de deux autres CM_j et CM_k, d'où :

$${}^tM_3CM_4 = {}^tM_3(aCM_1 + bCM_4)M_2 = 0 + b^t(\alpha CM_1 + \beta CM_4)M_2 = 0.$$

(NB : ce procédé est souvent employé en théorie des torseurs, malheureusement disparue du programme de Spéciales bien qu'elle permette une vision synthétique de la cinématique et de la dynamique ; on pourra également évoquer la notion de « fermeture » en se reportant par exemple au problème d'Agrégation de 1947...).

2° L'équation caractéristique est $\lambda^3 - \sigma_1\lambda^2 + \sigma_2\lambda - \sigma_3 = 0$; la condition évoquée signifie $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3$ soit $\sigma_1 = 2\lambda_3$, c'est-à-dire encore $\dfrac{\sigma_1}{2}$ solution de l'équation caractéristique et enfin $\boxed{8\sigma_3 = 4\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^3}$.

3° Par des calculs faciles par simples substitutions (mais peu évidents un jour de concours...) on peut vérifier que

$$\det C = 2(aa'a'' + ab'a'' + 4a'bb'' - a'^3 - a'^2b' - 2a''b''^2 - 2ab^2)$$

puis que l'équation caractéristique de $A'_1A'^{-1}_2$ est

$$-8\lambda^3 + 8\lambda^2(b' - a') - 2\lambda(b'^2 - 4a'b' - aa'' + 4bb'') + 2aa'a'' + 4bb'b'' - 2ab^2 - 2a'b'^2 - 2a''b''^2 = 0;$$

la somme des valeurs propres étant $b' - a'$, écrire que $\dfrac{(b' - a')}{2}$ en est solution conduit exactement à l'égalité $\det C = 0$ ce qui suffit, d'après le **1°**, à établir l'existence d'un « quadrilatère de Poncelet ».

4° D'après l'expression de $A_1A_2^{-1}$ on a immédiatement :

$$\sigma_1 = 2 + \frac{R^2 - d^2}{r^2}, \qquad \sigma_3 = \frac{R^2}{r^2}, \qquad \sigma_2 = 1 + \frac{2R^2 - d^2}{r^2}.$$

Reportant dans la relation établie en **2°** et posant $u = R^2 - d^2$ on trouve :

$$\left[2 + \frac{u}{r^2}\right]\left[\left[2 + \frac{u}{r^2}\right]^2 - 4 - 8\frac{R^2}{r^2} + 4\frac{d^2}{r^2}\right] + 8\frac{R^2}{r^2} = 0,$$

soit

$$\left[2 + \frac{u}{r^2}\right]\left[\frac{u^2}{r^4} + \frac{4u}{r^2} - 8\frac{R^2}{r^2} + 4\frac{d^2}{r^2}\right] + 8\frac{R^2}{r^2} = 0,$$

ou encore

$$2\frac{u^2}{r^4} + 8\frac{u}{r^2} - 16\frac{R^2}{r^2} + 8\frac{d^2}{r^2} + \frac{u^3}{r^6} + 4\frac{u^2}{r^4} - 8\frac{R^2u}{r^4} + 4\frac{d^2u}{r^4} + 8\frac{R^2}{r^2} = 0,$$

puis

$$2u\left[\frac{R^2 - d^2 - 2R^2}{r^4}\right] + \frac{u^3}{r^6} = 0$$

et enfin, puisque $u \neq 0$, $\boxed{f(r) = \frac{1}{r^2}}$.

On peut remarquer que $t_0 = 1$ (voir le **II. 1**)) correspond à l'égalité :

$$\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = 2f(r).$$

Remarques : Le problème a manifestement été construit en utilisant une série de quatre articles remarquables de Joanny Commeau (« Quelques applications géométriques du calcul matriciel) parus dans les numéros 6 à 9 de la *Revue de Mathématiques Spéciales* entre janvier et avril 1960 ; on pourra se reporter tout particulièrement au numéro 8.

L'intérêt du grand théorème de Poncelet, particularisé ici à deux cercles et restant valable pour deux coniques propres, intervenant dans le développement en série formelle de

$$\sqrt{\det\ (A + \lambda B)}$$

par des formules de Cayley faisant intervenir deux déterminants suivant la parité de n, réside dans le fait qu'il est au carrefour de plusieurs thèmes dont la théorie des groupes (sur une cubique associée à un faisceau de coniques) que l'on peut paramétrer par les fonctions elliptiques. Les explications en profondeur, comme tout ce qui touche aux courbes algébriques, remontent au théorème d'Abel sur les intégrales portant son nom. Une autre démonstration a été donnée par Chasles, utilisant la notion de « correspondance algébrique multivoque ».

Bibliographie sommaire sur le théorème de Poncelet

Berger, *Problèmes de Géométrie*, Cedic, pages 192 et sq. ; *Géométrie*, tome 4 (pages 144 à 148) et tome 2 (page 109).

Delteil et Caire, *Géométrie* (Classe de Mathématiques), Baillière et fils, page 112 (exercice 100). p 374

Dieudonné, *Cours de géométrie algébrique*, PUF, tome 1, pages 38 et 39.

Duporcq, *Premiers principes de géométrie moderne*, page 139.

Griffiths et Harris, « On Cayley's explicit solution to Poncelet porism » in *Enseignement Mathématique*, janvier-juin 1978, pages 31 à 40.

Le Lionnais, article « Poncelet » du *Dictionnaire* des PUF.

Maths venues d'ailleurs (Belin éd.), « ergodicité » à partir de la page 23.

Très bonne solution de D. Clenet et A. Reisner.