Octobre 85

Composantes connexes de l'ensemble des solutions d'une équation algébrique dans $L_n(E)$

par L. G. VIDIANI, professeur en classe de Mathématiques spéciales au lycée Carnot de Dijon

E étant un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ sur $\mathbb{C}$, et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, p nombres complexes donnés, distincts deux à deux, considérons le polynômes P de C(X) défini par

$$P(X) = \prod_{j=1}^{p} (X - \lambda_j)^{m_j}$$

où $m_j \in \mathbb{N}^*$ et

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_m = m = d^0 P$$

qu'on peut même grâce au théorème de Cayley, et puisque $u - \lambda e$ est inversible si λ n'appartient pas au spectre de u, supposer inférieur ou égal à n.

L'ensemble S des solutions dans $L_n(E)$ de l'équation algébrique $P(u) = 0$ est constitué des endomorphismes u dont le polynôme minimal μ_u est de la forme

$$\mu_u(X) = \prod_{j=1}^{p} (X - \lambda_j)^{r_j}$$

avec $r_j \in \mathbb{N}$, $r_j \leqslant m_j$, $1 \leqslant r_1 + r_2 + \cdots + r_p \leqslant m$ (ce qui donne $C_{p+m}^{m} - 1$ possibilités pour μ_n d'après la théorie des combinaisons avec répétition) et dont la matrice U, sur une base donnée $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E, est semblable à une réduite de Jordan de la forme :

$$\begin{pmatrix} \underbrace{\lambda_1 \;\; \varepsilon_1^1 \cdots \varepsilon_1^{\alpha_1-1} \cdots \lambda_1}_{\alpha_1} & & & \\ & \underbrace{\lambda_2 \;\; \varepsilon_2^1 \cdots \varepsilon_2^{\alpha_2-1} \cdots \lambda_2}_{\alpha_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underbrace{\lambda_p \;\; \varepsilon_p^1 \cdots \varepsilon_p^{\alpha_p-1} \cdots \lambda_p}_{\alpha_p} \end{pmatrix}$$

avec

$$\alpha_j \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_1 + \cdots + \alpha_p = n.$$

Le polynôme caractéristique $PC_u(X)$ de u et de U est

$$PC_u(X) = \prod_{j=1}^{p} (-X + \lambda_j)^{\alpha_j} = \det(+U - XI)$$

et les ε_j^k appartiennent à $\{0; 1\}$, et pour chaque j, la chaîne la plus longue de ε_j^k successifs égaux à 1 étant de cardinal r_j.

Considérons une solution U_0, appartenant à $M_n(\mathbb{C})$ de l'équation $P(X) = 0$, dont le polynôme caractéristique est

$$\prod_{j=1}^{p} (-X + \lambda_j)^{\alpha_j}$$

et montrons qu'il existe dans $M_n(C)$, muni d'une norme usuelle, un voisinage de U_0, où toutes les solutions U ont le même polynôme caractéristique. Plus précisément, par analogie au théorème de Bloch, nous allons montrer qu'il existe un rayon minimal $r(U_0)$, de boule ouverte de centre U_0, telle que tous les éléments de $B_0(U_0, r) \cap S$ aient le même polynôme caractéristique que U_0 et donc peuvent être connectés par arc à U_0.

Soit en effet une autre solution U de polynôme caractéristique

$$PC_u(X) = \prod_{j=1}^{p} (-X + \lambda_j)^{\beta_j}.$$

Or d'après le lemme préparatoire au théorème de Lucas-Gauss on a, pour tout X de $\mathbb{C} - \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$

$$\frac{PC'_{u_0}(X)}{PC_{u_0}(X)} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\alpha_j}{X - \lambda_j}$$

et

$$\frac{PC'_u(X)}{PC_u(X)} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\beta_j}{X - \lambda_j}$$

et si $X_1 \ldots X_p$ sont distincts deux à deux dans $\mathbb{C} - \{\lambda_1 \ldots \lambda_p\}$, alors α_j, et β_j sont les solutions d'un système cramérien à déterminant de Cauchy $\left|\dfrac{1}{X_i - \lambda_j}\right|$. On a alors

$$\alpha_j = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{1}{X_1 - \lambda_1} & \dfrac{PC'_{u_0}(X_1)}{PC_{u_0}(X_1)} & \dfrac{1}{X_1 - \lambda_p} \\ \dfrac{1}{X_p - \lambda_1} & \dfrac{PC'_{u_0}(X_p)}{PC_{u_0}(X_p)} & \dfrac{1}{X_p - \lambda_p} \end{vmatrix}}{\det\left(\dfrac{1}{X_i - \lambda_j}\right)}.$$

Pour réaliser $|\alpha_j - \beta_j| < 1$, ce qui impliquera, compte tenu de ce que α_j et β_j sont entiers, que $\alpha_j = \beta_j$, il suffit de réaliser

$$(|A_1^j| + |A_2^j| + \cdots + |A_p^j|) \operatorname*{Max}_i \left|\frac{PC'_{u_0}(X_i)}{PC_{u_0}(X_i)} - \frac{PC'_u(X_i)}{PC_u(X_i)}\right| < \left|\det\left(\frac{1}{X_i - \lambda_j}\right)\right|$$

où A_i^j représente le cofacteur de $\dfrac{1}{X_i - \lambda_j}$ dans $\det\left(\dfrac{1}{X_i - \lambda_j}\right)$. Pour j fixé les A_i^j ne sont pas tous nuls, puisque $\det\left(\dfrac{1}{X_i - \lambda_j}\right)$ est non nul.

Pour que $|\alpha_j - \beta_j| < 1$, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, p\}$, c'est-à-dire pour que U et U_0 solutions de $P(X) = 0$ aient le même polynôme caractéristique, il suffit que

$$\operatorname*{Max}_i \left|\frac{PC'_{u_0}(X_i)}{PC_{u_0}(K_i)} - \frac{PC'_u(X_i)}{PC_u(X_i)}\right| < \frac{\left|\det\left(\dfrac{1}{X_i - \lambda_j}\right)\right|}{p \operatorname*{Max}_{i,j} |A_i^j|}.$$

ce qui, à cause de la continuité du polynôme caractéristique d'une matrice, par rapport aux coefficients de cette matrice (voir par exemple Agrégation 1977, ou plus généralement la première conséquence du théorème de Rouché) démontre l'existence d'une boule ouverte, dans $M_n(C)$, de centre U_0 et de rayon $r(U_0)$ telle que toutes les solutions U de $P(X) = 0$ qui sont dans cette boule aient le même polynôme caractéristique que U_0.

On aurait pu trouver ce résultat en utilisant la théorie des fonctions holomorphes : γ_j étant une courbe de classe C_1, fermée d'intérieur simplement connexe, contenant le point d'affixe λ_j, mais ainsi que γ_j, pas les autres points λ_k, alors on sait que

$$|\alpha_j - \beta_j| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\gamma_j} \left(\frac{PC'_{U_0}(z)}{PC_{U_0}(z)} - \frac{PC'_u(z)}{PC_u(z)}\right) dz\right|$$

et l'intégrale considérée, étant en fait une intégrale ordinaire, le théorème de continuité de PC_u, par rapport à u aurait donné la même conclusion que précédemment, mais avec une majoration moins précise.

On en déduit qu'on a une partition de S *en ouverts : les composantes connexes de* S *sont les sous-ensembles de solutions de même polynôme caractéristique.*

Le fait que S est d'intérieur vide résulte de l'emploi du théorème des fonctions implicites mais nous pouvons le démontrer, ici, directement, en montrant que dans tout voisinage V d'un endomorphisme u, il existe un endomorphisme u_ε tel que PC_u soit distinct de PC_{u_0}.

En effet, soit $P(X)$ un polynôme de degré n, et u un endomorphisme tel que

$$PC_u(X) = P(X).$$

D'après le théorème de décomposition cyclique (voir par exemple [5]), il existe une base $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}\,(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} C(\Pi_1) & & \\ & \ddots & \\ & & C(\Pi_k) \end{pmatrix}$$

où $C(g)$ est la matrice compagnons de g : si

$$g = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1X + a_0$$

alors

$$C(g) = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$$

avec, pour tout i, Π_i divise Π_{i+1}, $\Pi_1\Pi_2 \dots \Pi_k = PC_u$ et Π_k est le polynôme minimal de u.

Considérons alors u_ε défini par

$$\mathrm{Mat}\,(u_\varepsilon, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} A_\varepsilon & & 0 \\ & C(\Pi_2) & \\ 0 & & C(\Pi_k) \end{pmatrix}$$

où, si

$$C(\Pi_1) = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \quad 0 & -a_{p-1} \end{pmatrix},$$

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 - \varepsilon \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \quad 0 & -a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de u_ε est

$$\Pi_2 \dots \Pi_k(X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1X + a_0 + \varepsilon)$$

il est donc différent de

$$PC_u = \Pi_2 \dots \Pi_k(X^p + a_{p-1}X^{p-2} + \cdots + a_0).$$

Par conséquent, comme annoncé, pour tout voisinage V de u dans $M_n(\mathbb{C})$, il existe u_ε de V tel que PC_{u_ε} soit distinct de PC_u. L'ensemble des matrices de polynôme caractéristique P donné, n'est donc pas un ouvert et S *est bien d'intérieur vide*.

On peut établir la connexion par arc des composants connexes de S, en remarquant que puisque

$$P(\varphi^{-1}U_0\varphi) = \varphi^{-1}P(U_0)\varphi$$

toute matrice semblable à une solution est solution et établir une connexion par arc entre la réduite de Jordan initialement donnée et la matrice diagonale $D(D(\underbrace{\lambda_1 \dots \lambda_1}_{\alpha_1}, \underbrace{\lambda_2 \dots \lambda_2}_{\alpha_2}, \dots, \underbrace{\lambda_p \dots \lambda_p}_{\alpha_p})$, en remplaçant tous les ε_j^k par $\varepsilon_j^k t$, comme $r_j \leqslant m_j$ toute matrice du chemin est bien dans S.

Il n'y a de solutions isolées que s'il y a des m_j égaux à 1, alors la solution $\lambda_j I_n$ est isolée puisque si

$$U = \lambda_j I_n + H \quad \text{comme H et } I_n \text{ commutent}$$

$$P(U) = P(\lambda_j I_n) + HP'(\lambda_j) + Ho(H)$$

et, comme $m_j = 1$, $P'(\lambda_j)I_n + o(H)$ est régulière pour $\|H\|$ suffisamment petite.

En conclusion, les composantes connexes de S *sont les ensembles de solutions de* $P(X) = 0$, *ayant même polynôme caractéristique : ces composantes connexes sont d'intérieur vide et connexes par arc.* Les $\lambda_j I_n$ *avec* $P'(\lambda_j) \neq 0$ *sont isolées.*

Il semble que ces composantes connexes, aient une frontière présentant certaines analogies avec les fractals : ceci demanderait à être approfondi par une étude plus poussée.

Les propriétés établies semblent jouer un rôle en théorie de la stabilité (théorème de Liapounov). Les résultats trouvés ne se généralisent pas, à des équations à coefficients matriciels : S pourrait être vide, comme le montre l'exemple de $X^2 = M$ avec M singulière.

Bibliographie

(1) BEGHIN, *Mécanique Gauthiers-Villars*, 1952, p. 499 et 511.

(2) BRÉAL 72 (par Nordon), *exercices d'Analyse*, p. 75.

(3) COMTET, *Analyse combinatoire*, *t.* 1, *PUF*, *p.* 27.

(4) GANDMACHER, *Théorie des matrices*, Dunod, p. 219, 234, 242.

(5) GOZARD, *Revue de Mathématiques spéciales*, juin 1983, p. 403 à 405.

(6) DIEUDONNÉ I, *Éléments d'Analyse*, Gauthiers-Villars (1969), p. 252.

(7) FAVARD, *Cours d'analyse de l'École polytechnique*, t, II, Gauthiers-Villars, p. 251 et 240.

(8) JULIA, *Exercices d'Analyse*, Gauthiers-Villars, 1958, p. 121.

(9) LEICHTNAM et SCHAUER, *Exercices corrigés de mathématiques*, t. I, Algèbre 1, édition 1982, SPM Marketing, p. 157.

(10) PATIS et MELO, *Geometric theory of dynamical systems*, Springer Verlag, 1982, p. 53.

(11) Rapport d'agrégation 1983, p. 86.

(12) *Revue de mathématiques spéciales*, mars 1977, p. 281 + janvier 1978 (Agrégation 1977) + ENS 1980.

(13) ROSEAU, *Équations différentielles*, Masson, page 16.

(14) VALIRON, *Analyse*, t. I, Masson, p. 393.

(15) VALIRON, *Analyse*, t. 2, *Équations fonctionnelles*, Masson, p. 73 (th. de Bloch).