3e Année (1976-1977) Octobre 1976 ISSN : 0335-3982-nº 1



REVUE DE MATH SCIENCES

# REVUE DE MATHÉMATIQUES ET DE SCIENCES PHYSIQUES

Aussi ch II ex R. ens 80, ens 60, Science XII 84

## MATHÉMATIQUES

• SMF Fatou 1920 : entrée SMF en 1888 Secrétaire perpétuel en 1919 56 rue ND des champs Paris 6ème
• Pour la Science 12.84 : résoudre 1Δ connaissant les pieds des biss. : 4e d° dt sol par en g el constructibles
· cité Brocard Bull SM 1889 1905

### RÈGLES DE BIOCHE

professeur Louis le grand 1860-1940

Charles

La revue de Mathématiques et de Sciences Physiques nº 3 du mois de Novembre 1975 rappelle les règles de Bioche qui permettent de prévoir un changement de variable, plus avantageux que celui défini sur $\left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$, dans les intégrales $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$, où $R(X, Y)$ est une fraction rationnelle en $X$ et $Y$ à coefficients réels ou complexes, mais n'en propose aucune démonstration, en voici quelques-unes.

Préliminaires. — Soit $P$ un polynôme de $C[X, Y]$. Nous poserons $P(X, Y) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} X^i Y^j$ le support des $\alpha_{ij}$ étant fini et

$$\tilde{P}(X, Y) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} X^j Y^i = P(Y, X).$$

**Lemme 1 :** Il existe deux polynômes $P_1$ et $P_2$ de $C(X, Y)$ tels que

$$P(X, Y) = P_1(X, Y^2) + YP_2(X, Y^2).$$

En effet $P(X, Y) = \sum_{i,p} \alpha_{i,2p} X^i (Y^2)^p + Y \sum_{i,p} \alpha_{i,2p+1} X^i (Y^2)^p.$

**Corollaire 1 :** Il existe deux polynômes $\tilde{P}_3$ et $\tilde{P}_4$, de $C(X, Y)$, tels que

$$\tilde{P}(X, Y) = \tilde{P}_3(X, Y^2) + Y\tilde{P}_4(X, Y^2),$$

donc deux polynômes $P_3$ et $P_4$ tels que

$$P(X, Y) = P_3(X^2, Y) + XP_4(X^2, Y)$$

(car $P \to \tilde{P}$ est un homomorphisme de l'algèbre $C[X, Y]$).

**Lemme 2 :** Tout élément $R(X, Y) = \dfrac{P(X, Y)}{Q(X, Y)}$, élément de $C(X, Y)$ corps des fractions rationnelles à deux indéterminées à coefficients complexes, peut s'écrire $R_1(X, Y^2) + YR_2(X, Y^2)$ avec $R_1, R_2' \in C(X, Y)$, en effet, d'après le théorème 1, il existe des polynômes $P_1, P_2, Q_1, Q_2$ de $C(X, Y)$, tels que

$$\begin{aligned} R(X, Y) &= \frac{P_1(X, Y^2) + YP_2(X, Y^2)}{Q_1(X, Y^2) + YQ_2(X, Y^2)} = \frac{(P_1 + YP_2)(Q_1 - YQ_2)}{(Q_1 + YQ_2)(Q_1 - YQ_2)} \\ &= \frac{P_1Q_1 - Y^2P_2Q_2}{Q_1^2 - Y^2Q_2^2} + \frac{Y(P_2Q_1 - P_1Q_2)}{Q_1^2 - Y^2Q_2^2} \\ &= R_1(X, Y^2) + YR_2(X, Y^2), \end{aligned}$$

avec des notations évidentes pour condenser et puisque

$$\begin{aligned} &Q_1(X, Y^2) - YQ_2(X, Y^2) \\ &\qquad = Q_1(X, (-Y)^2) + (-Y)Q_2(X, (-Y)^2) \neq 0. \end{aligned}$$

**Corollaire 2 :** il existe deux fractions rationnelles de $C(X, Y)$ telles que

$$\begin{aligned} R(X, Y) = \tilde{\tilde{R}}(X, Y) &= \widetilde{\tilde{R}_3(X, Y^2) + Y\tilde{R}_4(X, Y^2)} \\ &= R_3(X^2, Y) + XR_4(X^2, Y) \end{aligned}$$

En conséquence après avoir remarqué que $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ et posé $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$,

$$\varphi : \quad x \to R(\cos x, \sin x),$$

il existe des fractions rationnelles de $C(X)r_i$ avec $i = 1, 2, 3, 4$, telles que

(forme 1)

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= R_1(\cos x, 1 - \cos^2 x) + \sin x\, R_2(\cos x, 1 - \cos^2 x) \\ &= r_1(\cos x) + \sin x\, r_2(\cos x), \end{aligned}$$

(forme 2)

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= R_3(1 - \sin^2 x, \sin x) + \cos x\, R_4(1 - \sin^2 x, \sin x) \\ &= r_3(\sin x) + \cos x\, r_4(\sin x). \end{aligned}$$

**Lemme 3 :** Pour tout polynôme $P$ de $C(X, Y)$ il existe deux fractions rationnelles $p_1$ et $p_2$ de $C(X)$ telles que

$$P(\cos x, \sin x) = p_1(\operatorname{tg} x) + \cos x\, p_2(\operatorname{tg} x),$$

en effet

$$\begin{aligned} \underset{X \neq 0}{P(X, Y)} &= \sum_{i,j} \alpha_{i,j} X^i Y^j = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} X^{i+j} \left(\frac{Y}{X}\right)^j \\ &= \sum_{\substack{i \\ p}} \alpha_{i,2p-i} (X^2)^p \left(\frac{Y}{X}\right)^{2p-i} + X \sum_{i,p} \alpha_{i,2p+1-i} (X^2)^p \left(\frac{Y}{X}\right)^{2p+1-i} \end{aligned}$$

et comme $\cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, on a

$$\begin{aligned} P(\cos x, \sin x) &= \sum_{i,p} \alpha_{i,2p-i} \left(\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\right)^p (\operatorname{tg} x)^{2p-i} \\ &\quad + \cos x \sum_{i,p} \alpha_{i,2p+1-i} \left(\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\right)^p (\operatorname{tg} x)^{2p+1-i} \\ &= p_1(\operatorname{tg} x) + \cos x\, p_2(\operatorname{tg} x). \end{aligned}$$

**Lemme 4 :** Pour toute fraction rationnelle $R$ de $C(X, Y)$ il existe deux éléments $r_1'$ et $r_2'$ de $C(X)$ telles que

$$R(\cos x, \sin x) = r_1'(\operatorname{tg} x) + \cos x\, r_2'(\operatorname{tg} x).$$

En effet, d'après le lemme 4 et avec des notations évidentes pour condenser, on a

$$\begin{aligned} R(\cos x, \sin x) &= \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)} = \frac{p_1 + \cos x\, p_2}{q_1 + \cos x\, q_2} \cdot \frac{q_1 - \cos x\, q_2}{q_1 - \cos x\, q_2} \\ &= \frac{p_1q_1 - \cos^2 x\, p_2q_2}{q_1^2 - \dfrac{1}{1 + tg^2 x} q_2^2} + \cos x \frac{p_2q_1 - p_1q_2}{q_1^2 - \dfrac{1}{1 + tg^2 x} q_2} \\ &= r_1'(\operatorname{tg} x) + \cos x\, r_2'(\operatorname{tg} x). \end{aligned}$$

On a donc la forme 3.

Conséquences.

**Règle de Bioche nº 1.** — Si $\varphi(x)\,dx$ est invariante par le remplacement de $x$ par $-x$, alors le changement de variable

$C = \cos x$ est possible, en effet $\varphi(x)\,dx = \varphi(-x)\,d(-x)$, $\varphi(x) = -\varphi(-x)$ et, d'après la forme 1,

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2} = r_2\,(\cos x)\,\sin x$$

et $$\varphi(x)\,dx = -\,r_2\,(\cos x)\,d\cos x.$$

**Règle de Bioche n° 2.** — Si $\varphi(x)\,dx$ est invariante par le remplacement de $x$ par $\pi - x$ alors le changement de variable $S = \sin x$ est possible, en effet, $\varphi(x)\,dx = \varphi(\pi - x)\,.\,d(\pi - x)$ et $\varphi(x) = -\varphi(\pi - x)$ et d'après la forme 2 :

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x) + (-\varphi(\pi - x))}{2} = r_4\,(\sin x)\,\cos x$$

et $$\varphi(x)\,dx = r_4\,(\sin x)\,d(\sin)\,x.$$

**Règle de Bioche n° 3.** — Si $\varphi(x)\,dx$ est invariante par le remplacement de $x$ par $\pi + x$, alors le changement de variable $T = \operatorname{tg} x$ est possible, en effet $\varphi(x)\,dx = \varphi(\pi + x)\,d(\pi + x)$ et $\varphi(x + \pi) = \varphi(x)$ et d'après la forme 3

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x) + \varphi(x + \pi)}{2} = r'_1\,\operatorname{tg}\,(x),$$

$$\varphi(x)\,dx = \frac{r'_1\,(\operatorname{tg} x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\,d\operatorname{tg} x,$$

d'où la règle simple à retenir :

*Si $\varphi(x)\,dx$ est invariante par une des transformations $x \to -x$, $x \to \pi - x$, $x \to \pi + x$, le changement de variable le plus adapté est $t = f(x)$, où $f$ est celle des fonctions $x \to \cos x$, $x \to \sin x$, $x \to \operatorname{tg} x$ qui reste invariante par la même transformation.*

**Règle de Bioche n° 4.** — Si $\varphi(x)\,dx$ est invariante par les deux transformations $x \to -x$ et $x \to \pi - x$ elle est invariante par la troisième $x \to \pi + x$ et le changement de variable $t = \cos 2x$ est possible. En effet, on a, avec des notations évidentes, $\varphi(x) = -\varphi(-x)$, donc $\varphi(x) = r_2\,(\cos x)\,\sin x$, et

$$\begin{aligned} r_2\,(\cos x) &= \frac{\Sigma\alpha_{2p}\,(\cos^2 x)^p + \cos x\,\Sigma\alpha_{2p+1}\,(\cos^2 x)^p}{\Sigma\beta_{2p}\,(\cos^2 x)^p + \cos x\,\Sigma\beta_{2p+1}\,(\cos^2 x)^p} \\ &= \frac{a\,(\cos^2 x) + \cos x\,b\,(\cos^2 x)}{c\,(\cos^2 x) + \cos x\,d\,(\cos^2 x)} \\ &= \frac{a + b\cos x}{c^2 + d^2\cos^2 x}\,(c - d\cos x) \\ &= A\cos^2 x + \cos x\,B\,(\cos^2 x), \end{aligned}$$

avec $a, b, c$ et $d \in C[X]$ et $A, B \in C(X)$, or $\varphi(\pi - x) = -\varphi(x)$,

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(\pi - x)}{2} = B\,(\cos^2 x)\,\cos x\,\sin x,$$

$$\varphi(x)\,dx = -\frac{1}{4}\,B\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)\,d\,(\cos 2x).$$

**Règle de Bioche n° 5.** — Si $\varphi(x)\,dx$ est invariante par les deux transformations $x \to \pi - x$ et $x \to x + \pi$ elle est invariante par la troisième $x$ en $-x$ et le changement de variable $t = \cos 2x$ est possible ; en effet, avec des notations évidentes, $\varphi(x) = r_2\,(\cos x)\,\sin x = [A\,(\cos^2 x) + \cos x\,B\,(\cos^2 x)]\,\sin x$ et $\varphi(\pi + x) = \varphi(x)$ entraîne

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x) + \varphi(\pi + x)}{2} = B\,(\cos^2 x)\,\sin x\,\cos x\,dx$$

et $\varphi^2(x)\,dx$ est invariante par $x \to \pi - x$.

**Règle de Bioche n° 6.** — Si $\varphi(x)\,dx$ est invariante par les deux transformations $x \to \pi - x$ et $x \to x + \pi$ elle est invariante par la troisième $x$ en $-x$ et le changement de variable $t = \cos 2x$ est possible, en effet

$$-x = \pi - (\pi + x),$$

on peut d'ailleurs remplacer la démonstration de la règle 5 par la remarque $\pi - x = \pi + (-x)$, d'où le résultat suivant :

Si $\varphi(x)\,dx$ est invariante par deux des transformations $x \to -x$, $x \to \pi - x$, $x \to \pi + x$, elle est invariante par la troisième et le changement de variable $t = \cos 2x$ est possible.

Enfin en remarquant que $\operatorname{ch} x = \cos ix$, $\operatorname{sh} x = -i\sin ix$, $\operatorname{th} x = -i\operatorname{tg} ix$,

$$R\,(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)\,dx = R_0\,(\cos ix, \sin ix)\,d\,(ix),$$

on déduit des règles analogues qui permettent en recherchant les changements de variable possibles pour $R_0\,(\cos u, \sin u)\,du$ d'en déduire ceux pour $R\,(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)\,dx$.

**Règle de Bioche n° 7.** — Si $F$ est une fonction numérique définie sur une partie de $\mathbf{R}$ et de période $\lambda\pi$ ($\lambda \in \mathbf{R}^*$), alors puisque

$$f(x) = f\left(\lambda\,\operatorname{Arctg}\,\operatorname{tg}\frac{x}{\lambda} + K\lambda\pi\right),\quad K \in \mathbf{Z},$$

il existe une fonction $F$ définie sur une partie de $\mathbf{R}$ telle que $f(x) = F\left(\operatorname{tg}\frac{x}{\lambda}\right)$, alors dans l'intégrale $\int f(x)\,dx$ le changement de variable $t = \operatorname{tg}\frac{x}{\lambda}$ est possible puisque

$$\int f(x)\,dx = \int F\left(\operatorname{tg}\frac{x}{\lambda}\right)\frac{\lambda\,d\operatorname{tg}\frac{x}{\lambda}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{\lambda}} = \int F(u)\,\frac{\lambda\,du}{1 + u^2}.$$

L. G. Vidiani

Professeur de Mathématiques Spéciales à Annecy.

Bibliographie : Commissaire T3 p 75 Bouligand 225 Arnaudiès 2 441 revue MP novembre 75 oct 76 Abu jaoudé 58 Rivaud 149 Casanova 2 p 283 Chambadal II 197-202 Ramis Cagnac 2 p 356

on peut rajouter : Règle de Bioche n° 8 : si $\varphi(x)dx$ est invariante par $x \to$ [illegible] on envisage le changement de variable $t =$ [illegible] où [illegible] fonction élémentaire invariante par $x \to$ [illegible] ; exemple : [illegible] $t = x + \frac{1}{x}$.

## M. 234. Groupes d'ordre huit non cycliques.